Departman za matematiku i informatiku
Prirodno-matematički fakultet
Univerzitet u Novom Sadu

Madarász Sz. Rozália

MATEMATIKA I MUZIKA

Novi Sad, februar 2009.

Naziv skupa:
I Festival nauke u Novom Sadu

Vreme održavanja:
14-15. februar 2009.

Organizator:
PMF Novi Sad

Mesto održavanja:
Novi Sad

Izdavač publikacije:
Departman za matematiku i informatiku, PMF Novi Sad

Recenzenti:
dr Miloš Kurilić, red. prof PMF u Novom Sadu
Anđelka Simikić, prof. klavira, MŠ „Josip Slavenski“

Štampa: Futura, Novi Sad

Tiraž: 300 primeraka

Departman za matematiku i informatiku
Prirodno-matematički fakultet
Univerzitet u Novom Sadu

Madarász Sz. Rozália

MATEMATIKA I MUZIKA

PRVI FESTIVAL NAUKE U NOVOM SADU
14-15. februar 2009.

Novi Sad, februar 2009.

Kakve veze ima matematika sa muzikom?

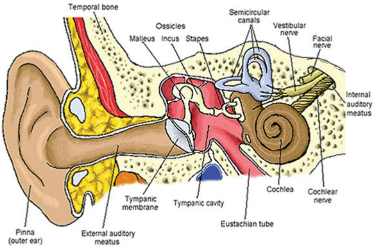
Možemo reći da matematika ima veze sa svim oblastima ljudske aktivnosti koje na bilo koji način uključuju u sebe prostor ili vreme. Kada razmišljamo o vezi između matematike i umetnosti, i specijalno o vezi između matematike i muzike, možemo primetiti fundamentalnu razliku između muzike sa jedne strane i recimo slikarstva, vajarstva ili arhitekture s druge: muzika je oblik umetnosti koji je suštinski zasnovan na protoku vremena, dok su slikarsvo, vajarstvo ili arhitektura u tom smislu statičke forme umetnosti.

Dakle, s obzirom da muzika ima tu svoju vremensku dimenziju, povezana je sa delom matematike koji se bavi funkcijama. No, ono što spaja matematiku i muziku u najširem smislu jeste činjenica da obe pokušavaju da uhvate skrivenu strukturu i harmoniju u svetovima čiji su objekti apstraktni.

Traganje za simetrijom, harmonijom i poretkom u naizgled haotičnom svetu beskonačnih mogućnosti jeste pravi smisao i matematike i muzike. „Globalni izomorfizam“ koji postoji između matematike i muzike potkrepljuje pregršt parcijalnih izomorfizama na koje nailazimo čim malo razgrnemo „šumove“ koji sakrivaju naizgled potpuno različite koncepte. Tada se uočava da je, na primer, odnos između konkretne matematičke strukture i njenog formalnog zapisa istog tipa kao između konkretnog muzičkog komada i odgovarajuće partiture. Obrnuto, interpretaciji neke formalne teorije u nekoj klasi konkretnih struktura odgovara interpretacija zapisanog muzičkog dela.

Kao što možemo dokazati da matematiku ne možemo potpuno formalizovati, muzika isto izmiče svim pokušajima formalizacije. Matematika i muzika su bogati primeri svetova koji se opiru algoritmizaciji, jer traže suštinski ljudski intelekt, kreativnost i imaginaciju. U tom smislu treba shvatiti i ovaj tekst – samo kao pokušaj da se ukaže na matematičke ideje i koncepte koje se nalaze iza nekih muzičkih pojmova ili kao pokušaj da se makar malo rasvetli kako matematički način razmišljanja može pomoći da se bolje razume svet muzike.

Šta ja to čujem?



Ušna školjka

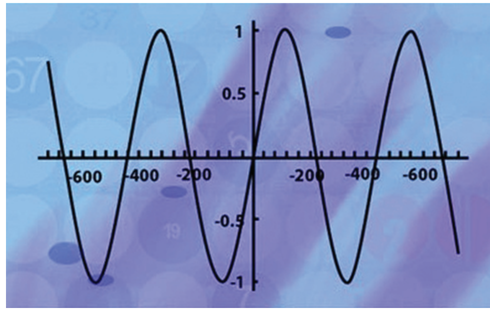
Čovek je skoro stalno okružen zvucima koji dopiru do njega iz okoline. Nekih zvukova smo svesni, a drugih nismo. Čujemo ih, ali naš mozak ih ne obrađuje svesno – mi te zvuke doživljavamo kao deo ambijenta gde boravimo.

Zvuk je mehanički talas koji nastaje oscilovanjem (treperenjem) nekog tela (izvora zvuka) u elastičnoj sredini. Pri tome, oscilatorno kretanje je specijalna vrsta periodičnog kretanja koje se vrši uvek po istoj putanji, sa prolaskom kroz jednu ravnotežnu tačku, u različitim smerovima. Čovek proizvodi zvuk treperenjem (oscilovanjem) glasnih žica koje pokreće vazdušna struja iz pluća. Muzički instrumenti proizvode zvuk na različite načine: udarcem ili udaranjem (bubanj, doboš, ksilofon, pa i klavir), trzanjem žice (gitara, harfa), trenjem (gudački instrumenti), treperenjem vazduha (duvački instrumenti).

Kada neki zvučni izvor svojim oscilovanjem izazove formiranje mehaničkog talasa (dovoljne frekvencije), elastična sredina taj talas prenosi do jedne tanke membrane (bubne opne), koja se nalazi u dnu kanala ušne školjke. Oscilovanje bubne opne se prenosi preko slušnih koščica do unutrašnjeg uha, gde se nalaže završeci specijalnih nerava, tzv. čulni senzori. Čulni senzori taj nadražaj prenose u mozak, gde se stvara doživljaj zvuka.

Od buke do muzike

Kakav subjektivan osećaj će čovek imati prilikom doživljaja zvuka zavisi od toga kako osciluje zvučni izvor. *Jačina zvuka* zavisi od energije koja je preneta zvučnom izvoru – ako je ta energija veća, rastojanje između ravnotežnog položaja i najudaljenijeg položaja do kojeg je telo dospelo pri oscilatornom kretanju (tzv. *amplituda*) je veća, i naš subjektivan osećaj je da čujemo jači zvuk. Jačina zvuka se meri u *decibelima* (dB). Čovek može da čuje zvuke jačine od 5dB (prag čujnosti) do 130 dB (granica bola). Druga važna karakteristika oscilatornog kretanja jeste broj oscilacija u sekundi, tzv. *frekvencija* (učestalost). Jedinica mere za frekvenciju je *herc* (Hz). Na primer, najdeblja E žica na gitari ima frekvenciju oko 82 Hz, što znači da kad je okinemo, ona napravi oko 82 pomeranja tamo-nazad preko ravnotežnog položaja. Što je frekvencija nekog zvučnog talasa veća, naš subjektivan osećaj je da čujemo „viši“ zvuk. Ljudsko čulo sluha može da registruje mehaničke talase čija frekvencija je između 16Hz i 20.000Hz.



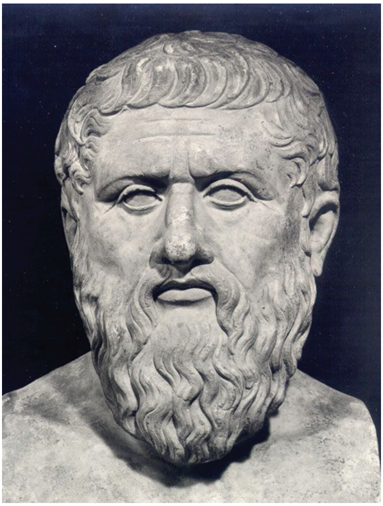
Zvučni talas

Većina zvukova koji do nas dopiru iz okoline je mešavina velikog broja zvučnih talasa različitih frekvencija – mi ih registrujemo kao šumove ili buku. Međutim, ako neki zvučni izvor osciluje pravilno, stvarajući zvučne talase tačno određene frekvencije, mi ćemo taj zvuk registrovati kao *specifičan (muzički) ton*. Ton je dakle zvuk koji ima četiri svoje karakteristike: visinu (koja zavisi od frekvencije zvučnog talasa), intenzitet (koji zavisi od amplitude talasa), trajanje i boju (o čemu će biti više reči kasnije). I sad smo stigli do početka: muzički tonovi su atomi od kojih je sastavljena svaka muzička kompozicija.

Šta je muzika?

Kao što je teško definisati šta je matematika, imamo problema i kada treba definisati šta je muzika. Muzika je za mnoge ljude neverbalna forma komunikacije koja dotiče ljudski intelekt i može da izazove duboke ili burne emocije. Drugi smatraju da je muzika pre svega fenomen prirode, rezultat principa fizike i matematike, a da su ljudi samo otkrili, prepoznali i naučili da manipulišu s njom. Možemo takođe reći da je muzika kombinacija zvukova koji su organizovani pomoću tri dimenzije: *ritma, melodije i harmonije*. No, u tom slučaju isključujemo na primer rep muziku ili recimo muziku Johna Cagea. Po nekim ekstremnim definicijama, muzika je bilo koja kombinacija zvukova koju neko negde uživa da sluša.

Harmonija svemira i koren iz 2



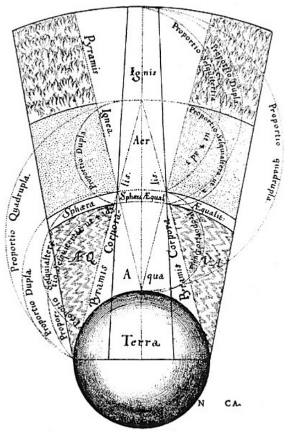
Platon

Muzika je predstavljala veoma važan deo života u Staroj Grčkoj. Smatra se da su svi građani imali neko muzičko obrazovanje i da su bili u mogućnosti da uzmu učešće u muzičkom životu koji je pratio javne događaje u gradu. Platon je muzici dodelio istaknutu ulogu u obrazovanju, tvdeći da muzika doprinosi izgradnji neke vrste unutrašnje harmonije kod čoveka.

Nažalost, nemamo saznanja kako je zapravo zvučala muzika u kojoj su uživali Stari Grci. Umesto toga, ostao je zabeležen njihov doprinos teoriji muzike. Počeci teorije muzike se vezuju za grčkog matematičara Pitagoru i njegove sledbenike, pitagorejce (6. vek pne). Polazeći od rezultata koje su dobili izučavajući harmonije u muzici, oni dolaze do zaključka da je u osnovi svega postojećeg – broj. Smatrali su da su principi matematike – principi svega i da se harmonija univerzuma zasniva na harmoničnim odnosima među brojevima. Početna tačka tog prilično generalnog verovanja bila je otkriće tzv. *zakona malih brojeva* koji na matematički način opisuje razliku između našeg osećaja konsonantnosti (harmonije) i disonantnosti. Kratko rečeno, Pitagorin zakon malih brojeva kaže da su *dva tona konsonantna ako im frekvencije stoje u odnosu malih prirodnih brojeva*. Pitagora je do tog zakona došao polazeći od rezultata eksperimenata sa zategnutim žicama različitih dužina ili staklenim sudovima u kojima se nalazi različita količina vode. Ako krenemo od žice određene debljine, onda visina tona koju ona proizvodi zavisi od njene dužine: što je žica kraća, to je ton viši. Ako žicu skratimo na njenu polovinu (odnos 2:1), ton će skočiti za oktavu, ako je skratimo za jednu trećinu (odnos 3:2), ton će skočiti za kvintu, a ako žicu skratimo za jednu četvrtinu (odnos 4:3), ton će biti viši za kvartu. Kad skraćujemo dužinu žice, mi povećavamo njenu frekvenciju, a mi procenjujemo rastojenje u „visini" između dva tona kao odnos njihovih frekvencija. Tako,

Pitagora i pitagorejci

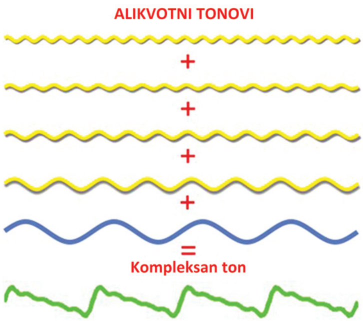
možemo reći da su Pitagorejci otkrili da je odnos frekvencija između nekog tona i tona koji je za oktavu viši 1:2, između tona i njegove kvinte 2:3, između tona i njegove kvarte 3:4, itd... Prirodno je zapitati se kako je naš subjektivan osećaj harmonije (konsonantnosti) povezan sa odnosima 1:2, 2:3, 3:4,...? Zašto su upravo ti odnosi prijatni za nas i da li postoji neko racionalno i naučno objašnjenje ovog fenomena? Pitagora i njegovi sledbenici su kao objašnjenje ponudili sveobuhvatnu teoriju harmonije koja je prirodno dovela do potrebe da se izučavaju pre svega prirodni brojevi i njihovi odnosi.

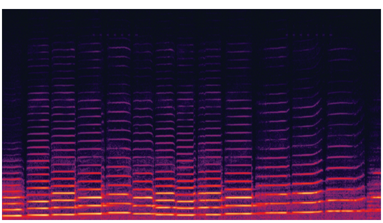


Harmonija univerzuma

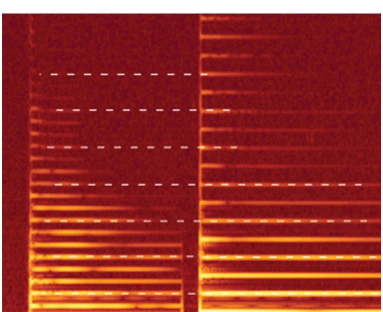
Interesantno je Pitagorejci do otkrića iracionalnosti broja $\sqrt{2}$ došli izučavajući jedan prirodan „muziči problem“. Znajući da oktavi odgovara odnos 1:2 između dužina odgovarajućih zategnutih žica, kolika je dužina žice čiji ton deli tu oktavu na dva jednaka dela? Ako tu nepoznatu dužinu označimo sa x, dolazimo do sledeće jednačine: $1:x=x:2$, tj. $x^2=2$. Naravno, mi sada znamo da je tada $x=\sqrt{2}$, što je iracionalan broj, pa je jasno zašto Pitagorejci nisu mogli napisati tu dužinu kao odnos dva prirodna broja. Otkriće da eto već tako jednostavno definisana veličina ne može da se opiše kao odnos dva prirodna broja, prouzrokovalo je pravu krizu u pitagorejskoj teoriji i jedno vreme je strogo čuvana kao najmračnija tajna.

Alikvote i Fourierova analiza





Spektogram zvuka violine - vide se osnovna frekvencija i frekvencije alikvotnih tonova



Violinista je odsvirao savršenu kvintu - vidi se slaganje frekvencija alikvotnih tonova

Kao što je kompleksan svetlosni zrak sastavljen od duginih boja, zvuci koje mi uobičajeno čujemo jeste kompleksan zvuk, koji je sastavljen od puno „čistih“ zvukova (samo jedne frekvencije). Naše čulo sluha radi kao Fourierov analizator i razdvaja kompleksan zvučni talas na spektar jednostavnih talasa. Boja ljudskog glasa je zbog toga specifična: svako od nas proizvodi svoj „lični“ spektar zvučnih talasa, i kada prepoznajemo nečiji glas, mi ustvari uspevamo da detektujemo upravo taj lični, specifični spektogram.

Na isti način, kada neko odsvira određen ton na flauti, violini ili klaviru, mi čujemo da su to tonovi iste visine, ali potpuno različite boje. Za boju tona odgovorni su tzv, *alikvotni tonovi (viši harmonici)*, koje se čuju pored osnovnog tona. Ako je osnovni ton frekvencije f, alikvotni tonovi koje stvaraju naši instrumenti jeste spektar tonova manje jačine čije su frekvencije celobrojni umnošci od f tj. 2f, 3f, 4f, ... Od raspodele jačine tih alikvota zavisi boja tona određenog instrumenta. I to sada objašnjava Pitagorin zakon malih brojeva: tonovi koji su u harmoniji sa osnovnim tonom su upravo tonovi čije su frekvencije zastupljene u spektru alikvotnih tonova!

Iako su objašnjenje Pitagorinog zakona malih brojeva ponudili još Galileo Galilei i Helmholz, tek je nedavno, posle eksperimenata Plompa i Levelta (1965) potpuno razjašnjena matematička i fizička pozadina koja stoji iza fenomena konsonantnosti.

U knjizi "*On the sensation of tones*", Helmholz je ponudio objašnjenje konsonantnosti koja se zasniva na fenomenu rezonantnih udara. Helmholz je pretpostavljao da je disonanca dva tona posledica udara što ih stvaraju bliske frekvencije njihovih viših harmonika (alikvota). Konsonantnost je jednostavno odsustvo tih disonantnih udara. Rezultati Plompa i Levelta (1965) su potvrdili da ako čujemo jednostavne zvuke (samo jedne frekvencije), onda se samo zvuci vrlo bliskih frekvencija doživljavaju kao disonantni, a klasični muzički intervali kao što su kvinta, kvarta ili terca uopšte ne izdvajaju svojom konsonantnošću.

Danas električni muzički instrumenti (kao što je sintisajzer, električna gitara) ili razni dodaci tim instrumentima, mogu veštački da manipulišu zvučnim talasima različitih frekvencija, da ih razdvajaju i sabiraju, da ističu ili smanje intezitet određenih alikvota, i tako sintetišu zvuke novih boja koji se ne bi mogli dobiti na prirodan način. Na neki način, to označava novu eru u muzici, i mi smo, hteli to i ne, svedoci te velike promene.

Skale – kroćenje beskonačnog

Skala je niz više uzastopnih tonova koji se penju od jednog tona do drugog, kao po nekoj lestvici (merdevini). To se u principu može uraditi na beskonačno mnogo načina. U različitim kulturama širom sveta koriste se različite skale, koje za nas mogu zvučati veoma čudno. Struktura skale koju koriste različite kulture daju osnovnu atmosferu koju zrači njihova muzika, jer se note tih skala koriste za kreiranje melodija i harmonija.

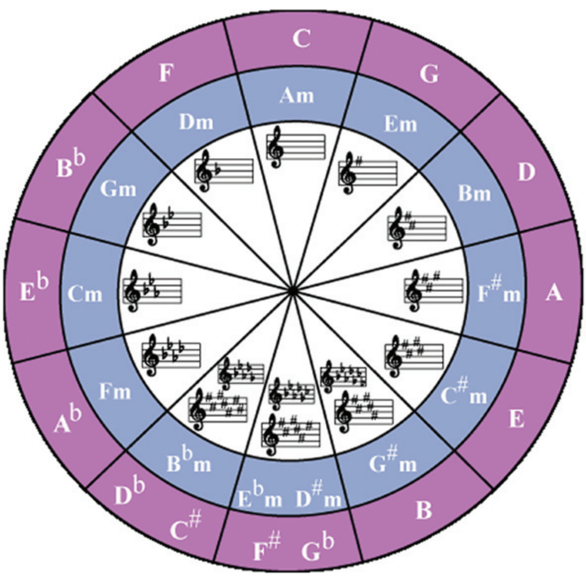
U osnovi zapadnjačke muzičke kulture nalaze se tzv. dijatonske skale. Sve one koriste tonove jedne oktave koju čini 12 polu-stepena. Postoji razne skale koje su izgrađene od različitih kombinacija polu-stepena i celih stepena da bi se popeli za oktavu. Najpoznatije su durska (jonska) i molska (eolska) skala. Obe ove skale možemo pronaći još kod Starih Grka.

Pitagorejska skala, kao svi tonovi hromatske skale mogu se dobiti jednostavnim matematičkim postupkom koji isključivo koristi dve činjenice: da se frekvencije osnovnog tona i tona koji je za oktavu viši odnose kao 1:2, a između tona njegove kvinte kao 2:3. Drugim rečima, ako osnovni ton ima frekvenciju f, onda kvinta gore ima frekvenciju (3/2)f, a oktava gore frekvenciju 2f. Kad se popnemo u sledeću oktavu, možemo se vratiti u nižu množeći datu frekvenciju sa 1/2. Ako frekvenciju tona C uzmemo kao osnovu tj. kao 1, dobijamo redom sledeće frekvencije:

C=1 => G=3/2 => D'=(3/2)x(3/2)=9/4,
pa oktava dole D=(9/4)(1/2)=9/8,
iz čega sledi A=(9/8)(3/2)=27/16,
pa E'=(27/16)(3/2)=81/32,
pa oktava dole E=(81/32)(1/2)=81/64
i H=(81/64)(3/2)=243/128.

Ton F dobijamo kada od C uzmemo kvintu nadole, F'=2/3, pa oktavu gore, F=4/3. Tako dobijamo Pitagorejsku skalu čije su frekvencije u sledećim odnosima:

C	D	E	F	G	A	H	C
1	9/8	81/32	4/3	3/2	27/16	243/128	2



Ako ovaj postupak nastavimo, dobićemo i sve „međutonove“, (tj. crne dirke na klavijaturi), da bi na kraju ponovo dobili C. Od svakog od tih tonova možemo izgraditi dursku odnosno molsku skalu. Ako krenemo od tona C, odnosno C-dur skale odnosno njoj odgovarajuće paralelne a-mol skale, i pomeramo se za kvintu nagore, zbog „čuvanja“ raspodela celih stepena odnosno polustepena unutar skale, redom ćemo morati da izvršavamo korekcije i to dodavanjem po jedne povisilice na sedmi ton nove lestvice. Kako nas na kraju taj postupak vraća na početni ton, on se najlepše može ilustrovati pomoću tzv. *kvintnog kruga*.

Pitagorejska skala je matematički perfektna u odnosu na početni ton od koga smo krenuli, ali ima svoje nedostatke čim za notni centar uzmemo neki drugi ton, tj. čim pokušamo da promenimo tonalitet. Taj nedostatak su muzičari u 17. veku ispravljali tako što svaki put, kada su muzičari trebali da sviraju u drugom tonalitetu, štimeri istrčavali na scenu i ponovo naštimavali instrumente, sada u tom novom tonalitetu. Ovaj haos ima svoje precizno matematičko objašnjenje. Kada krenete recimo od tona C, i napravite pun krug u kvintnom krugu, kada ponovo stižete do C, to nije sasvim tačan C koji je za sedam oktava viši od polaznog. Naime, on bi morao imati frekvenciju koja je $2^7=128$ puta veća od polazne, a ako idemo 12 kvintnih skokova, dobijamo faktor $(3/2)^{12}=129{,}746$. Takođe, polu-stepeni u hromatskoj skali koja je dobijena preko kvintnih skokova nisu isti.

Da bi se prevazišli ovi problemi, razni ljudi su predlagali različita rešenja. Među njima je bio i matematičar Marin Mersenne (poznat po prostim brojevima oblika 2^p-1, gde je p prost broj) je u svojoj knjizi Harmonie Universelle (1636-37) predložio jednako-temperiranu skalu u kojoj svaki polu-stepen u svakoj oktavi ima odnos frekvencija dvanaesti koren iz 2. Koristeći ovako tempriranu skalu kompozicije su se mogle transponovati („translirati“) iz jednog tonaliteta u drugi, a da pri tome odnos između tonova ostane isti.

Naravno, cena ovog jeste da recimo kvinte više nisu sasvim matematički prefektne (možda je to razlog što muzičari nisu odmah prihvatili jednako-temperiranu skalu), ali odstupanja su toliko mala, da samo vrlo mali broj ljudi primećuje razliku. Dobitak je da se na istom instrumentu bez ponovnog štimanja mogu svirati kompozicije u bilo kom od 12 durskih ili 12 molskih tonaliteta.
Johan Sebastian Bach je bio toliko oduševljen sa tom novim načinom štimanja klavira, da je napisao svoje dve čuvene knjige „Dobro Temperirani Klavir“ (1722), sa po 24 preludijuma i fuga, svaka u različitom tonalitetu.

Marin Mersenne

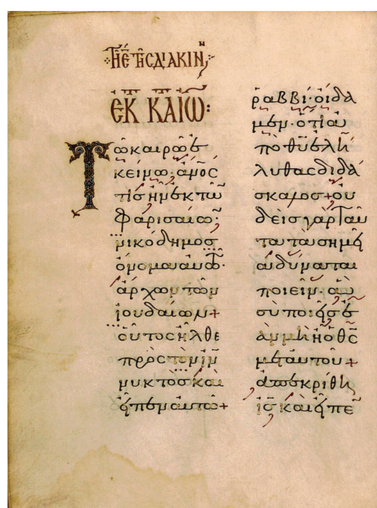
Johann Sebastian Bach

Ritam i logaritam

Da li se sećate vašeg prvog susreta sa notama – zapisom nekog muzičkog dela? Da li ste odmah razumeli kako se nešto što ima melodiju i ritam može zapisati pomoću crnih i belih notnih glava i linijskog sistema od 5 linija? I ko je uopšte izmislio ovaj čudan način zapisivanja? Da li ste ikada pokušali sami da izmislite neki svoj sistem zapisivanja melodija koje želite da zapamtite? Možda izmislite nešto zgodno za buduće generacije!

Kao što ni matematičke oznake nisu odmah imale današnji oblik, i način zapisivanja muzike se menjao tokom vremena. U Mesopotamiji i Staroj Grčkoj su u tu svrhu koristili simbole alfabeta. U srednjem veku su se koristile tzv. neume, koje su se pisale iznad teksta i označavale su ritam i melodiju. U XI veku italijanski benediktinac Guido d'Arazzo stavlja u upotrebu notni sistem sa 4 linije i služi se prvim slogom stihova latinske himne Svetom Jovanu Krstitelju da bi upamtio imena tonova i njihovu visinu – to je početak solmizacije. Crtane note se javljaju u XIII veku – u to vreme notne glave su imale oblik crnih kvadratića i rombova. Pojava štamparstva doprinosi širenju notacije, da bi se u XVIII veku pojavile današnje notne glave, ovalne, bele ili crne, u notnom sistemu od pet linija, sa raznim oznakama za dinamiku, tempo, itd.

Samo učenje veštine čitanja nota tj. muzičkog teksta već na samom početku zahteva izvesno matematičko predznanje, pre svega elementarne stvari o razlomcima. Svi smo mi učili kako se trajanje tona označava notnim vrednostima, kako jedna cela nota traje kao dve polovine, svaka polovina po dve četvrtine, svaka četvrtina po dve osmine, pa se one dalje dele na šesnaestine itd. No, ono čega verovatno većina ljudi nije svesna jeste da je matematička pozadina notnog teksta u suštini grafik funkcije u modifikovanom



Neume

semi-logaritamskom koordinatnom sistemu, gde x osa predstavlja protok vremena, a y osa logaritam frekvencije tona. Pri tome su sva mesta na kojima funkcija ima konstantnu vrednost označeni na specijalan način, pomoću notnih vrednosti. Naime, kao što smo rekli ranije, ljudi procenjuju rastojanje u visini između dva tona kao odnos njihovih frekvencija. Na primer, po današnjim standardima, ton A4 koji se nalazi u prvoj oktavi, posle srednjeg C, ima frekvenciju 440 Hz, ton A3 koji je za oktavu niži frekvenciju 220 Hz, a ton A2 koji je još oktavu niži ima frekvenciju 110 Hz. Ako bi ta tri tona predstavili o koordinatnom sistemu u kome je x osa vreme, a y osa frekvencija, imali bi različite razmake između tonova A2 i A3, odnosno između A3 i A4. Prema tome, prirodno je da u grafičkom prikazu muzike u neku vrstu koordinatnog sistema beležimo logaritme frekvencija u zavisnosti od vremena. U takvom pristupu, ako su nam data dva po dva tona sa istim (muzičkim) razmakom, redom sa frekvencijama f_1, f_2, f_3, f_4, to matematički možemo zapisati kao $f_1:f_2=f_3:f_4$, i u tom slučaju će razlika njihovih logaritama biti ista, tj.

$$\log f_1 - \log f_2 = \log f_3 - \log f_4.$$

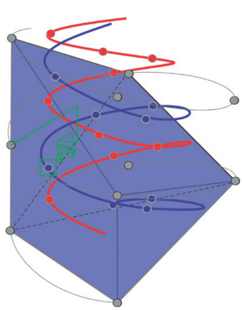
Savršeno, zar ne? Ili vam se zavrtelo u glavi? Da li vam je previše matematike? Istraživanja koja se sprovode u poslednje vreme (videti recimo [11]) tvrde da su matematičke sposobnosti jako povezane sa muzičkim sposobnostima. Pojednostavljeno rečeno, matematika bi trebala da vam pomogne da bolje razumete muziku, a već i samo slušanje muzike (specijalno, Mozartove muzike) bi trebalo da poboljša vaše matematičke sposobnosti. Isprobajte!

Wolfgang Amadeus Mozart

Od gramofona do iPod-a

Možda pripadate generaciji koja nije imala prilike da uživo vidi gramofon, niti znate šta znači izraz „long plejka”. U džepu možda držite sve albume vaše omiljene grupe, a na malom odmoru „prebacujete” drugaru na njegov telefon snimke koncerta ili „download-ujete” sa YouTube-a interesantan spot. Naravno, nova su vremena. Danas smo svedoci kompletne digitalizacije svega, pa i muzike. I više nego ikad, potreba za matematičkim modelima u svim sferama muzike postaje više nego očigledna. Sviđalo se to nama ili ne, kompjuteri danas diktiraju kuda idu istraživanja, pa je muzička industrija takođe pod snažnim uticajem te opšte atmosfere. Od 2000. godine širom sveta osnovana su razna društva, održavaju su konferencije, pokrenuti su novi časopisi sa temom muzika-matematika-računarstvo. Matematička reprezentacija muzike vrlo često ima i geometrijski prikaz, a korišćenjem diskretnih i probabilističkih metoda postaje moguća automatska analiza muzičke kompozicije. Određuju se oblasti tonaliteta, analizira se i prepoznaje ritam, a tehnikama koje su inspirisane istraživanjima DNK molekula prepoznaju se ili razdvajaju melodije. Muzičko komponovanje i improvizacija se modeluju kao specijalni „constraint satisfacion” problemi, ili problemi iz teorije grafova, a za generisanje nizova jazz akorda koriste se specijalne formalne gramatike.

Postoje mišljenja da izučavanjem formalnih matematičkih modela ljudskih sposobnosti u kreiranju, analizi i reprodukciji muzike mi dobijamo i posredne rezultate koji mogu doprineti dubljem razumevanju ljudske prirode, pre svega razumevanju nivoa i vrsta ljudske kreativnosti.



“Spiral array” - jedna matematička reprezentacija muzike (Elaine Chew)

Reference:

1. F. Bagi, A matematika és a zene – az élet harmoniája, http://www.termeszetvilaga.hu/tv2001/tv0110/bagi.html

2. A. Barnett, The Mathematics of Music and Sound, http://math.dartmouth.edu/~m5s07/

3. R. Coolman, Why Twelve Tones?, http://oregonstate.edu/~coolmanr/WhyTwelve/

4. E. Chew, Math & Music: The Perfect Match, Operations Research Management Science – Math & Music, June 2008, http://www.lionhrtpub.com/orms/orms-6-08/music.html

5. E. Chew, Modeling Tonality: Applications to Music Cognitions, http://www-rcf.usc.edu/~echew/papers/CogSci2001/EC-CogSci2001.pdf

6. J. H. David Jr., The Mathematics of Music, 1995, http://jackhdavid.thehouseofdavid.com/papers/math.html

7. É. Gyarmathy, Matematikai tehetségek, Uj Pedagógiai Szemle, 2002, http://epa.oszk.hu/00000/00035/00060/2002-05-lk-Gyarmaty-Matematikai.html

8. B. Moiseiwitsch, Art, Mathematics and Music, http://www.am.qub.ac.uk/amtpt/pers/moiseiwitsch/AMM/AMM.htm

9. F. Nicolas, Questions of Logic: Writing, Dialectics and Musical Strategies, in Mathematics and Music, Springer, 2002, http://www.entretemps.asso.fr/Nicolas/TextesNic/QuestionsOfLogic.html

10. R. Plomp and J. M. Levelt, "Tonal Consonance and Critical Bandwidth", Journal of the Acoustical Society of America, 1965, www.lifesci.sussex.ac.uk/home/Chris_Darwin/PerMuSo/pdfs/PlompLevelt.pdf

11. Rauscher FH, Shaw GL, Levine LJ, Wright EL, Dennis WR, Newcomb RL., Music training causes long-term enhancement of preschool children's spatial-temporal reasoning, Neurological Research, 1997, Vol.19,, Febr. 2-8, http://www.ncbi.nlm.nih.gov/pubmed/9090630

12. Z. Šikić, Mathematics, Physics and Music – A Case Study, www.fsb.hr/matematika/download/ZS_mathematics_and_music.pdf