UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI
FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU I
INFORMATIKU

Sonja Medojević

KEJLIJEVI GRAFOVI GRUPA

-master teza-

Novi Sad, 2018

Sadržaj

Predgovor

Najstarija grana moderne matematike, teorija grupa, kao samostalna disciplina počela se formirati krajem 18.veka. Iako se pojavio relativno kasno, pojam grupe bio je izuzetno važan za proučavanje topoloških problema, algebarskih jednačina, geometrijskih transformacija, itd.

1830. godine, radovima Galoa i Abela[1] o rešivosti algebarskih jednačina, ostvaren je veliki skok u razvoju teorije grupa, što je doprinelo i razvoju matematike. Kroz skoro celi 19. vek akcenat je bio na proučavanju konačnih grupa permutacija.

Možemo pomisliti da je aksiomatska definicija grupe nastala iz glave jednog matematičara, ali - naprotiv! Posle skoro sto godina rada na teoriji grupa, od strane mnogobrojnih matematičara, proizašla je eksplicitna formulacija aksioma koje definišu grupu. Prvu važnu teoremu izveo je Lagranž[2] 1771. godine. Koši[3] počinje da se bavi teorijom grupa tek 1815. godine, proučavajući grupe čiji su elementi permutacije. U radovima Artura Kejlija[4] prvi put vidimo aksiome teorije grupa. On pokazuje da struktura grupe zavisi samo od načina na koji data binarna operacija deluje na parove elemenata, tj.

"A group is defined by means of the laws of combinations of its elements".

Kejlijevi radovi dali su značajan doprinos razvoju teorije grupa, postavivši je na prave temelje, što je olakšalo i ubrzalo njen napredak.

Zlatno doba teorije konačnih grupa je period od kraja 19. i početka 20. veka, zahvaljujući radovima Silova, Frobenijusa, Bernsajda, Heldera, itd.[5]

Teorija grupa danas je povezana sa mnogim algebarskim, i ne samo algebarskim disciplinama. Poznat je odgovor na mnoge probleme teorije grupa, na čijim rešenjima su godinama, čak i decenijama, radili mnogobrojni matematičari. Urađena je klasifikacija nekih familija grupa. Na primer, svih konačnih prostih grupa; dokazano je da su sve grupe neparnog reda rešive; konačnih grupa, sa konačnim, fiksnim brojem generatora i fiksnim eksponentom koji je prost broj, ima konačno mnogo; postoje grupe sa konačnim prezentacijama i neodlučivim problemom reči i konjugovanosti,...

Dok su neki problemi rešeni, postoje i oni čije rešenje još nije poznato, ili je problem delimično rešen, kao i "novi" problemi, koji se mogu javiti usled interakcije teorije grupa sa mnogim drugim disciplinama.

---

[1] Évariste Galois, 1811 - 1832; Niels Henrik Abel, 1802 - 1829

[2] Joseph - Louis Lagrange, 1736 - 1813

[3] Augustin - Louis Cauchy, 1789 - 1857

[4] Arthur Cayley, 1821 - 1895

[5] Ludwig Sylow, 1832 - 1918; Ferdinand Georg Frobenius, 1849 - 1917; William Burnside, 1852 - 1927; Otto Ludwig Hölder, 1859 - 1937

Iako je nazivamo najstarijom granom moderne matematike, možemo primetiti da je teorija grupa disciplina kojom se i danas bavi veliki broj matematičara širom sveta.

Svakome ko se iole bavio teorijom grupa poznata je takozvana Kejlijeva tablica date grupe, koja na lak i praktičan način predstavlja delovanje binarne operacije posmatrane grupe na njene elemente. Ali, iz Kejlijeve tablice teško je videti suštinske osobine grupe - priroda njene strukture ostaje skrivena iza tablice. Novi, drugačiji pristup proučavanju strukture grupe proizašao je iz "crtanja" ponašanja grupe. Naime, grupa se prikaže kao mreža veza između njenih elemenata. Ovako predstavljena, grupa sada postaje slika, gde na vizuelan način vidimo njenu unutrašnju strukturu. Prikaz grupe kao mreže usmerenih segmenata gde vrhovi odgovaraju elementima grupe, a segmenti množenju sa generatornim elementima grupe i njihovim inverzima, uveo je Artur Kejli.

Cilj ovog master rada je proučavanje veze izmedju teorije grupa i teorije grafova. Akcenat je na geometrijskoj percepciji teorije grupa, i isticanju njenih prednosti i mana kroz neke od najpoznatijih konačnih i beskonačnih grupa. Polazimo od sledećeg:

Svakoj grupi, koja je konačno generisana, možemo na prirodan način pridružiti graf. Elementi grupe postaju čvorovi grafa, a dva čvora u i v određuju granu, ukoliko postoji generatorni element grupe h, tako da je $u \cdot h = v$. U zavisnosti da li ćemo obojiti tako nastale grane i da li ćemo zanemariti orijentaciju grana, dobijamo različite grafičke prikaze date grupe. Grafovi dobijeni na ovaj način oslikavaju mnogo bitnih osobina grupe kojoj su pridruženi.

Master rad bavi se analizom tako dobijenih osobina.

Posle predgovora, master rad ima glavu koja sadrži osnovne definicije i tvrđenja iz teorije grupa i teorije grafova, koje koristimo kroz rad. Druga glava bavi se prezentacijama grupe pomoću generatora i definicionih relacija, sa naglaskom na slobodne grupe, problem reči, kao i na Tietzeove transformacije. U trećoj glavi, uvodimo pojam Kejlijevog grafa grupe (usmeren, obojen, neusmeren) uz detaljan prikaz Kejlijevih grafova najpoznatijih grupa (konačne ciklične, beskonačne ciklične, dijedarske, grupe kvaterniona, simetrične, alternirajuće grupe, itd.). Analiziramo grupe automorfizama Kejlijevih grafova. Pojam dejstva grupe na graf otkriva nam još jednu karakteristiku Kejlijevih grafova grupa i ključna teorema ovog dela daje nam potreban i dovoljan uslov da digraf D bude Kejlijev digraf neke grupe. Master rad završavamo sa interesantnim rezultatima o grafički regularnoj reprezentaciji (GRR) grupe $\mathbb{G}$, gde možemo videti kompletan spisak grupa koje nemaju GRR.

Na kraju želim da izrazim zahvalnost dr Ivici Bošnjaku, dr Vojislavu Petroviću i saradniku u nastavi Samiru Zahiroviću na savetima i korisnim sugestijama. Najveću zahvalnost dugujem svom mentoru, dr Rozáliji Madarász Szilágyi, kako na odabiru ovako zanimljive teme, tako i na ažurnosti i svesrdnoj pomoći.

Sonja Medojević

Glava 1

Uvod - Grupe i grafovi

U ovoj glavi, dajemo pregled najznačajnijih definicija i teorema iz teorije grupa i grafova, bez dokaza.

1.1 Grupe - osnovni pojmovi i oznake

Operacija dužine n (n*-arna operacija*) nad nepraznim skupom A je preslikavanje skupa A^n u A. Operacije dužine nula zovemo konstantama, dužine jedan unarnim, dužine dva binarnim operacijama itd. Uopšte, operacije dužine n, ($n \in N$) zovemo *konačnim operacijama*. Univerzalna algebra $\mathbf{A}$ je uređen par (A, F). A je neprazan skup i F je neprazan podskup skupa konačnih operacija nad A koji sadrži bar jednu operaciju dužine veće od ili jednake 1. Skup A nazivamo **domenom** ili **nosačem algebre A**.

Grupa je algebarska struktura $\mathbb{G} = (G, \cdot)$, gde je G neprazan skup, a $\cdot$ binarna operacija na domenu G, $\cdot : G \times G \to G$, tako da važi:

1. $(\forall x, y, z \in G)\,(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ - svojstvo asocijativnosti;
2. $(\exists I \in G)(\forall x \in G)\, x \cdot I = I \cdot x = x$ - postojanje neutralnog elementa I;
3. $(\forall x \in G)(\exists x^{-1} \in G)\, x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = I$ - postojanje inverznog elementa x^{-1}.

Za elemente a i b grupe $\mathbb{G} = (G, \cdot)$ kažemo da su **konjugovani** ako i samo ako postoji element $g \in G$ tako da važi $b = g^{-1} \cdot a \cdot g$. **Red elementa** g grupe $\mathbb{G} = (G, \cdot)$ je najmanji pozitivan prirodan broj n, za koji važi da je $g^n = \underbrace{g \cdot g \cdot \ldots \cdot g}_{\text{n puta}} = I$. Ako je $g^n \neq I$ za svaki prirodan broj n, kažemo da je element g beskonačnog reda. **Red grupe** $\mathbb{G} = (G, \cdot)$ je kardinalnost njenog domena, u oznaci $|G|$. Grupa $\mathbb{G}$ je konačna ako je $|G|$ prirodan broj. U konačnim grupama, svi elementi su konačnog reda. Komutativne grupe, tj. grupe $\mathbb{G} = (G, \cdot)$ koje zadovoljavaju $a \cdot b = b \cdot a$, za svaka dva elementa $a, b \in G$, zovemo **Abelove grupe**.

Sada dajemo primere konačnih i beskonačnih grupa, koje koristimo u ovom radu:

Primer 1.1 *1. Ciklična grupa reda n,* $\mathbb{C}_n$*. Svaki element grupe može se izraziti kao stepen jednog elementa, recimo elementa a:*

$\mathbb{C}_n = (\{I, a, a^2, ..., a^{n-1}\}, \cdot)$*, gde je* $a^n = I$*,* $n \in N$*.*

2. *Dijedarska grupa reda* $2n$*,* $\mathbb{D}_n$ *je grupa izometrija pravilnog mnogougla sa n temena. Binarna operacija dijedarske grupe je kompozicija izometrija. Generisana je elementima* $\rho_{\frac{2\pi}{n}}$ *i* σ_y*, gde je* $\rho_{\frac{2\pi}{n}}$ *rotacija oko koordinatnog početka za ugao* $\frac{2\pi}{n}$ *u pozitivnom smeru, dok je* σ_y *osna simetrija u odnosu na y - osu. Kejlijevu tablicu ove grupe videćemo nešto kasnije.*

3. *Simetrična grupa skupa A,* $\mathbb{S}_A = (S_A, \circ)$*, čiji je domen definisan na sledeći način:* $S_A = \{f \,|\, f : A \to A,\ f\, je\, bijekcija\}$*, gde je A neprazan skup. Binarna operacija simetrične grupe je kompozicija preslikavanja:*

   za $f, g \in S_A$*,* $a \in A$ *je* $(f \circ g)(a) = f(g(a))$*.*

4. *Grupa permutacija skupa od n elemenata,* $\mathbb{S}_n = (S_n, \circ)$*, čiji je domen definisan na sledeći način:*

   $S_n = \{\alpha \,|\, \alpha$ *- permutacija skupa* $\{1, ..n\}\}$*. Red grupe permutacija je* $|S_n| = n!$*. Binarna operacija je takođe kompozicija permutacija.*

5. *Alternirajuća grupa* $\mathbb{A}_n = (A_n, \circ)$*, čiji je domen definisan na sledeći način:* $A_n = \{\alpha \in S_n \,|\, \alpha\, je\, parna\, permutacija\}$*. Kako parnih permutacija ima koliko i neparnih, red grupe je* $|A_n| = \frac{n!}{2}$*.*

6. *Konačna, nekomutativna grupa kvaterniona* $\mathbb{Q} = (Q, \cdot)$ *je podgrupa multiplikativne grupe kompleksnih regularnih matrica formata* 2×2 *generisana matricama* $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ *i* $B = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}$*. Red grupe kvaterniona je 8.*

7. *Beskonačna ciklična grupa* $\mathbb{C}_\infty$*, generisana elementom a,*

   $\mathbb{C}_\infty = (\{I, a, a^2, ..., a^n, ...\}, \cdot)$*. Ne postoji* $n \in N$ *takvo da je* $a^n = I$*.*

Neka je $\mathbb{G} = (G, \cdot)$ grupa, i neka je H neprazan skup, podskup domena grupe $\mathbb{G}, (H \neq \varnothing,\ H \subseteq G)$. Ukoliko je $\mathbb{H} = (H, \cdot|_{H^2}\ )$ takođe grupa, gde je $\cdot|_{H^2}$ restrikcija binarne operacije $\cdot$ na skup H^2, tada kažemo da je grupa $\mathbb{H}$ **podgrupa** grupe $\mathbb{G}$. U daljem tekstu koristimo oznaku $\mathbb{H} \leq \mathbb{G}$. U slučaju da je skup H pravi podskup domena grupe $\mathbb{G}, (H \subset G)$, tada je $\mathbb{H}$ **prava podgrupa** grupe $\mathbb{G}$, što obeležavamo sa $\mathbb{H} < \mathbb{G}$. Podgrupe $\mathbb{H}$ i $\mathbb{K}$ grupe $\mathbb{G}$ su **konjugovane** ako i samo ako je za neko $g \in G$, $\mathbb{K} = g^{-1}\mathbb{H}g$. Neka je $\mathbb{G} = (G, \cdot)$ grupa, i neka je $\mathbb{H} \leq \mathbb{G}$. Dalje, neka je element g proizvoljan element domena grupe $\mathbb{G}$, $g \in G$. Definišimo skup $gH = \{gh | h \in H\}$, koji se naziva **levi koset** podgrupe $\mathbb{H}$, odredjen elementom g. Analogno definišemo i **desni koset** podrupe $\mathbb{H}$, određen elementom g, $Hg = \{hg | h \in H\}$. Kardinalni broj skupa levih/desnih koseta podgrupe $\mathbb{H}$ u odnosu na grupu $\mathbb{G}$, predstavlja **indeks podgrupe** $\mathbb{H}$ i obeležavamo ga sa $[G : H]$. Sledi korisna teorema koja povezuje red grupe sa indeksom njene podgrupe.

Teorema 1.2 *Neka je* $\mathbb{G} = (G, \cdot)$ *grupa, i neka je* $\mathbb{H} \leq \mathbb{G}$*. Tada važi:*

$$|G| = |H| \cdot [G : H].$$

Podgrupa $\mathbb{H}$ grupe $\mathbb{G}$ je **normalna**, što obeležavamo sa $\mathbb{H} \triangleleft \mathbb{G}$, ako i samo ako

$$(\forall g \in G)\ gH = Hg.$$

Trivijalne normalne podgrupe grupe $\mathbb{G}$ su jedinična grupa $\mathbb{I}$ i cela grupa $\mathbb{G}$. Grupa $\mathbb{G} = (G, \cdot)$ je **prosta grupa** ukoliko nema netrivijalnih normalnih podgrupa. Neka je podgrupa $\mathbb{H}$ grupe $\mathbb{G}$ normalna, $\mathbb{H} \lhd \mathbb{G}$. Definišimo **faktor grupu grupe** $\mathbb{G} = (G, \cdot)$ **po podgrupi** $\mathbb{H}$ na sledeći način:

$$\mathbb{G}/\mathbb{H} = (\{gH | g \in G\}, \cdot)$$

Binarna operacija faktor grupe definisana je sa $aH \cdot bH = abH$.

Definicija 1.3 *Neka su* $\mathbb{G} = (G, \cdot)$ *i* $\mathbb{H} = (H, *)$ *grupe. Preslikavanje* $\varphi : G \to H$ *je* **homomorfno preslikavanje** *grupe* $\mathbb{G}$ *u grupu* $\mathbb{H}$*, ako i samo ako važi:*

$$(\forall a, b \in G)\ \varphi(a \cdot b) = \varphi(a) * \varphi(b).$$

Skup svih homomorfnih preslikavanja grupe $\mathbb{G}$ u grupu $\mathbb{H}$ obeležavamo sa $Hom(\mathbb{G}, \mathbb{H})$. Lako možemo primetiti da je za ma koje dve grupe $\mathbb{G}$ i $\mathbb{H}$, $Hom(\mathbb{G}, \mathbb{H})$ neprazan skup: Uvek postoji tzv. **trivijalni homomorfizam** koji sve elemente grupe $\mathbb{G}$ slika u jedinični element grupe $\mathbb{H}$. Neka je $\varphi : G \to H$ homomorfno preslikavanje grupe $\mathbb{G}$ u grupu $\mathbb{H}$. Definišemo:

$$Ker(\varphi) := \{g \in G |\, \varphi(g) = I_H\}.$$

Tada važi da je $\mathbb{K}er(\varphi) = (Ker(\varphi), \cdot)$ normalna podgrupa grupe $\mathbb{G} = (G, \cdot)$. Za skup $Ker(\varphi)$ koristimo naziv **jezgro homomorfizma** preslikavanja φ.

Izomorfizam grupe $\mathbb{G}$ na grupu $\mathbb{H}$ je homomorfno preslikavanje koje je ujedno i bijektivno. Ukoliko je grupa $\mathbb{H}$ baš grupa $\mathbb{G}$, onda je u pitanju **automorfizam** grupe $\mathbb{G}$. Ako postoji izomorfizam izmedju grupa $\mathbb{G}$ i $\mathbb{H}$, to obeležavamo sa $\mathbb{G} \cong \mathbb{H}$. Skup svih izomorfnih preslikavanja grupe $\mathbb{G}$ u grupu $\mathbb{H}$ obeležavamo sa $Is(\mathbb{G}, \mathbb{H})$. Bitna osobina homomorfnog preslikavanja sledi u narednoj teoremi:

Teorema 1.4 *(Prva teorema o izomorfizmu) Neka je* $\varphi : G \to H$ *homomorfizam grupe* $\mathbb{G}$ *na grupu* $\mathbb{H}$*. Tada je*

$$\mathbb{H} \cong \mathbb{G}/Ker(\varphi).$$

Definicija 1.5 *Neka je* $\mathbb{G}$ *grupa i* $A \subseteq G$*. Podgrupa generisana skupom* A*, u oznaci* $< A >$*, je najmanja podgrupa grupe* $\mathbb{G}$ *čiji domen sadrži* A*.*

Definicija 1.6 **Polugrupa** *je algebarska struktura* $(S, \cdot)$ *zatvorena u odnosu na asocijativnu, binarnu operaciju* $\cdot$*.*

1.2 Grafovi - osnovni pojmovi i oznake

Definicija 1.7 *Graf* Γ *je uređeni par* $(V(\Gamma), E(\Gamma))$*, gde je* $V(\Gamma)$ *konačan, neprazan skup elemenata koje nazivamo* ***čvorovima****, dok je* $E(\Gamma)$ *konačan skup elemenata koje nazivamo* ***granama****. Svakoj grani* $e \in E(\Gamma)$ *dodeljen je neuređen par čvorova* $\{u, v\}$*, gde* $u, v \in V(\Gamma)$ *i* $u \neq v$*.*

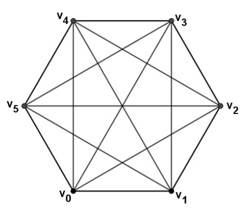
Ako je $e = \{u, v\} \in E(\Gamma)$ kažemo da grana e **povezuje** čvorove u i v. Ukoliko je grani $e \in E(\Gamma)$ dodeljen neuređen par čvorova $\{u, v\}$, to ćemo obeležavati sa $e = uv$. Napomenimo još jednom da se radi o neuređenom paru, tj. da je $uv = vu$. Poznato je da se graf $\Gamma = (V(\Gamma), E(\Gamma))$ najčešće predstavlja geometrijskom slikom u ravni. Čvorovi su predstavljeni tačkama. Grani uv odgovara luk Žordanove krive[1] čiji su krajevi tačke u i v.

Neka je $\Gamma = (V(\Gamma), E(\Gamma))$ graf. Ako postoji grana $e = uv$, tada kažemo da su čvorovi u i v **susedni**. Kažemo da su dve grane **susedne** ako imaju zajednički čvor. Skup svih suseda čvora $v \in V(\Gamma)$ obeležamo sa $N_\Gamma(v)$. **Stepen čvora** v je broj njegovih suseda u grafu Γ, u oznaci $d_\Gamma(v) = |N_\Gamma(v)|$. Graf Γ je **regularan graf** ukoliko su stepeni svih čvorova jednaki. Primetimo da skup grana grafa Γ može biti i prazan skup. U tom slučaju graf Γ zove se **prazan graf**.

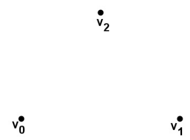
Karakteristični grafovi su:

- *Kompletan graf* K_n je graf sa n čvorova gde između svaka dva čvora postoji grana;
- *Prazan graf* $\overline{K_n}$ je graf sa n čvorova gde nikoja dva čvora nisu spojena granom;
- *k - partitan graf* $\Gamma(X_1, X_2, ..., X_k)$, gde je $k \geq 2$, predstavlja graf čiji se skup čvorova $V(\Gamma)$ može predstaviti kao unija k disjunktnih nepraznih skupova $X_1, ..., X_k$. Skupovi $X_1, ..., X_k$ zovu se *klase* ili *particije*. Grane k - partitnog grafa isključivo povezuju čvorove u različitim klasama;
- *Bipartitan graf* $\Gamma(X, Y)$ je specijalan slučaj k - partitnog grafa za $k = 2$.

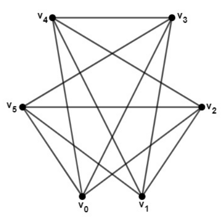
Primer 1.8 *Evo primera nekih grafova:*



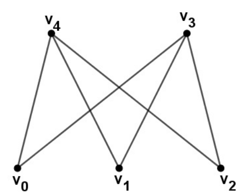
Slika 1.1: Kompletan graf K_6



Slika 1.2: Prazan graf $\overline{K_3}$



Slika 1.3: 3 - partitan graf $\Gamma(X_1, X_2, X_3)$, gde je $X_1 = \{v_0, v_1\}$, $X_2 = \{v_2, v_3\}$, $X_3 = \{v_4, v_5\}$



Slika 1.4: Bipartitan graf $\Gamma(X, Y)$, gde je $X = \{v_0, v_1, v_2\}$, $Y = \{v_3, v_4\}$

[1]**Žordanova kriva** je neprekidna kriva koja nema tačaka samopreseka.

Definicija 1.9 *Grafovi* $\Gamma = (V(\Gamma), E(\Gamma))$ *i* $H = (V(H), E(H))$ *su* **izomorfni**, *u oznaci* $\Gamma \cong H$, *ako postoji preslikavanje* f *tako da važi:*

1. $f : V(\Gamma) \to V(H)$ *je bijekcija;*

2. $uv \in E(\Gamma)$ *ako i samo ako* $f(u)f(v) \in E(H)$, *za sve* $u, v \in V(\Gamma)$.

U tom slučaju za f *kažemo da je izomorfno preslikavanje ili izomorfizam.*

Teorema 1.10 *Ako je* $\Gamma \cong H$ *i* $f : V(\Gamma) \to V(H)$ *izomorfno preslikavanje, tada važi:*

1. $|V(\Gamma)| = |V(H)|$;

2. $|E(\Gamma)| = |E(H)|$;

3. $d_\Gamma(v) = d_H(f(v))$, *za sve* $v \in V(\Gamma)$.

Graf $H = (V(H), E(H))$ je **podgraf** grafa $\Gamma = (V(\Gamma), E(\Gamma))$, u oznaci $H \subset \Gamma$, ako i samo ako je $V(H) \subset V(\Gamma)$ i $E(H) \subset E(\Gamma)$.

Graf $H = (V(H), E(H))$ je **pokrivajući podgraf** grafa $\Gamma = (V(\Gamma), E(\Gamma))$ ako i samo ako je $V(H) = V(\Gamma)$ i $E(H) \subset E(\Gamma)$.

Staza W u grafu Γ je podgraf grafa Γ definisan sa:

1. $V(W) = \{v_0, v_1, ..., v_k\}, k \geq 0$, gde $v_i \in V(\Gamma)$;

2. $E(W) = \{e_1, e_2, ..., e_k\}$, gde je $e_i = v_{i-1}v_i$ i $e_i \in E(\Gamma)$;

3. $e_i \neq e_j$ za $i \neq j$.

Ovu stazu označavamo sa $W = v_0v_1...v_k$.

Čvorovi v_0 i v_k zovu se **krajnji čvorovi** ili **krajevi staze** W. Kažemo da je W jedna $(v_0 - v_k)$ - staza, da povezuje čvorove v_0 i v_k i sl.

Broj grana na stazi W zove se **dužina staze** i obležava sa $d(W)$. Tako je za gornju stazu $d(W) = k$.

Put u grafu Γ je staza u kojoj su svi čvorovi različiti. Krajnji čvorovi puta i dužina puta se definišu isto kao kod staze. Za put dužine k, koristićemo oznaku P_k.

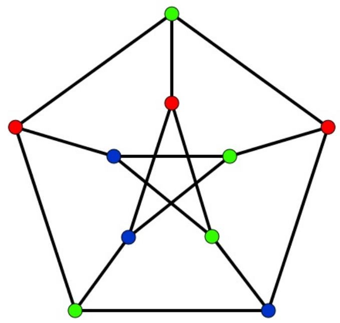
Čvorovi u i v grafa Γ su **povezani** ako i samo ako postoji put u grafu Γ čiji su krajnji čvorovi u i v. Graf Γ je **povezan** ako su svaka dva čvora iz Γ povezana. Po definiciji, graf K_1 je povezan.

Kontura C_k, $k \geq 3$ je put $v_0v_1...v_{k-1}$ s dodatnom granom v_0v_k. Graf je **acikličan** ako ne sadrži nikakvu konturu.

Stablo je povezan i acikličan graf. Sa T_n označavaćemo stablo sa n čvorova.

Neka je $C = \{c_1, c_2, ...c_k\}$ konačan skup, tzv. skup boja. **Bojenje čvorova** grafa $\Gamma = (V(\Gamma), E(\Gamma))$ je preslikavanje $f : V(\Gamma) \to C$. **Pravilno bojenje** grafa Γ je bojenje u kom su susedni čvorovi obojeni različitim bojama, tj. ako $uv \in E(\Gamma)$ sledi da su $f(u)$ i $f(v)$ različite boje. Bojenje u kom skup boja C ima k elemenata zove se **k - bojenje grafa**. Kažemo da je Γ **k - obojiv** ako postoji pravilno $s-$ bojenje grafa Γ, gde je $s \leq k$. Minimalan broj boja kojim se graf Γ može pravilno obojiti zove se **hromatski broj grafa** Γ. Hromatski broj grafa Γ obeležavamo sa $\chi(\Gamma)$. Dakle,

$$\chi(\Gamma) = min\{k \,|\, \Gamma \text{ je } k\text{-obojiv graf }\}.$$



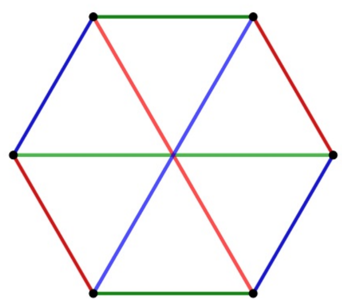
Slika 1.5: Petersonov graf

Primer 1.11 *Nije teško primetiti da je najmanji broj boja kojim se graf sa slike može pravilno obojiti, jednak 3. Dakle,* $\chi(\Gamma) = 3$.

Bojenje grana grafa $\Gamma = (V(\Gamma), E(\Gamma))$ je preslikavanje $f : E(\Gamma) \to C$. **Pravilno bojenje** grana grafa Γ je kada su sve grane koje izlaze iz istog čvora obojene različitim bojama. Drugim rečima, ako su $e_1, e_2 \in E(\Gamma)$ susedne grane, tada su $f(e_1)$ i $f(e_2)$ različite boje. Kažemo da je Γ **granski k-obojiv** ako postoji pravilno $s-$bojenje grafa Γ, gde je $s \leq k$. Graf sa n grana je i granski n-obojiv, ali n nije uvek i najmanji broj boja kojim pravilno možemo granski obojiti graf Γ. Tako dolazimo do pojma **hromatskog indeksa grafa** Γ, to je minimalan broj boja kojim se pravilno mogu obojiti grane grafa Γ. Koristimo oznaku

$$\chi_1(\Gamma) = min\{\text{k} \mid \Gamma \text{ je granski } k\text{-obojiv graf }\}.$$

Primer 1.12 *Nije teško primetiti da je najmanji broj boja kojim se graf sa slike može pravilno granski obojiti, jednak 3. Dakle,* $\chi_1(\Gamma) = 3$.



Definicija 1.13 Digraf (Orijentisan graf) *D je uređeni par $D = (V(D), E(D))$, gde je $V(D)$ konačan, neprazan skup elemenata koje nazivamo **čvorovima**, dok je $E(D)$ konačan skup uređenih parova elemenata iz $V(D)$ koje nazivamo **granama**.*

Naglasimo da pojam grane kod orijentisanih grafova podrazumeva **uređen** par čvorova. Dakle, ako je $e = (u, v) \in E(D)$, tada kažemo da je grana e orijentisana od čvora u ka čvoru v. To još označavamo sa $u \implies v$. Čvor u naziva se **početni čvor**, dok je čvor v **krajnji čvor** grane e. Dve grane digrafa nazivamo **simetričnim** ako je početni čvor prve grane krajnji čvor druge grane, a krajnji čvor prve grane početni čvor druge. Većina pojmova iz dela o neorijentisanim grafovima direktno se prenosi i na digrafove. Na primer, *orijentisani put* i *orijentisana kontura* definišu se isto kao i kod neorijentisanih grafova, samo što je sada svuda prisutna tzv. saglasna orijentacija. Za put je $v_0 \implies v_1 \implies v_2 \implies ... \implies v_k$, a za konturu $v_0 \implies v_1 \implies v_2 \implies ... \implies v_{k-1} \implies v_0$.

Neka je $D = (V(D), E(D))$ digraf. **Izlazni stepen** $d_D^+(v)$ **čvora** $v \in V(D)$ je broj čvorova $x \in V(D)$ takvih da $v \implies x$, tj.

$$d_D^+(v) = |\{x \in V(D) | \, v \implies x\}|.$$

Ulazni stepen $d_D^-(v)$ **čvora** $v \in V(D)$ je broj čvorova $x \in V(D)$ takvih da $x \implies v$, tj.

$$d_D^-(v) = |\{x \in V(D) | \, x \implies v\}|.$$

Definicija 1.14 *Digrafovi $D = (V(D), E(D))$ i $D_1 = (V(D_1), E(D_1))$ su* ***izomorfni****, u oznaci $D \cong D_1$, ako postoji preslikavanje $f : V(D) \to V(D_1)$ tako da je:*

1. *f bijekcija;*
2. *$u \implies v \in E(D)$ ako i samo ako $f(u) \implies f(v) \in E(D_1)$, za sve $u, v \in V(D)$.*

U tom slučaju za f kažemo da je izomorfno preslikavanje.

Glava 2

Prezentacije grupa

2.1 Prezentacija grupe pomoću generatora i odrednica

Do sada smo se upoznali sa dva načina predstavljanja date grupe. Jedan je preko skupa elemenata domena grupe sa binarnom operacijom koja zadovoljava aksiome grupe. Drugi je tablicom množenja grupe, takozvanom Kejlijevom tablicom, iz koje vidimo delovanje binarne operacije na elemente posmatrane grupe. Osim navedenih, postoji još jedan koristan način zadavanja grupe. To je preko njenih generatora (generatornih elemenata) i odrednica.

Neka je $A = \{a_i |\, i \in I\}$ neprazan skup simbola i neka je $A^{-1} = \{a_i^{-1} |\, i \in I\}$. Ovde $^{-1}$ ne predstavlja unarnu operaciju nego samo simbol. Svakom elementu skupa A pridružen je odgovarajući element skupa A^{-1}. Recimo elementu a_i pridružen je element a_i^{-1}.

Napomenimo još da elemente skupova A i A^{-1} posmatramo isključivo kao simbole i stoga je $A \cap A^{-1} = \emptyset$. U ovom poglavlju, skup $A \cup A^{-1}$ je naša posmatrana **azbuka**. Svaki konačan niz simbola azbuke $A \cup A^{-1}$ naziva se **reč**.

Primer 2.1 *Neka je skup $A = \{a_1, a_2, a_3\}$, $A^{-1} = \{a_1^{-1}, a_2^{-1}, a_3^{-1}\}$. Primeri nekih reči nad azbukom $A \cup A^{-1}$:*

$$a_1a_2,\ a_3^{-1}a_2a_1^{-1},\ a_1a_1a_1$$

Reči ćemo obeležavati malim latiničnim slovima : $u, v, w, ...$ **Dužina reči** je broj simbola koje čine datu reč. Dužine reči iz primera su redom 2, 3, 3. U skup svih reči uključena je i **prazna reč**. Prazna reč predstavlja reč dužine 0, i označavamo je sa λ. Pritom $\lambda \notin A$. Na skupu W svih reči nad azbukom $A \cup A^{-1}$ definišimo binarnu operaciju (u oznaci $\cdot$) na sledeći način:

$$u \cdot v = uv$$

Operacija $\cdot$ naziva se **konkatenacija (nadovezivanje** ili **dopisivanje)**. U stvari, reč dobijena konkatenacijom dve zadate reči u i v je nastala tako što se reči u zdesna dopiše reč v.

Teorema 2.2 *Neka je W skup svih reči azbuke $A \cup A^{-1}$, a $\cdot$ operacija konkatenacije. Tada je $\mathbb{W} = (W, \cdot)$ polugrupa sa jediničnim elementom λ.*

U daljem tekstu, podrazumevamo da je azbuka $A \cup A^{-1}$ fiksirana i da je W skup svih reči nad tom azbukom. Posmatrajmo preslikavanje $\varphi : A \to G$, gde je φ bilo koje preslikavanje skupa A u domen grupe $\mathbb{G}$. Za takvo preslikavanje φ definišimo preslikavanje $\overline{\varphi} : W \to G$ na sledeći način:

Ako je $u \equiv a_{i_1}^{\alpha_1} ... a_{i_k}^{\alpha_k}$, gde je $\alpha_i \in \{1, -1\}, i \in \{1, ..., k\}$, tada je

$$\overline{\varphi}(u) = \overline{\varphi}((a_{i_1})^{\alpha_1} ... (a_{i_k})^{\alpha_k}) = (\varphi(a_{i_1}))^{\alpha_1} ... (\varphi(a_{i_k}))^{\alpha_k}.$$

Važi da je $\overline{\varphi}(a_i^{-1}) = (\varphi(a_i))^{-1}$, gde je $(\varphi(a_i))^{-1}$ inverzni element elementa $\varphi(a_i)$. Praznu reč λ preslikavanje $\overline{\varphi}$ slika u neutralni element grupe $\mathbb{G}$, $\overline{\varphi}(\lambda) = I$. Za preslikavanje $\overline{\varphi}$ važi sledeće tvrđenje:

Tvrđenje 2.3 *Neka je $\mathbb{G} = (G, \cdot)$ grupa, $\mathbb{W} = (W, \cdot)$ polugrupa, gde je W skup svih reči azbuke $A \cup A^{-1}$. Preslikavanje $\overline{\varphi}$ je homomorfno preslikavanje polugrupe $\mathbb{W}$ u grupu $\mathbb{G}$ i važi da je $\overline{\varphi}|_A = \varphi$. $\overline{\varphi}(W)$ je domen podgrupe grupe $\mathbb{G}$, koja je generisana skupom $\varphi(A)$.*

Podrazumevamo da su u daljem tekstu φ i $\overline{\varphi}$ gore definisana preslikavanja.

Definicija 2.4 *Neka je $\mathbb{G} = (G, \cdot)$ grupa i $g \in G$. Neka je W skup reči azbuke $A \cup A^{-1}$ i $u \in W$. Kažemo da reč u* **definiše** *element g, ako je $\overline{\varphi}(u) = g$.*

Definicija 2.5 *Neka je $\mathbb{G} = (G, \cdot)$ grupa, W skup reči azbuke $A \cup A^{-1}$ i $u \in W$. Elemente jezgra preslikavanja $\overline{\varphi}$, odnosno reči polugrupe W koje definišu jedinični element grupe ($\overline{\varphi}(u) = I$), zovemo* **odrednicama***, ili* **relatorima**. *Trivijalne odrednice su prazna reč (λ) i reči oblika $a_i a_i^{-1}$, $a_i^{-1} a_i$.*

Posmatrajmo relaciju $\sim$ koja je definisana na skupu svih reči W na sledeći način: *$u \sim v$ ako i samo ako definišu isti element grupe*, odnosno, ako i samo ako je $\overline{\varphi}(u) = \overline{\varphi}(v) = g$, za neki $g \in G$. Primetimo da je tada $u \sim v$ ako i samo ako je uv^{-1} odrednica. Možemo zaključiti da je u odrednica ako i samo ako je $u \sim \lambda$.

Definicija 2.6 *Neka je $\mathbb{G} = (G, \cdot)$ grupa, W skup reči azbuke $A \cup A^{-1}$. Skup $A = \{a_i | \, i \in I\}$ naziva se* **skup izvodnih simbola** *ako je $\overline{\varphi}(W)$ baš G.*

Od sada, pretpostavljamo da je preslikavanje $\overline{\varphi}$ sirjektivno. Kao oznaku skupa svih odrednica date grupe $\mathbb{G}$, koristimo slovo O.

Definicija 2.7 *Neka je skup P podskup skupa svih odrednica grupe $\mathbb{G} = (G, \cdot)$, $P \subseteq O$.*

*Reč u je određena skupom P (***izvediva iz P***), ako i samo ako postoji konačan niz reči $u \equiv u_0, u_1, ..., u_n \equiv \lambda$, takav da je za svako i, $i \in \{1, ..., n\}$, u_i dobijeno od u_{i-1} nekom od sledećih operacija:*

1. *umetanjem u u_{i-1} (kao podreč) neke reči iz P ili neke trivijalne odrednice;*
2. *brisanjem u u_{i-1} (uz uslov da je to njena podreč) neke reči iz P ili neke trivijalne odrednice.*

Napomena 2.8

- *Svaka reč koja je izvediva iz skupa P je i sama odrednica (jer sve reči u nizu imaju istu homomorfnu sliku);*
- *Svaka reč oblika uu^{-1}, $u^{-1}u$ izvediva je iz skupa trivijalnih odrednica;*

- *Ako je reč u određena skupom P onda je možemo dobiti od prazne reči konačnom primenom pravila 1. i 2. prethodne definicije;*

- *S obzirom na sve gore navedeno, podrazumevamo da je P podskup skupa svih odrednica, koji može biti prazan skup ili skup reči date azbuke koji ne sadrži reči oblika uu^{-1} i $u^{-1}u$.*

Definicija 2.9 *Neka je P podskup skupa svih odrednica grupe $\mathbb{G} = (G, \cdot)$, A skup izvodnih simbola i preslikavanje $\varphi : A \to G$. Ako su sve odrednice izvedive iz skupa P, kažemo da je P* **kompletan skup odrednica** *grupe $\mathbb{G}$. Uredjen par $(A; P)$ tada zovemo* **prezentacija grupe $\mathbb{G}$ za preslikavanje** *φ.*

Napomenimo, važi da je $\overline{\varphi}$ sirjektivno preslikavanje tj. da je $\varphi(A)$ generatorni skup grupe $\mathbb{G}$.

Definicija 2.10 *Neka je $(A; P)$ prezentacija grupe $\mathbb{G}$ za preslikavanje φ. Kažemo da je prezentacija:*

- **konačno generisana** *ako i samo ako je skup izvodnih simbola A konačan skup;*

- **konačno odredjena** *ako i samo ako je skup P konačan;*

- **konačna** *ako i samo ako je konačno generisana i konačno određena.*

Kod konačnih prezentacija samo navodimo elemente skupova A i P bez upotrebe vitičastih zagrada.

Primer 2.11 *Ako je $A = \{a, b, c\}$ i $P = \{a^2, bc, c^3, ab^{-1}cb\}$, odgovarajuću prezentaciju zapisujemo na sledeći način:*

$$(a, b, c\,;\, a^2,\, bc,\, c^3,\, ab^{-1}cb)$$

Teorema 2.12 *Neka je dat neprazan skup A takav da $\lambda \notin A$ i neka je W skup svih reči nad azbukom $A \cup A^{-1}$. Neka je $P \subseteq W$. Tada postoji* **jedinstvena** *(do na izomorfizam) grupa $\mathbb{G}_{(A;P)}$ sa prezentacijom $(A; P)$.*

Posmatrajmo grupu $\mathbb{G}_{(A;P)}$ sa prezentacijom $(A; P)$. Neka je za $u \in W$, $[u]$ klasa ekvivalencije relacije $\sim$ određena sa u. Dakle, $[u] = \{v \in W \mid u \sim v\}$. Na skupu $G_{(A;P)}$ definišimo operaciju $\circ$ sa $[u] \circ [v] = [u \cdot v]$. Operacija $\circ$ je dobro definisana, tj. nezavisna od izbora predstavnika klasa ekvivalencija. Tada je u grupi $\mathbb{G}_{(A;P)} = (G_{(A;P)}, \circ)$ neutralni element $[\lambda]$, i svi elementi su inverzibilni, tj. $[u]^{-1} = [u^{-1}]$.

Primetimo, ako je $(A; P)$ prezentacija grupe $\mathbb{G}$ i ako je $\mathbb{G} \cong \mathbb{H}$, tada je $(A; P)$ prezentacija grupe $\mathbb{H}$. Slede primeri konačnih prezentacija nekih od najpoznatijih grupa.

Primer 2.13 Prezentacija jedinične grupe $\mathbb{I} = (\{e\}, \cdot)$
Dajemo tri primera, od beskonačno mnogo:

1. *$(a;\, a)$;*

2. *$(a, b;\, ab^2a^{-1}b^{-3},\, ba^3b^{-1}a^{-2})$;*

3. $(a, b, c;\ a^3,\ b^3,\ c^4,\ acac^{-1},\ aba^{-1}bc^{-1}b^{-1})$.

Dokažimo da je prezentacija pod rednim brojem 3 prezentacija jedinične grupe.

Iz $aba^{-1}bc^{-1}b^{-1} \sim \lambda$ sledi $aba^{-1} \sim bcb^{-1}$. Dobijamo da je $(aba^{-1})^3 \sim (bcb^{-1})^3$ tj, $ab^3a^{-1} \sim bc^3b^{-1}$. Kako je $b^3 \sim \lambda$, sledi $bc^3b^{-1} \sim \lambda$, dakle i $c^3 \sim bb^{-1}$. Odavde direktno sledi da je $c^3 \sim \lambda$, ali znamo da je $c^4 \sim \lambda$ te je $c \sim \lambda$. Ali onda iz $aba^{-1} \sim bcb^{-1}$ i $c \sim \lambda$ sledi $aba^{-1} \sim \lambda$, tj, $b \sim aa^{-1}$ pa je $b \sim \lambda$. Iz $acac^{-1} \sim \lambda$ i $c \sim \lambda$ sledi da je $a^2 \sim \lambda$, ali znamo da je $a^3 \sim \lambda$ odakle sledi $a \sim \lambda$.

Primer 2.14 Prezentacija ciklične grupe $\mathbb{C}_4$, reda 4

1. $(a;\ a^4)$*;*

2. $(a;\ a^8,\ a^{12})$*;*

3. $(a, b;\ a^4,\ b^4,\ a^3b)$.

Dokažimo da je prezentacija pod rednim brojem 3 prezentacija ciklične grupe $\mathbb{C}_4$.

Uočimo da je za datu prezentaciju, $A = \{a, b\}$ i $P = \{a^4, b^4, a^3b\}$. Preslikavanje $\varphi : A \to \mathbb{Z}_4$, dato sa $\varphi(a) = \varphi(b) = 1$ (gde je 1 generatorni element ciklične grupe $\mathbb{Z}_4$) indukuje homomorfno preslikavanje grupe $\mathbb{G}_{(A;P)}$ na grupu $\mathbb{Z}_4 = (\{0, 1, 2, 3\}, +_4)$. Ostaje pokazati da $\mathbb{G}_{(A;P)}$ nema više od četiri elementa, ali to je tačno, jer se svaka reč svodi na a^k, gde je $k \in \{0, 1, 2, 3\}$, gde važi da je a^0 oznaka prazne reči, i $b \sim a^{-3} \sim a$.

Primer 2.15 Prezentacija ciklične grupe $\mathbb{C}_n$, reda n

1. $(a;\ a^n)$*;*

2. $(a;\ a^{n+k},\ a^k)$*, gde* $n|k$.

Primer 2.16 Prezentacija dijedarske grupe $\mathbb{D}_n$, reda $2n$

- $(a, b;\ a^n,\ b^2,\ (ab)^2)$

Dokažimo da je ovo prezentacija dijedarske grupe $\mathbb{D}_n$. Preslikajmo $a \to \rho_{\frac{2\pi}{n}}$ i $b \to \sigma_y$, gde je $\rho_{\frac{2\pi}{n}}$ rotacija oko koordinatnog početka za ugao $\frac{2\pi}{n}$ u pozitivnom smeru, dok je σ_y osna simetrija u odnosu na y-osu. Primetimo da važi da je $(\rho_{\frac{2\pi}{n}})^n = (\sigma_y)^2 = id$, kao i $(\rho_{\frac{2\pi}{n}}\sigma_y)^2 = id$. Zbog toga, zaključujemo da je dijedarska grupa homomorfna slika grupe date sa prezentacijom $(a, b;\ a^n,\ b^k,\ (ab)^2)$. Treba još pokazati da takva grupa nema više od $2n$ elemenata. Ali to je tačno jer je svaka reč nad azbukom $A \cup A^{-1}$ u relaciji $\sim$ sa reči oblika $b^s a^t$, gde je $s = \{0, 1\}$, $t = \{0, 1, ..., n-1\}$, jer je $ab \sim ba^{n-1}$.

Primer 2.17 Prezentacija alternirajuće grupe $\mathbb{A}_4$, reda $\frac{4!}{2}$

- $(a, b;\ a^3,\ b^2,\ (ab)^3)$

Primer 2.18 Prezentacija simetrične grupe $\mathbb{S}_4$, reda $4!$

- $(x, y;\ x^3,\ y^4,\ (xy)^2)$

Dokažimo da je ovo prezentacija simetrične grupe $\mathbb{S}_4$. Neka je $\varphi(x) = (2\,1\,3)$ i $\varphi(y) = (0\,1\,2\,3)$. Jednostavno se proverava da je preslikavanje $\overline{\varphi}$ homomorfno preslikavanje grupe $\mathbb{G}_{(A;P)}$ na $\mathbb{S}_4$. (Primetimo da je grupa $\mathbb{S}_4$ generisana elementima $(2\,1\,3)$ i $(0\,1\,2\,3)$ i da važi da je $(2\,1\,3)^3 = (0\,2\,1\,3)^4 = ((2\,1\,3)(0\,2\,1\,3))^2 = (0\,1)^2 = id$).

Ostaje da se dokaže da je $|\mathbb{G}_{(A;P)}| \leq 24$.

Krenimo od podgrupe $\mathbb{H} \leq \mathbb{G}_{(A;P)}$ koja je generisana elementima $[x]$ i $[y]^2$. Pokazaćemo da je $\mathbb{H}$ normalna podgrupa indeksa 2 sa najviše 12 elemenata i time je dokaz kompletan.

- **$\mathbb{H}$ je normalna podgrupa**

  Zbog $y^{-1}xy \sim y^3xy \sim y^2x^{-1}xyxy \sim y^2x^{-1} \sim y^2x^2$ je

  $[y]^{-1}[x][y] = [y^{-1}xy] = [y^2][x^2] \in \mathbb{H}$, a onda i

  $[y][x][y^{-1}] = [y]^2[y]^{-1}[x][y][y]^{-2} \in \mathbb{H}$, i za svaki ceo broj α je

  $[y]^{-1}[x]^\alpha[y], [y][x]^\alpha[y]^{-1} \in \mathbb{H}$.

  Prema tome, $\mathbb{H} \lhd \mathbb{G}_{(A,P)}$.

- **$\mathbb{H}$ je indeksa 2**

  Ako posmatramo $[y]^\alpha$ lako se primeti da je $[y]^\alpha$ ili H, ako je α parno, ili $[y]H$, ako je α neparno.

- $\mathbb{H} \leq 12$

  Za dokaz ovog dela koristimo grupu prezentaciju grupe $\mathbb{A}_4$ iz prethodnog primera. Preslikajmo $a \to [x], b \to [y^2]$. Kako važi da je $[x]^3 = [y^2]^2 = ([x][y^2])^3 = [\lambda]$, sledi da se grupa $\mathbb{A}_4$ homomorfno preslikava na $\mathbb{H}$.

Primer 2.19 Prezentacija grupe kvaterniona $\mathbb{Q}$, reda 8

1. $(a, b;\ a^4,\ a^2b^2,\ a^3ba^3b^3)$;

2. $(c, d, e, f;\ c^2f^{-1},\ d^2f^{-1},\ e^2f^{-1},\ f^2,\ cde^{-1},\ dec^{-1},\ ecd^{-1})$.

2.2 Tietzeove transformacije

U ovom delu bavimo se pitanjem, kada dve prezentacije $(A;P)$ i $(B;Q)$ određuju istu grupu, tj. kada je $\mathbb{G}_{(A;P)} \cong \mathbb{G}_{(B;Q)}$? Odgovor na ovo pitanje daju nam Tietzeove transformacije, koje predstavljaju pravila prevodjenja jedne prezentacije u drugu.

Neka je data grupa $\mathbb{G} = (G, \cdot)$, skup izvodnih simbola A, skup reči W nad azbukom $A \cup A^{-1}$, i kompletan skup odrednica P.

Definicija 2.20 *Neka je data prezentacija $(A;P)$. Transformacije koje $(A;P)$ prevode u novu prezentaciju, nazivaju se* **Tietzeove transformacije** *i date su na sledeći način:*

1. *Ako su reči u_i, $i \in I$, izvedive iz skupa P, tada proširujemo skup odrednica P skupom $\{u_i |\, i \in I\}$. Nova prezentacija je oblika*

$$(A; P \cup \{u_i |\, i \in I\})$$

2. *Ako su odrednice $u_i \in P$, $i \in I$, izvedive iz skupa $P \setminus \{u_i |\, i \in I\}$, onda ih eliminišemo. Nova prezentacija je oblika*

$$(A; P \setminus \{u_i |\, i \in I\})$$

3. *Neka su u_i, $i \in I$, ma kakve reči iz W, i b_i, $i \in I$, skup novih simbola, $b_i \notin A$. Tada, proširujemo skup izvodnih simbola A skupom $\{b_i |\, i \in I\}$ i proširujemo skup odrednica P skupom $\{b_i \sim u_i |\, i \in I\}$. Nova prezentacija je oblika*

$$(A \cup \{b_i |\, i \in I\}; P \cup \{b_i \sim u_i |\, i \in I\})$$

4. *Ako je $a_k \sim b_k$, $k \in I$, i ako se u rečima u_k, kao podreči ne javljaju reči a_i i a_i^{-1}, $i \in I$, tada eliminišemo izvodne simbole a_i, odrednice $a_i \sim u_i$, i u preostalim odrednicama iz P, a_i^α zamenimo sa u_i^α.*

Definicija 2.21 *Kažemo da je Tietzeova transformacija* ***elementarna*** *ako i samo ako uvodi (briše) samo jedan izvodni simbol i odgovarajuću odrednicu, ili, ako i samo ako uvodi (briše) samo jednu odrednicu.*

Primetimo, 1. i 2., odnosno 3. i 4. su inverzne transformacije.

Tvrđenje 2.22 *Neka je $(A; P)$ prezentacija grupe $\mathbb{G}$. Ako je $(B; Q)$ dobijena od prezentacije $(A; P)$ primenom Tietzeovih transformacija, onda je i $(B; Q)$ prezentacija grupe $\mathbb{G}$.*

Teorema 2.23 *Neka su $(A; P)$ i $(B; Q)$ prezentacije grupe $\mathbb{G}$. Tada se $(B; Q)$ može dobiti od $(A; P)$ primenom Tietzeovih transformacija.*

Dokaz. Neka je $(A; P)$ prezentacija grupe $\mathbb{G}$ za preslikavanje $\varphi : A \to G$, a $(B; Q)$ prezentacija grupe za preslikavanje $\tau : B \to G$. Neka za $a \in A$ važi da je $\varphi(a) = \overline{\tau}(v_a)$, gde je v_a reč azbuke $B \cup B^{-1}$. Za $b \in B$ je $\tau(b) = \overline{\varphi}(u_b)$, gde je u_b reč azbuke $A \cup A^{-1}$. Primetimo, $\overline{\tau} : W \to G$ je homomorfno preslikavanje, gde je W skup reči nad azbukom $B \cup B^{-1}$.

Primenom 3. Tietzeove transformacije, transformišemo $(A; P)$ u $(A \cup B; P \cup \{b \sim u_b |\, b \in B\})$.

Ovo predstavlja prezentaciju grupe $\mathbb{G}$ za neko preslikavanje ρ, za koje važi da je $\rho|_A = \varphi$, $\rho|_B = \tau$.

Primetimo, $\rho(b) = \tau(b) = \overline{\varphi}(u_b) = \overline{\rho}(u_b)$.

Ako je $v \in Q$, tada je $\overline{\rho}(v) = \overline{\tau}(v) = I$ i v je izvedivo iz skupa odrednica $P \cup \{b \sim u_b |\, b \in B\}$.

Isto tako, izvedivo je i $a \sim v_a$ jer je $\rho(a) = \varphi(a) = \overline{\tau}(v_a) = \overline{\rho}(v_a)$. Pa nam zato primena 1. Tietzeove transformacije daje novu prezentaciju, takođe za preslikavanje ρ:

$$(A \cup B; P \cup Q \cup \{b \sim u_b |\, b \in B\} \cup \{a \sim v_a |\, a \in A\}).$$

Do ove transformacije se moglo doći i Tietzeovim transformacijama primenjenim na prezentaciju $(B; Q)$. Sledi, prezentacija $(A; P)$ se može prevesti u prezentaciju $(B; Q)$. $\square$

Posledica 2.24 *Ako su $(A; P)$ i $(B; Q)$ prezentacije grupe $\mathbb{G}$ konačne, tada se prezentacija $(A; P)$ transformiše u prezentaciju $(B; Q)$ pomoću konačno mnogo elementarnih Tietzeovih transformacija.*

Tvrđenje 2.25 *Ako je $|A| > |P|$, tada je grupa $\mathbb{G}_{(A;P)}$ beskonačna. Specijalno, ima element beskonačnog reda.*

Primer 2.26 *Dokažimo da je $(b, c;\ b^m,\ c^n,\ bc \sim cb)$, gde je $(m, n) = 1$, prezentacija ciklične grupe reda mn.*

Poznatu prezentaciju ciklične grupe $(a;\ a^{mn})$ prevodimo u datu prezentaciju, koristeći Tietzeove transformacije.

$(a;\ a^{mn})$

$(a, b, c;\ a^{mn},\ b \sim a^n,\ c \sim a^m)$................................(3)

$(a, b, c;\ a^{mn},\ b \sim a^n,\ c \sim a^m,\ b^m,\ c^n,\ bc \sim cb,\ a \sim b^v c^u)$, gde su u i v celi brojevi takvi da je $um + vn = 1$...(1)

$(a, b, c;\ b \sim a^n,\ c \sim a^m,\ b^m,\ c^n,\ bc \sim cb,\ a \sim b^v c^u)$ .....(2)

$(b, c;\ b \sim (b^v c^u)^n,\ c \sim (b^v c^u)^m,\ b^m,\ c^n,\ bc \sim cb)$........(4)

$(b, c;\ b^m,\ c^n,\ bc \sim cb)$ ....(2)

Primer 2.27 *Dokažimo da prezentacije $(a, b; a^3, b^2, ab \sim ba^2)$ i $(c, d; c^2, d^2, (cd)^3)$ odredjuju istu grupu.*

Polazimo od

$(a, b;\ a^3,\ b^2,\ ab \sim ba^2)$

$(a, b, c, d;\ a^3,\ b^2,\ ab \sim ba^2,\ c \sim b,\ d \sim ab)$.................(3)

$(a, b, c, d;\ a^3,\ b^2,\ ab \sim ba^2,\ c \sim b,\ d \sim ab,\ c^2,\ d^2,\ (cd)^3,\ a \sim dc)$.............(1)

Koristimo:

- $d^2 \sim (ab)^2 \equiv abab \sim \lambda$, zbog $ab \sim ba^2 \implies aba \sim ba^3 \sim b \implies abab \sim b^2 \sim \lambda$;
- $(cd)^3 \sim (bab)^3 \equiv babbabbab \sim ba^3b \sim b^2 \sim \lambda$;
- $d \sim ab \implies db \sim ab^2 \sim a \implies dc \sim a$.

$(a, b, c, d;\ c \sim b,\ d \sim ab,\ c^2,\ d^2,\ (cd)^3,\ a \sim dc)$...................(2)

$(c, d;\ c^2,\ d^2,\ (cd)^3,\ d \sim dc^2)$.........(4)

$(c, d;\ c^2,\ d^2,\ (cd)^3)$.........(2)

2.3 Algoritamski problemi u teoriji grupa

Prilikom ispitivanja grupe koja je data nekom svojom prezentacijom, može se naići na velike teškoće. Da li je grupa jedinična? Da li je Abelova? Da li je konačna? Ovo su naizgled jednostavna pitanja, ali odgovor na njih može predstavljati veliki problem. Problemi postaju veći ukoliko zahtevamo da se do odgovora dođe u konačno mnogo koraka, tj. ako zahtevamo postojanje algoritma koji nam daje odgovor na postavljeni problem. Pravimo razliku između dva pojma:

Procedura je svaki postupak koji se može opisati pomoću izraza konačne dužine (na nekoj konačnoj azbuci) i koji ima tačno određene diskretne korake, koji se posle zadavanja ulaznih promenljivih mogu sprovesti mehanički. Možemo zaključiti da se svaka procedura može programirati na računaru.

Za proceduru kažemo da je **algoritam** ako se ona uvek završava u konačno mnogo koraka, za proizvoljno zadate ulazne promenljive. Dakle, algoritam intuitivno možemo shvatiti kao uputstvo koje se sastoji od konačno mnogo instrukcija za izvršenje prostih, diskretnih operacija. Nije svaka procedura i algoritam.

Primer 2.28 *Za korenovanje prirodnog broja postoji procedura, ali ne i algoritam. Naime, ako ulazna promenljiva nije potpun kvadrat, procedura može trajati teoretski beskonačno dugo, a da pri tome daje sve tačnije približne vrednosti kvadratnog korena prirodnog broja.*

Primer 2.29 *Primer algoritma je dobro poznati Euklidov algoritam koji u konačno mnogo koraka pronalazi najveći zajednički delilac dva prirodna broja.*

Za proceduru kažemo da je **procedura odlučivanja** ako traži odgovor na pitanje na koje je odgovor *DA* ili *NE*. **Algoritam odlučivanja** je takva procedura, koja posle konačno mnogo koraka na takvo pitanje daje odgovor *DA* ili *NE*. Problem je **algoritamski odlučiv** ako se za njega može dati algoritam odlučivanja.

Neka je $A = \{a_i \,|\, i \in I\}$ konačan, neprazan skup simbola, gde pretpostavljamo da ni jedan od simbola skupa A nije konkatenacija nekih drugih simbola. Takav skup A zovemo azbuka. Neka je W skup svih reči nad A. **Jezik** nad A je svaki podskup skupa svih reči W.

Definicija 2.30 *Za jezik $L \subseteq W$ kažemo da je **rekurzivan** ako postoji algoritam koji za svaku reč $w \in W$ odlučuje da li w pripada ili ne jeziku L.*

Definicija 2.31 *Za jezik $L \subseteq W$ kažemo da je **rekurzivno nabrojiv** ako postoji procedura koja nabraja (sa ili bez ponavljanja, u nekom redosledu) sve reči jezika L.*

Jasno, ako je jezik L rekurzivan, tada je i njegov komplement $\bar{L}$ rekurzivan. Lako se primeti da je svaki rekurzivan jezik i rekurzivno nabrojiv. Dovoljno je u nekom redosledu generisati sve reči iz W i izdvajati iz niza reči koje pripadaju jeziku L, pomoću algoritma odlučivanja. Time smo dali proceduru za nabrajanje svih reči jezika L, gde se pritom ne ponavljaju elementi jezika. Važe sledeća tvrđenja:

Tvrđenje 2.32 *Jezik L je rekurzivan ako i samo ako su L i $\bar{L}$ rekurzivno nabrojivi.*

Tvrđenje 2.33 *Postoji rekurzivno nabrojiv jezik koji nije rekurzivan.*

Danas je u teoriji algoritama kao i uopšte u matematici prihvaćeno da se za formalizaciju pojma procedure uzme tzv. **Tjuringova mašina**. Tjuringove mašine uveo je sredinom 30. godina prošlog veka engleski matematičar Alan Tjuring[1]. Iz definicije Tjuringovih mašina vidi se da "rad" svake mašine zadovoljava uslove postavljene prilikom opisivanja pojma procedure: može se opisati pomoću izraza konačne dužine, na nekoj konačnoj azbuci i sastoji se od preciznih, elementarnih koraka, koji su unapred određeni i sprovode se mehanički. Pojam Tjuringove mašine nije suviše restriktivan.

[1] Alan Mathison Turing, 1912 - 1954

Naime, takozvana Čerč[2] - Tjuringova teza tvrdi da se *svaki algoritam može realizovati na nekoj Tjuringovoj mašini.* Kako nije potpuno jasno šta sve podrazumevamo pod pojmom procedure, ne možemo ni očekivati matematički dokaz Čerč - Tjuringove teze. Kada bi se našla dobro definisana, intuitivno jasna procedura, koja se ne bi mogla realizovati na Tjuringovoj mašini, teza bi bila oborena. No, to se do sada nije desilo, te je Čerč - Tjuringova teza široko prihvaćena u matematici. Takođe su se i mnoge druge formulacije pojma procedure (rekurzivne funkcije, algoritmi Markova) pokazale ekvivalentne sa pojmom Tjuringove mašine. Spomenućemo sada probleme odlučivosti koje je formulisao Maks Den[3] 1911. godine. Navodimo, bez dokaza, neke značajnije rezultate.

Definicija 2.34 *Neka su date grupe $\mathbb{G}$ i $\mathbb{H}$ sa svojim prezentacijama, redom, $(A; P)$ i $(B; Q)$.*

1. **Problem reči** *je rešiv za grupu $\mathbb{G}$ ako i samo ako postoji algoritam kojim se za bilo koje dve reči azbuke $A \cup A^{-1}$ može utvrditi da li definišu isti element grupe. Drugim rečima, problem reči je rešiv za datu grupu, ako postoji algoritam kojim se za bilo koju reč odgovarajuće azbuke može utvrditi da li definiše jedinični element.*

2. **Problem konjugovanosti** *je rešiv za grupu $\mathbb{G}$ ako i samo ako postoji algoritam kojim se za bilo koje dve reči azbuke $A \cup A^{-1}$ može utvrditi da li definišu konjugovane elemente grupe.*

3. **Problem izomorfizma** *je rešiv za grupe $\mathbb{G}$ i $\mathbb{H}$ ako i samo ako postoji algoritam koji utvrdjuje da li su te dve grupe izomorfne.*

Ako je problem konjugovanosti rešiv za grupu sa datom prezentacijom, onda je rešiv i problem reči. Obrat ne važi.

Teorema 2.35 *Problem reči je rešiv za*

- *grupe sa konačnom prezentacijom koje imaju najviše jednu odrednicu;*
- *klasu rezidualno konačnih grupa;*
- *klase rešivih slobodnih i nilpotentnih grupa.*

Teorema 2.36 *Problem konjugovanosti rešiv je za klasu svih nilpotentnih grupa kao i za klasu konjugovano separabilnih grupa.*

Teorema 2.37 *Problem izomorfizma rešiv je s obzirom na klasu konačno prezentovanih grupa sa rešivim problemom reči.*

Teorema 2.38 *Postoje grupe sa konačnim prezentacijama za koje su problemi konjugovanosti i reči nerešivi.*

Teorema 2.39 *Postoji grupa sa konačnom prezentacijom za koju nije rešiv problem konjugovanosti, ali je rešiv problem reči.*

Teorema 2.40 *Problem izomorfizma je nerešiv za grupe sa konačnim prezentacijama, čak štaviše, nerešiv je problem izomorfizma grupa sa konačim prezentacijama sa jediničnom grupom.*

[2]Alonzo Church, 1903 - 1995

[3]Max Dehn, 1878 - 1952

2.4 Slobodne grupe

Definicija 2.41 **Slobodna grupa** *je grupa koja ima prezentaciju sa praznim skupom odrednica.*

Prezentaciju grupe $\mathbb{G}$ koja ima prazan skup odrednica obeležavamo sa $\mathbb{G}_{(A;\emptyset)}$. U narednom tekstu koristimo termin slobodne grupe, pritom koristeći oznaku F_A (ili samo F).

Primer 2.42 *Skup odrednica, u prezentaciji slobodne grupe, ne mora biti prazan skup! Na primer, pokazaćemo da je $(a,b,c;\ a^2b(ac)^2ab)$ prezentacija slobodne grupe koristeći Tietzeove transformacije.*

Krećemo od date prezentacije
$(a,b,c;\ a^2b(ac)^2ab)$,
$(a,b,c,x,y;\ x\sim ab,\ y\sim ac,\ a^2b(ac)^2ab)$.....(3)
$(a,b,c,x,y;\ x\sim ab,\ y\sim ac,\ a^2b(ac)^2ab,\ a\sim(ab)^{-1}(ac)^{-2}(ab)^{-1},$
$a\sim x^{-1}y^{-2}x^{-1},\ b\sim xy^2x^2,\ c\sim xy^2xy)$.....(1)
$(a,b,c,x,y;\ a\sim x^{-1}y^{-2}x^{-1},\ b\sim xy^2x^2,\ c\sim xy^2xy)$...............(2)
$(x,y;\emptyset)$...............(4)

Napomena 2.43 *Svaka slobodna grupa ima i prezentaciju sa nepraznim skupom odrednica! Trivijalno važi da je $(A\cup B;B)$, gde je $A\cap B=\emptyset$, prezentacija grupe F_A.*

Predstavljamo još jedan način definisanja slobodne grupe. Neka od pitanja na koja u ovom delu dajemo odgovor su: Šta je slobodna baza grupe i šta predstavlja njena kardinalnost? Kada su dve slobodne grupe izomorfne? Kakve su podgrupe slobodne grupe? Šta su homomorfizmi slobodnih grupa? Iz odgovora na poslednje pitanje dobijamo veoma bitnu osobinu slobodnih grupa. Naime, može se dokazati da je svaka grupa homomorfna slika neke slobodne grupe. Ovo nam daje mogućnost da grupu predstavimo na jedan novi način, kao faktor grupu slobodne grupe.

Neka je $\mathbb{G}=(G,\cdot)$ grupa i neka je A neprazan podskup njenog domena ($A\neq\emptyset$, $A\subseteq G$). Definišimo

$$g_p(A)=\{a_1^{\epsilon_1}...a_n^{\epsilon_n}\mid a_i\in A,\ \epsilon_i=\pm1\}$$

Dva proizvoda $a_1^{\epsilon_1}...a_n^{\epsilon_n}$ i $b_1^{\eta_1}...b_m^{\eta_m}$, gde $a_i,\ b_i\in A$ su **identična** ako je $n=m$, $a_i=b_i$, $\epsilon_i=\eta_i$, $i\in\{1,...,m\}$. U suprotnom, posmatrani proizvodi su **različiti**.

Definicija 2.44 *Reč azbuke $A\cup A^{-1}$ je* **slobodno reducirana** *ako i samo ako se nijedna trivijalna odrednica $(aa^{-1},a^{-1}a)$ ne javlja kao njena podreč. Reč $u\equiv a_{i_1}^{p_1}...a_{i_k}^{p_k}$, $p_i\in\{1,-1\}$ azbuke $A\cup A^{-1}$ je* **ciklično reducirana** *ako i samo ako je slobodno reducirana i ako važi da je ili $i_1\neq i_k$ ili $(i_1=i_k\wedge p_1=p_k)$.*

Primer 2.45 *Neka je $A=\{a,b\}$. Neke slobodno reducirane reči nad azbukom $A\cup A^{-1}$ su:*

$$ab,\ a^{-1}bab^{-1},\ babaa,\ aba^{-1}a^{-1}b$$

Reči nad azbukom $A \cup A^{-1}$ koje nisu slobodno reducirane:

$$aa^{-1},\ baabb^{-1}a$$

Važi sledeće tvrđenje:

Tvrđenje 2.46 *Svaki element grupe $\mathbb{G}_{(A,\emptyset)}$ odredjen je jedinstvenom slobodno reduciranom reči azbuke $A \cup A^{-1}$.*

Posmatrajmo sada beskonačnu cikličnu grupu $\mathbb{C}_\infty$, generisanu elementom x. Slobodno reducirane reči mogu biti jednog od moguća dva sledeća oblika:

$x \cdot x ... \cdot x = x^r$ ili $x^{-1} \cdot x^{-1} ... \cdot x^{-1} = x^{-r}$, gde je r pozitivan, ceo broj. Iz već poznatih osobina cikličnih grupa znamo da, ako je $x^m = x^n$, tada je $m = n$. To jest, dva posmatrana, različita slobodno reducirana proizvoda daju različite elemente ciklične grupe $\mathbb{C}_\infty$. Tada kažemo da je $\mathbb{C}_\infty$ **slobodno generisana** skupom $\{x\}$. Uvodimo i formalnu definiciju ovog pojma:

Definicija 2.47 *Neka je $\mathbb{G} = (G, \cdot)$ grupa i neka je A neprazan podskup njenog domena ($A \neq \emptyset$, $A \subseteq G$). Grupa $\mathbb{G}$ je* ***slobodno generisana*** *skupom A, ako važe sledeći uslovi:*

1. *$g_p(A) = G$;*
2. *Dva različita slobodno reducirana proizvoda nad A daju dva različita elementa grupe $\mathbb{G}$, koja su pritom različita od neutralnog elementa grupe.*

Podskup A domena G iz definicije naziva se i **slobodna baza**, ili slobodni generatorni skup grupe $\mathbb{G}$. Primetimo da iz uslova 2. definicije sledi da ako $a \in A$, onda $a^{-1} \notin A$. U suprotnom, postojali bi elementi $a, b \in A$, takvi da je $b^{-1} = a$. Ali onda su a i b^{-1} dva različita slobodno reducirana proizvoda koja su jednaka. Takođe, iz uslova 2. prethodne definicije sledi da $I \notin A$, gde je I neutralni element grupe $\mathbb{G}$.

Tvrđenje 2.48 *Podskup A domena F grupe F je* ***slobodna baza*** *grupe F ako i samo ako za svako preslikavanje φ, $\varphi : A \to G$, gde je G domen (ma koje) grupe $\mathbb{G}$, postoji jedinstvena ekstenzija preslikavanja φ, $\overline{\varphi} \in Hom(F, \mathbb{G})$, takva da važi da je $\overline{\varphi}|_A = \varphi$.*

Slede korisna tvrđenja o slobodnim bazama, koje dajemo bez dokaza.

Tvrđenje 2.49 *Neka su $\mathbb{G}, \mathbb{H}$ izomorfne grupe i $\varphi \in Is(\mathbb{G}, \mathbb{H})$. Ako je A slobodna baza grupe $\mathbb{G}$, onda je $\varphi(A)$ slobodna baza grupe $\mathbb{H}$.*

Tvrđenje 2.50 *Grupa $\mathbb{G}$ je slobodna ako i samo ako ima slobodnu bazu.*

Tvrđenje 2.51 *Neka su $\mathbb{G}$, $\mathbb{H}$ slobodne grupe sa slobodnim bazama A i B. Tada važi da je*

$$\mathbb{G} \cong \mathbb{H} \text{ ako i samo ako je } |A| = |B|$$

Posledica 2.52 *Ako su A i B slobodne baze grupe $\mathbb{G}$, direktno iz prethodnog tvrđenja sledi da je $|A| = |B|$.*

Definicija 2.53 *Neka je F slobodna grupa.* **Rang** *grupe F je kardinalnost njene slobodne baze.*

Napomena 2.54 *U nekim knjigama se jedinična grupa posmatra kao slobodna grupa čija je slobodna baza prazan skup. Rang ove grupe je* 0*, i mi pretpostavljamo kada govorimo o slobodnoj grupi, da je njen rang veći od* 0*.*

Tvrđenje 2.55
- *Ako je slobodna grupa generisana skupom konačne kardinalnosti* m*, tada je rang slobodne grupe* $\leq m$*;*
- *Ako je slobodna grupa konačnog ranga* n*, tada je svaki njen generatorni skup kardinalnosti* n *ujedno i njena slobodna baza.*

Teorema 2.56 *Podgrupa slobodne grupe je slobodna grupa.*

Tvrđenje 2.57 *Neka je* $\mathbb{G} = (G, \cdot)$ *grupa. Ako je* $\mathbb{G} \neq \mathbb{I}$ *slobodna grupa, onda je beskonačna ciklična grupa podgrupa grupe* $\mathbb{G}$*.*

Dokaz. Ako je $\mathbb{G}$ slobodna grupa koja nije jedinična, možemo pretpostaviti da je slobodno generisana skupom A. Ako je $a \in A$ posmatramo, $g_p(\{a\}) := \{a^{k_1}a^{k_2}...a^{k_n} \,|\, a \in A,\, k_i = \pm 1\}$. Sledi da je $g_p(\{a\})$ ciklična grupa. Reducirani proizvod u skupu A je na primer, $a \cdot a... \cdot a = a^r$, gde je r pozitivan ceo broj. Ako je $a^r = a^s$, onda je $r = s$, odakle direktno sledi da je $g_p(\{a\})$ beskonačna ciklična grupa. □

Tvrđenje 2.58 *Neka je* $\mathbb{G} = (G, \cdot)$ *grupa. Ako je* $\mathbb{G}$ *slobodno generisana skupom* A*,* $|A| \geq 2$*, onda grupa* $\mathbb{G}$ *nije Abelova.*

Dokaz. Kako važi da je $|A| \geq 2$, znamo da postoje bar dva elementa u skupu A, $a, b \in A$ i pritom važi da je $a \neq b$. Zatim, kako je $\mathbb{G}$ slobodno generisana sa A, ab i ba su dva različita reducirana proizvoda, odakle sledi da je $ab \neq ba$, pa direktno sledi da grupa $\mathbb{G}$ nije Abelova. □

Tvrđenje 2.59 *Nijedna konačna netrivijalna grupa nije slobodna.*

Dokaz. U Tvrdjenju 2.57 dokazali smo da svaka netrivijalna slobodna grupa ima kao podgrupu beskonačnu cikličnu grupu. Dakle, ako je $\mathbb{G}$ konačna, slobodna grupa mora imati beskonačnu cikličnu grupu kao podgrupu, što je apsurd. □

Tvrđenje 2.60 *Slobodna grupa, slobodno generisana skupom* A*,* $|A| \geq 2$*, ima trivijalan centar.*

Dokaz. Pretpostavimo da grupa ima element z, $z \neq I$, i z pripada centru. Neka je z reduciran proizvod, $z = a_1^{k_1}...a_n^{k_n}$, gde $a_i \in A$, $k_i = \pm 1$, $i \in \{1, ..., n\}$. Dalje, neka $b \in A$, $b \neq a_1$. Posmatramo proizvod $bz = ba_1^{k_1}...a_n^{k_n}$ i to je reducirani proizvod u A. Sa druge strane, $zb = a_1^{k_1}...a_n^{k_n}b$.

Razmatramo sledeće opcije:

- Ako je $a_n^{k_n} \neq b^{-1}$, onda je zb reducirani proizvod pa je jasno da je $zb \neq bz$, iz razloga što zb počinje sa $a_1^{k_1}$, a bz sa $b \neq a_1^{k_1}$;
- Ako je $a_n^{k_n} = b^{-1}$, tada za $n > 1$ je $zb = a_1^{k_1}...a_{n-1}{}^{k_{n-1}}$, pa je opet jasno $zb \neq bz$, ali kako je z u centru, dolazimo do kontradikcije.

□

Tvrđenje 2.61 *Neka je $\mathbb{G}$ ma koja konačno generisana grupa (postoji konačan skup A takav da je $g_p(A) = G$). Tada je $\mathbb{G}$ homomorfna slika neke slobodne grupe.*

Primer 2.62 *Pronađimo slobodnu grupu, čija je homomorfna slika $\mathbb{S}_n$, gde je n bilo koji zadat pozitivan broj.*

Posmatrajmo slobodnu grupu F, i neka je F slobodno generisana skupom A, gde je $|A| = n!$. Neka je preslikavanje φ takvo da $\varphi : A \to S_n$, gde φ slika svaki element od A na različit element S_n. Tada po tvrđenju 2.48 sledi da postoji homomorfizam $\overline{\varphi} : F \to S_n$, koji je ekstenzija preslikavanja φ, tj. $\overline{\varphi}|_A = \varphi$.

Tvrđenje 2.63 *Slobodna grupa, slobodno generisana sa n elemenata, gde je n bilo koji pozitivan ceo broj, ima podgrupu indeksa m, za svaki pozitivan ceo broj m.*

Dokaz. Neka je $\mathbb{C}_m$, ciklična grupa reda m i neka je generisana, recimo sa elementom x. Neka je F slobodno generisana sa skupom $A = \{a_1, ..., a_n\}$. Tada, postoji homomorfizam $\varphi : F \to C_m$, dat sa $\varphi(a_i) := x$, $i \in \{1, ...n\}$. Prema teoremi o izomorfizmu, sledi da je $F/Ker(\varphi) \cong \mathbb{C}_m$. Kako je $|C_m| = m$, sledi da je broj koseta $Ker(\varphi)$ u F jednak m. Sledi, F ima podgupu indeksa m. □

Za kraj, dajemo još jedan način definisanja prezentacije grupe. U tvrđenju 2.48 videli smo da ako je F slobodna grupa, slobodno generisana skupom A, tada za svaku grupu $\mathbb{G}$ i za svako preslikavanje $\varphi : A \to G$ postoji homomorfizam $\overline{\varphi} \in Hom(F, \mathbb{G})$ i važi da je $\overline{\varphi}|_A = \varphi$. Ova teorema nam omogućava da odredimo prezentaciju date grupe koristeći svojstva slobodnih grupa.

Definicija 2.64 *Neka je $\mathbb{G} = (G, \cdot)$ grupa i neka je $S \subseteq G$.* ***Normalno zatvorenje*** *od S je presek svih normalnih podgrupa grupe $\mathbb{G}$ koje sadrže S.*

Normalno zatvorenje od S je normalna podgrupa grupe $\mathbb{G}$ koja sadrži S. U ovom radu, normalno zatvorenje od S nazivamo **normalna podgrupa grupe $\mathbb{G}$ generisana skupom S**.

Definicija 2.65 ***Prezentacija*** *je par $(A; P)$, gde je A skup slobodnih generatora slobodne grupe F, dok je $P \subseteq F$. Grupa čija je prezentacija $(A; P)$ je $F/\mathbb{N}$, gde je $\mathbb{N}$ normalna podgrupa grupe F generisana skupom P. Prezentacija ma koje grupe $\mathbb{G}$, sastoji se iz prezentacije $(A; P)$ i izomorfizma $\phi \in Is(F/\mathbb{N}, \mathbb{G})$.*

Primer 2.66 *Neka je F slobodna grupa slobodno generisana skupom $A = \{a, b\}$. Pitamo se: Koja grupa ima sledeću prezentaciju?*

$$(a, b; a^2b^2,\ a^3b^3,\ a^4b^4, ...)$$

Neka je $\mathbb{N}$ normalna podgrupa grupe F generisana skupom $\{a^2b^2, a^3b^3, a^4b^4, ...\}$. Interesuje nas grupa $F/\mathbb{N}$.

Poznato je da $a^2b^2 \in N$, pa sledi $a^2N = b^{-2}N$. Slično, iz $a^3b^3 \in N$ sledi $a^3N = b^{-3}N$. Možemo zaključiti da tada važi sledeća jednakost: $a^3N = a^2aN = b^{-2}aN = b^{-3}N$. Primenom kancelacije sa $b^{-2}N$ sledi da je $aN = b^{-1}N$, odakle direktno sledi da $ab \in N$. Želimo da dokažemo da je $\mathbb{N}$ normalna podgrupa generisana sa ab. Neka je $\mathbb{K}$ normalna podgrupa grupe F generisana sa ab. Dokažimo da je $\mathbb{K} = \mathbb{N}$

- Kako je $ab \in N$ sledi da je $K \subseteq N$;
- Primetimo da važi $aK = b^{-1}K$. Tada je

$$a^i b^i K = (a^i K)(b^i K) = (b^{-i}K)(b^i K) = K,\ i \in \{2, 3, ...\}$$

Sledi da $a^i b^i \in K$, $i \in \{2, 3, ...\}$, te je $N \subseteq K$, pa je $\mathbb{K} = \mathbb{N}$.

Grupa $F/\mathbb{N}$ je tada ciklična grupa, jer je generisana sa aN i bN. Štaviše, grupa $F/\mathbb{N}$ je beskonačna ciklična grupa. Da bi ovo pokazali, pretpostavimo da je $\mathbb{G}$ beskonačna ciklična grupa generisana elementom $\{g\}$. Neka je $\varphi : \{a, b\} \to G$, definisano sa:

$$\varphi(a) = g,\ \varphi(b) = g^{-1}$$

Neka je $\overline{\varphi} : F \to G$ ekstenzija homomorfizma φ definisana kao u Tvrđenju 2.48. Trivijalno, preslikavanje $\overline{\varphi}$ je "na" i važi $\overline{\varphi}(ab) = I_G$, gde je I_G neutralni element grupe $\mathbb{G}$. Ako je $Ker(\overline{\varphi})$ jezgro homomorfizma $\overline{\varphi}$, tada važi da je $N \subseteq Ker(\overline{\varphi})$. Iz prve teoreme o izomorfizmu sledi da je tada $F/\mathbb{K}er(\overline{\varphi}) \cong \mathbb{G}$, te je $F/\mathbb{K}er(\overline{\varphi})$ beskonačna ciklična grupa. Sledi da je i $F/\mathbb{N}$ takođe beskonačna ciklična grupa. (Važi i da je $\mathbb{N} = \mathbb{K}er(\overline{\varphi})$, no to nam nije trebalo u ovom dokazu).

Glava 3

Kejlijevi grafovi grupa

3.1 Šta je Kejlijev graf grupe?

Teorija grupa i grafova, naizgled, deluju kao dve potpuno različite grane matematike. Svaka sa svojim svojstvenim jezikom i strukturom - bave se problemima koji, čini se, nemaju ništa zajedničko. Jedan od pojmova koji pokazuje koliko su ove dve oblasti ipak povezane, jeste pojam Kejlijevog grafa grupe. Intuitivno, nije teško zamisliti način na koji od date grupe možemo konstruisati graf. Čvorovi grafa bi bili elementi grupe, a usmerenu granu crtamo između čvora g i gh, za svaki generatorni element h.

Kao rezultat, Kejlijev graf nam daje vizuelni prikaz grupe. Prednosti ovog načina prikazivanja grupe su brojne. Pored toga što apstraktne strukture sada možemo "nacrtati", mnoga svojstva i osobine grupe sada su uočljivije iz njenog Kejlijevog grafa. Veliki broj teorema iz teorije grupa se na jednostavniji način dokazuju primenom Kejlijevog grafa grupe.

Grafove grupa prvi je predstavio Artur Kejli 1878. godine. Kejli je pokazao da struktura grupe zavisi samo od načina na koji data binarna operacija deluje na parove elemenata u domenu posmatrane grupe. Jedno od prvih istraživanja o ovim, kasnije nazvanim, Kejlijevim grafovima može se pročitati u Maškeovom[1] radu iz 1896. godine.

Artur Kejli rodjen je 1821. godine u Ričmondu (London). Prvih sedam godina života provodi u Sankt Peterburgu (Rusija) gde je imao dodira sa tri jezika: engleskim, ruskim i francuskim. Godine 1828. Kejli se zajedno sa porodicom seli nazad u London. Kejli sa 14 godina postaje đak King koledža[2] (London), gde pokazuje talenat prema matematici kao i ostalim prirodnim naukama. Sa 17 godina počinje studije na Kembridžu (Triniti koledž)[3], gde je studirao matematiku i jezike, pokazujući izvanredne rezultate na oba polja. Diplomirao je 1842. godine sa najvećim ocenama i iste godine osvaja svoju prvu Smitovu nagradu. Naredne četiri godine Kejli je predavao na Kembridžu i tokom tog perioda objavio je 28 radova u njihovom matematičkom časopisu[4]. Nakon završenog četvorogodišnjeg staža na Kembridžu, 1846. godine Kejli upisuje studije prava. Tokom 14 godina rada u ovoj struci Kejli je objavio oko 250

[1]Heinrich Maschke, 1853 - 1908

[2]King's College School, Cambridge - srednja škola osnovana 1441. godine

[3]Trinity College Cambridge - osnovano od strane Henrija VIII 1546. godine

[4]Cambridge Mathematical Journal

matematičkih radova. Godine 1863. prihvata posao profesora teorijske matematike na Kembridžu i iste godine ženi se sa Suzan Molin[5] sa kojom je imao dvoje dece. Značajan doprinos dao je algebarskoj teoriji krivih i površi, teoriji grupa, linearnoj algebri, teoriji grafova i teoriji matrica. Medju njegovim najpoznatijim radovima je serija "Memoirs of Quantics" (1854-78). Objavio je približno oko 900 radova u kojima je pokrio skoro svaki deo moderne matematike, i samo jednu knjigu "An Elementary Treatise on Elliptic Functions" 1876. godine. Godine 1883. Kejli postaje predsednik tzv. BMA[6].

Spomenimo još da je Kejli izabran za člana "Royal Society" 1852. godine, a 1872. postaje počasni član Triniti koledža. Društvo matematičara Londona nagrađuje ga De Morganovom medaljom 1884. godine. Nakon duže borbe sa bolesti, Kejli je preminuo u svom domu 1895. godine.

Kejlijevi grafovi grupa intenzivno su proučavani i dobijeni su veoma interesantni i korisni rezultati. Izgleda da teorija grupa i grafova ipak imaju veoma plodonosnu interakciju!

Krećemo od definicije Kejlijevog grafa, u slučaju kad je graf usmeren (digraf) i neusmeren. Kako bi bolje razumeli definiciju, dajemo primere Kejlijevih grafova nekih od najpoznatijih grupa. Za datu grupu $\mathbb{G}$, detaljnije se upoznajemo sa osobinama koje ima odgovarajući Kejlijev graf pridružen posmatranoj grupi. Važno je naglasiti da nije svaki graf Γ Kejlijev graf neke grupe.

Prirodan način proučavanja strukture grafa je preko njegovih automorfizama, te bitan deo ove glave čine automorfizmi grafa Γ. Prva knjiga iz teorije grafova objavljena je 1936. godine od strane mađarskog matematičara Keniga[7]. U njoj je postavljen problem: **Pronaći sve konačne grupe $\mathbb{G}$, za koje postoji graf Γ takav da je** $Aut(\Gamma) \cong \mathbb{G}$. Rešio ga je Fruht[8] 1938. dokazavši da svaka konačna grupa ima to svojstvo. U ovoj glavi dajemo taj dokaz.

Dalje, definišemo pojam dejstva grupe na graf. Posebno nas zanimaju tranzitivna i regularna dejstva. Dobijamo da za Kejlijeve grafove važi tvrđenje: *Svaki Kejlijev graf je čvorno tranzitivan!* Obratno ne mora da važi! Ključno tvrđenje ove glave je teorema Sabidusija[9], koja daje potreban i dovoljan uslov da orijentisani graf (digraf) bude Kejlijev graf neke grupe. Poznavanje regularnog dejstva grupe na graf od fundamentalnog je značaja za grafički regularnu reprezentaciju te grupe i na kraju ove glave videćemo neke poznate rezultate o grafički regularnoj reprezentaciji grupe.

3.2 Kejlijev graf grupe - definicija i osobine

Posmatrajmo grupu rotacija jednakostraničnog trougla u ravni. Tablica množenja ove grupe je

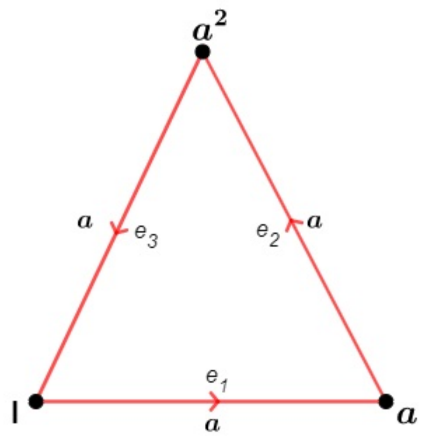
	I	a	a^2
I	I	a	a^2
a	a	a^2	I
a^2	a^2	I	a

[5]Susan Moline, 1831 - 1923
[6]British Association for the Advancement of Science
[7]Dénes König, 1884 - 1944
[8]Robert Frucht, 1906 - 1997
[9]Gert Sabidussi, 1929 -

Nije teško primetiti da je generatorni element ove grupe, a - *rotacija trougla za* $120°$ *u pozitivnom smeru.* Kako važi da je $a^3 = I$, ova grupa je ciklična grupa reda 3. Kao što smo već spomenuli na početku ove glave, graf grupe intuitivno zamišljamo kao geometrijsku sliku u ravni, gde čvorovi odgovaraju elementima grupe, a orijentisanu granu crtamo između čvorova g i gh, za svaki generatorni element h. Dakle, graf ciklične grupe $\mathbb{C}_3$ kao skup čvorova ima skup $\{I, a, a^2\}$, dok skup grana čine sledeće grane:

$I \cdot a = a$, sledi da čvorove I i a povezujemo granom e_1;
$a \cdot a = a^2$, sledi da čvorove a i a^2 povezujemo granom e_2;
$a^2 \cdot a = I$, sledi da čvorove a^2 i I povezujemo granom e_3.

Dakle, skup grana je skup $\{e_1, e_2, e_3\}$. Kako su i skup čvorova i skup grana troelementni skupovi, prirodno se javlja pomisao da bi graf ove grupe mogao da se prikaže u obliku trougla, kao što je prikazano na slici:



Svakoj stranici trougla dodeljen je smer, označen strelicom. Kretanje u smeru strelice, odgovara množenju zdesna elementom a, dok kretanje u suprotnom smeru odgovara množenju zdesna sa inverzom, tj. sa elementom a^{-1}. Na datoj slici, posmatrajmo proizvode

$$a, aaa^{-1}, a^{-1}aaa^{-1}a$$

Očigledno je da ova tri proizvoda predstavljaju isti element grupe, element a. Svaki konačan niz generatora i njihovih inverza naziva se **reč**. Kako svaki element grupe može biti prikazan kao reč, i to na više načina, možemo zaključiti da prikaz elementa grupe u obliku reči nije jedinstven. Ako je x element posmatrane ciklične grupe $\mathbb{C}_3$, tada svaku reč koja definiše element x možemo tumačiti kao kretanje po grafu grupe $\mathbb{C}_3$. Dakle, svakoj reči odgovara izvesni redosled pomeranja duž usmerenih grana (stranica) grafa, ali i obrnuto: svakoj stazi sa početkom u elementu (čvoru) I, odgovara jedna reč.

Definicija 3.1 *Neka je* $\mathbb{G}$ *ma koja konačna, netrivijalna grupa i neka je* $\Omega = \{c_1, ..., c_k\}$ *generatorni skup grupe* $\mathbb{G}$.

Kejlijev obojeni digraf grupe $\mathbb{G}$, $D = Cay(G, \Omega)$***, u odnosu na generatorni skup*** Ω *je prost digraf, čiji je skup čvorova i grana definisan sa:*
$V(D) := G$,
$E(D) := \{(g, h) | \, g, h \in V(\Gamma) \,\&\, (\exists c_i \in \Omega) \, gc_i = h\}$.
Ako za $g, h \in V(\Gamma)$, $c_i \in \Omega$, $i \in \{1, ..., k\}$, *važi* $gc_i = h$, *kažemo da je grani* (g, h) *dodeljena boja* c_i.

Dakle, skup generatora Ω grupe $\mathbb{G}$ je skup boja kojim bojimo (ili obeležavamo) grane Kejlijevog digrafa.

Napomena 3.2 *Ponekad umesto obeležavanja grana dajemo prikaz obojenog digrafa, gde grane imaju baš prave boje. Dajemo i primere Kejlijevih digrafa gde ćemo grafički razlikovati različite generatorne elemente.*

Ukoliko želimo da zanemarimo usmerenje svake grane Kejlijevog digrafa, dobijamo Kejlijev graf grupe i definišemo ga na sledeći način:

Definicija 3.3 *Neka je* $\mathbb{G}$ *ma koja konačna grupa, sa neutralnim elementom* I*. Neka je* Ω *generatorni skup grupe* $\mathbb{G}$*, sa osobinama:*

1. $x \in \Omega \implies x^{-1} \in \Omega$;
2. $I \notin \Omega$.

Kejlijev graf grupe $\mathbb{G}$, $\Gamma = Cay(G, \Omega)$***, u odnosu na generatorni skup*** Ω *je prost graf, čiji je skup čvorova i grana definisan sa:*
$V(\Gamma) := G$,
$E(\Gamma) := \{gh | \, g^{-1}h \in \Omega \,\&\, g, h \in V(\Gamma)\}$ *tj.* $h = gc$ *za neki* $c \in \Omega$.

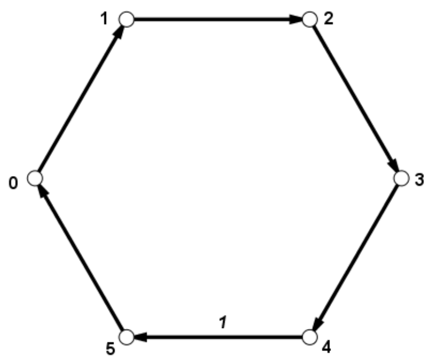
Ovako definisan graf nije usmeren, jer uslov $x \in \Omega \implies x^{-1} \in \Omega$ daje neusmerenost grafa! Kasnije ćemo videti i primere Kejlijevog obojenog grafa, gde grane imaju baš prave boje (različiti generatorni elementi obojeni su različitim bojama). Iz definicije odmah sledi i sledeća teorema:

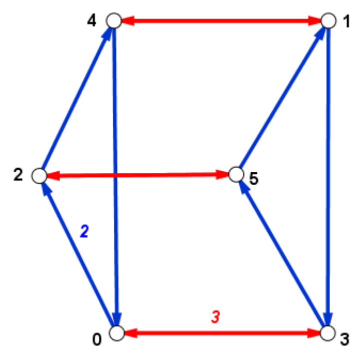
Teorema 3.4 *Kejlijev graf grupe* $\mathbb{G}$ *u odnosu na generatorni skup* Ω, $\Gamma = Cay(G, \Omega)$, *je povezan graf.*

Dokaz. Neka su x i y dva različita elementa grupe $\mathbb{G}$. Tada znamo da postoji element $g \in G$, $g = x^{-1}y$, takav da je $xg = y$. Neka je ω reč nad Ω koja definiše element $g \in G$. Prisetimo se, svaki element grupe može biti prikazan kao reč i to na više načina. Svaku reč možemo posmatrati kao kretanje duž grana grafa Γ, pa zaključujemo da je tada i $x\omega = y$, to jest, kretanje duž grana grafa Γ koje odgovara reči ω vodi od čvora x do čvora y. Sledi da je graf Γ povezan. $\square$

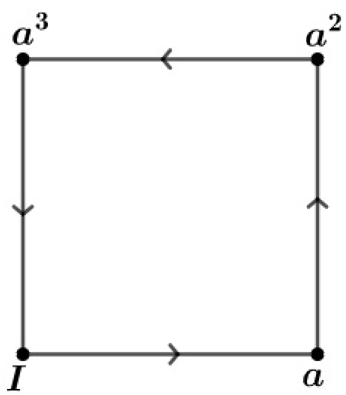
Ukoliko se fokusiramo na analizu osobina grupe preko njenog Kejlijevog grafa sa datim generatornim skupom, prikupljene informacije i osobine grupe mogu biti znatno drugačije ako za istu grupu posmatramo drugi generatorni skup. Drugim rečima, prilikom promene generatornog skupa grupe, menja se i izgled Kejlijevog grafa grupe, kao i odredjene osobine koje mogu važiti za jedan, ali ne i za drugi Kejlijev graf, iako je posmatrana grupa ostala ista.

Primer 3.5 *Posmatramo grupu* $\mathbb{Z}_6$ *i njena dva generatorna skupa. Na prvoj slici vidimo Kejlijev neobojeni digraf u odnosu na generatorni skup* $\Omega = \{1\}$*, dok je na drugoj slici Kejlijev obojeni digraf u odnosu na* $\Omega = \{2, 3\}$*. Promenom generatornog skupa menja se i udaljenost izmedju čvorova, broj kontura, itd.*

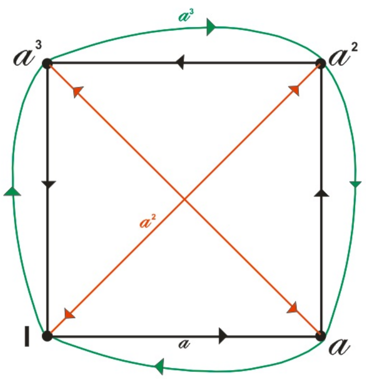




Primer 3.6 *Konstruišimo Kejlijev digraf grupe* $\mathbb{C}_4$ *kada je generatorni skup sastavljen iz jednog ili iz tri elementa.*



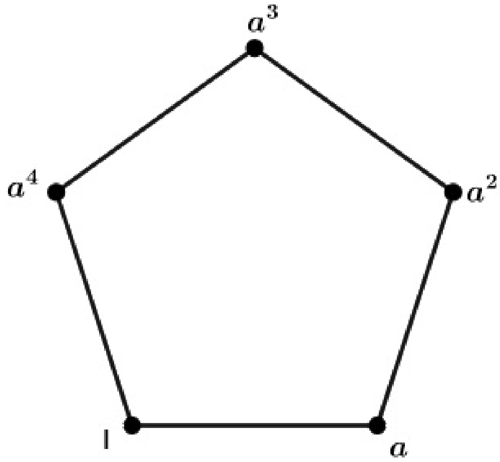
Slika 3.1: Generatorni skup je $\Omega = \{a\}$



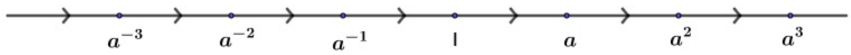
Slika 3.2: Generatorni skup je $\Omega = \{a, a^2, a^3\}$

Slede primeri Kejlijevih grafova za neke od najpoznatijih grupa:

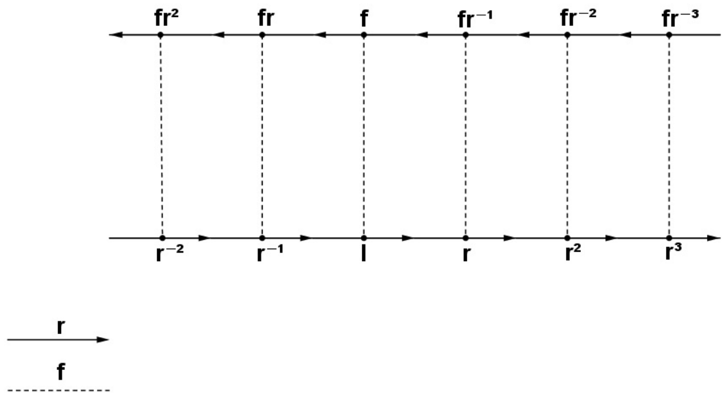
Primer 3.7 *Kejlijev graf ciklične grupe* $\mathbb{C}_5$*, date prezentacijom* $(a;\, a^5)$ *u odnosu na generatorni skup* $\{a\}$*.*



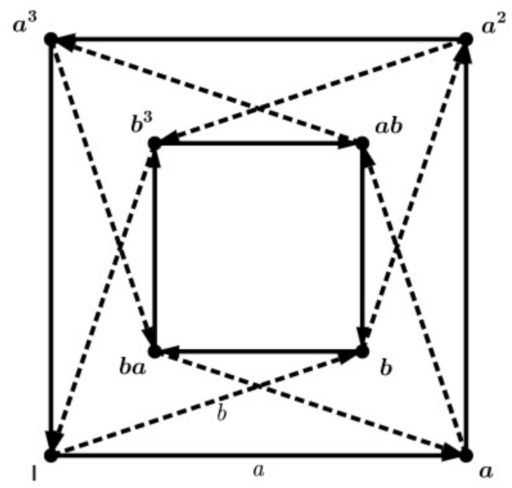
Primer 3.8 *Kejlijev digraf beskonačne ciklične grupe $\mathbb{C}_\infty$, koja je generisana elementom $\{a\}$.*



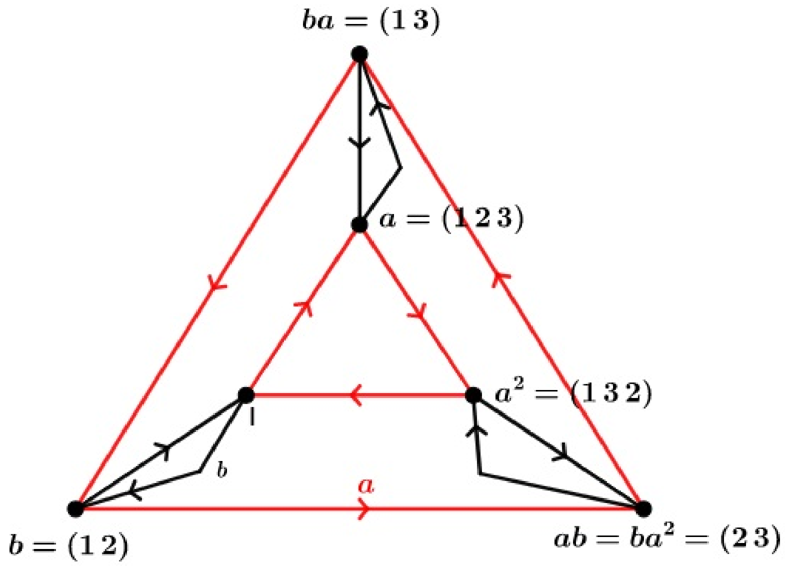
Primer 3.9 *Kejlijev digraf beskonačne dijedarske grupe $\mathbb{D}_\infty$, date prezentacijom $(f, r; f^2, (fr)^2)$, u odnosu na generatorni skup $\{f, r\}$.*



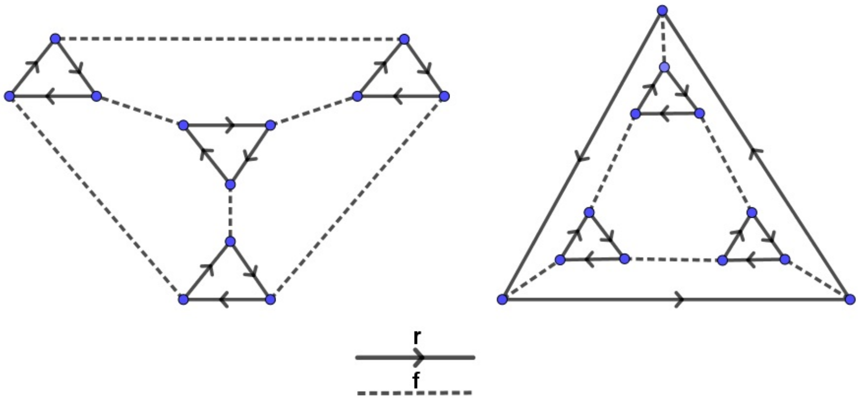
Primer 3.10 *Kejlijev digraf grupe kvaterniona, date prezentacijom $(a, b; a^4, b^4, (ab)^4)$ u odnosu na generatorni skup $\{a, b\}$.*



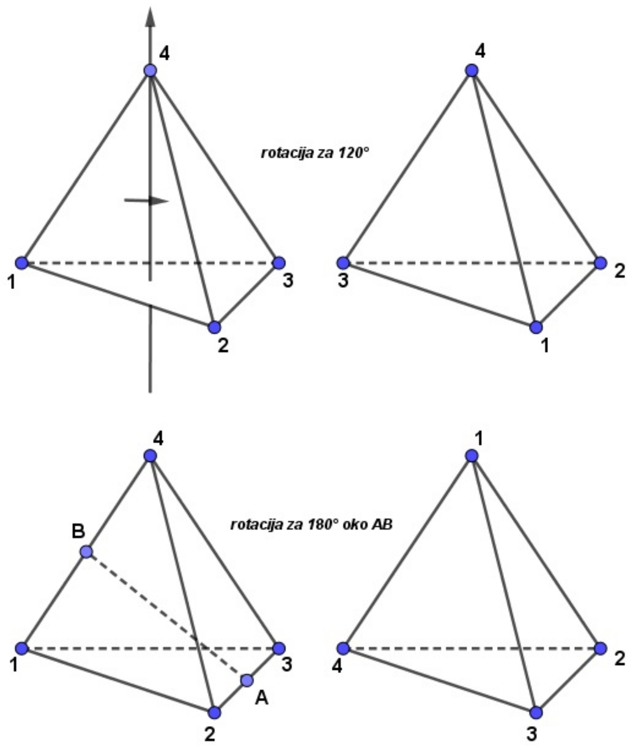
Primer 3.11 *Kejlijev obojen digraf simetrične grupe* $\mathbb{S}_3$*, date prezentacijom* $(a, b; a^3, b^2, (ab)^2)$*u odnosu na generatorni skup* $\{a, b\}$.



Primer 3.12 *Kejlijev digraf alternirajuće grupe* $\mathbb{A}_4$*, koja je data prezentacijom* $(r, f; r^3, f^2, (rf)^3)$.



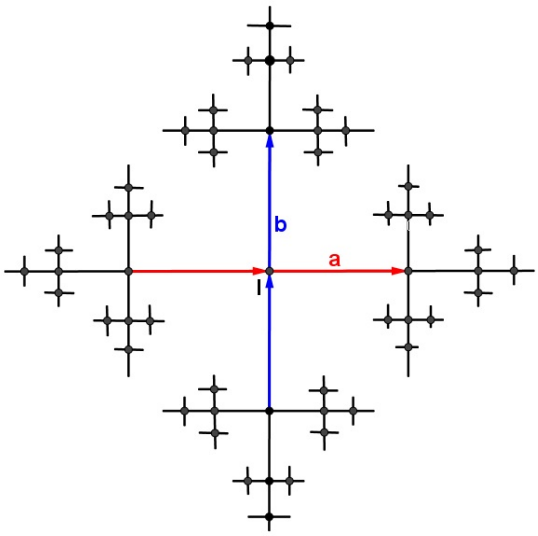
Na slici možemo videti dva načina dvodimenzionalnog prikaza grupe $\mathbb{A}_4$. Alternirajuća grupa $\mathbb{A}_4$ poznata je i kao grupa izometrija tetraedra. Naime, trouglovi na slici odgovaraju rotacijama oko fiksnog vrha tetraedra, dok su grane koje spajaju bilo koja dva trougla (isprekidanom linijom) rotacija oko medijane tetraedra. Generatorni elementi grupe su r - rotacija oko visine tetraedra za $120°$ i f - rotacija za $180°$ oko AB, što možemo i videti na narednoj slici.



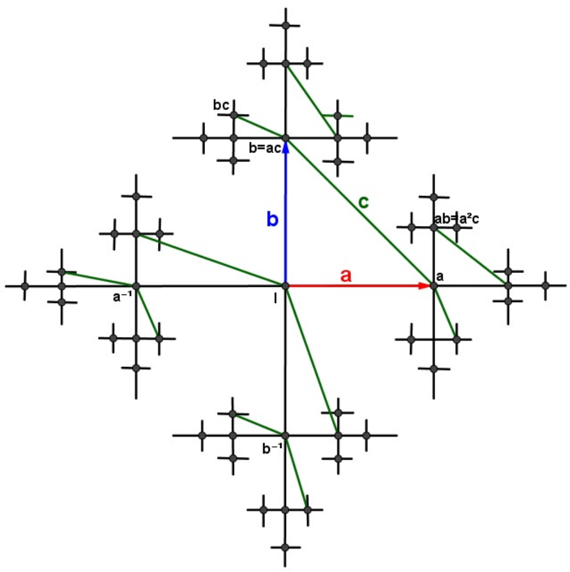
Lako se primeti da generatorne elemente r i f možemo zapisati kao proizvod dve transpozicije, tj. $r = (1\,2)(1\,3)$, $f = (1\,4)(2\,3)$. Detaljnije o grupi izometrija pravilnog tetraedra $\mathbb{A}_4$ može se pročitati u knjizi [1].

Primer 3.13 *Kejlijev digraf slobodne grupe*

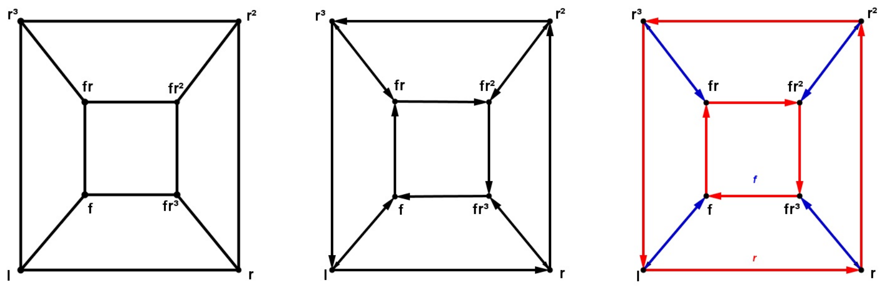
- *sa 2 generatorna elementa:*



- *sa 3 generatorna elementa:*



Primer 3.14 *U zavisnosti da li su grane grafa usmerene i obojene, na slici vidimo tri varijacije Kejlijevog grafa dijedarske grupe* $\mathbb{D}_4$*, koja je data prezentacijom* $(f, r; r^4, f^2, (rf)^2)$*. To su redom, Kejlijev graf, Kejlijev neobojen digraf i Kejlijev obojen digraf grupe* $\mathbb{D}_4$*. Napomenimo još da je svaki graf na slici nacrtan u odnosu na generatorni skup* $\{f, r\}$*.*



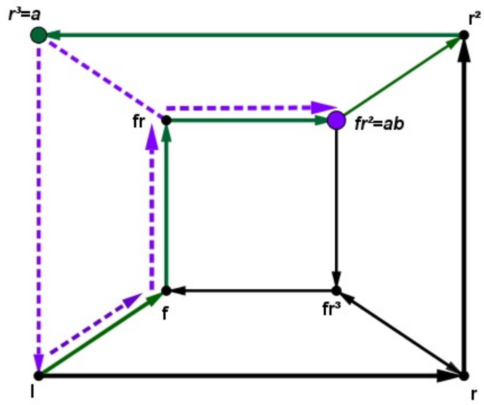
Iz datih primera možemo uočiti neke od osnovnih karakteristika koje važe i u slučaju Kejlijevog grafa i digrafa grupe: Broj čvorova Kejlijevog grafa jednak je broju elemenata grupe - svakom čvoru grafa pridružen je tačno jedan element grupe, i obrnuto. Svakoj reči koja definiše neutralni element grupe, odgovara zatvorena staza grafa. Neka je ω reč kojom je predstavljen neutralni element. Ako je početna tačka čvor I, tada se staza koja odgovara ω završava baš u čvoru I. Ako je početna tačka čvor $t \neq I$, onda se staza koja odgovara ω završava u čvoru t, jer je $t\omega = t$.

Množenje dva elementa grupe odgovara pomeranju duž staze koja je sastavljena od dve staze u nizu. Na primer, proizvod $rs = t$ predstavljamo preko staze na grafu na sledeći način: Prvo, predstavimo elemente r i s kao proizvode generatora grupe i njihovih inverza. Dalje, iz vrha koji odgovara neutralnom elementu grupe, pratimo stazu koja odgovara elementu r. Završna tačka te staze odgovara elementu r. Zatim, iz tog čvora pratimo stazu koja odgovara elementu s. Završna tačka te staze odgovara elementu $t = rs$, bez obzira koje smo reči upotrebili kao predstavljanje r i s.

Primer 3.15 *Posmatrajmo grupu* $\mathbb{D}_4$ *datu prezentacijom* $(f, r; r^4, f^2, (rf)^2)$*. Na primeru ove grupe objasnićemo kako se množenje dva elementa grupe tumači preko Kejlijevog grafa date grupe. Kejlijeva tablica date grupe je*

$\circ$	I	r	r^2	r^3	f	fr	fr^2	fr^3
I	I	r	r^2	r^3	f	fr	fr^2	fr^3
r	r	r^2	r^3	I	fr^3	f	fr	fr^2
r^2	r^2	r^3	I	r	fr^2	fr^3	f	fr
r^3	r^3	I	r	r^2	fr	fr^2	fr^3	f
f	f	fr	fr^2	fr^3	I	r	r^2	r^3
fr	fr	fr^2	fr^3	f	r^3	I	r	r^2
fr^2	fr^2	fr^3	f	fr	r^2	r^3	I	r
fr^3	fr^3	f	fr	fr^2	r	r^2	r^3	I

Neka je $a := frrfr$ i $b := rfrffr$. Jednostavnom proverom iz tablice, dobijamo da je $a = r^3$ i $b = fr$. Dakle, a i b su dva različita elementa dijedarske grupe $\mathbb{D}_4$, predstavljeni preko generatornih elemenata i njihovih inverza. Koristeći Kejlijevu tablicu, lako se uoči da je $a \cdot b = r^3 \cdot fr = fr^2$. Sada, traženi proizvod dobijamo koristeći Kejlijev graf posmatrane grupe. Sa početkom u čvoru koji odgovara neutralnom elementu grupe I, zelenom bojom pratimo niz generatornih elemenata koji daju element a. Zatim, sa početkom u završnom čvoru elementa a, ljubičastom isprekidanom linijom nastavlja se niz generatora koji daju element b. Završni čvor ove putanje jeste čvor $fr^2 = a \cdot b$.

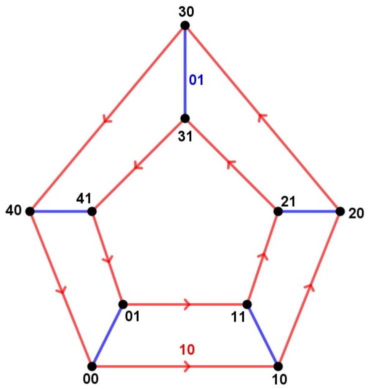


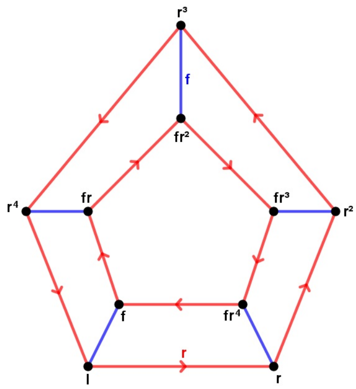
Primer 3.16 *Dokažimo da je svaka kontura dužine n Kejlijev graf.*

Kada je $n = 3$, u pitanju je trougao, i kao što smo već videli on odgovara Kejlijevom grafu ciklične grupe $\mathbb{C}_3$. Generatorni element grupe $\mathbb{C}_3$ je rotacija jednakostraničnog trougla u ravni za $120°$, u pozitivnom smeru. Za $n = 4$, odgovarajući graf ima oblik kvadrata i predstavlja Kejlijev graf ciklične grupe $\mathbb{C}_4$, koja je generisana rotacijom kvadrata u ravni za $90°$, u pozitivnom smeru. Kontura sa n čvorova je Kejlijev graf ciklične grupe $\mathbb{C}_n$ i predstavlja rotacije tog n-tougla u ravni za ugao $\frac{2\pi}{n}$, u pozitivnom smeru.

Primer 3.17 *Nacrtajmo Kejlijev digraf grupe $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_2$, u odnosu na generatorni skup $\{10, 01\}$. Uporedimo taj Kejlijev digraf sa Kejlijevim digrafom dijedarske grupe $\mathbb{D}_5$, u odnosu na generatorni skup $\{r, f\}$. Podsetimo se da je dijedarska grupa $\mathbb{D}_5$ data prezentacijom $(r, f; r^5, f^2, (rf)^2)$.*

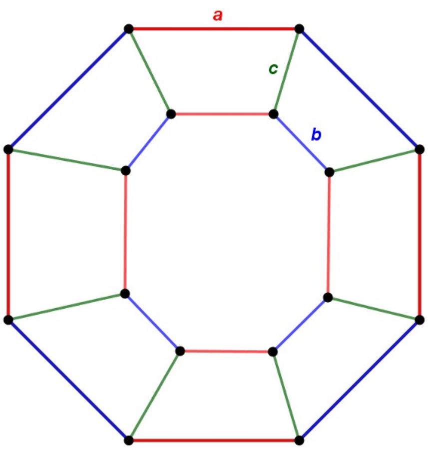
Kejlijev digraf za grupu $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_2$ i za grupu $\mathbb{D}_5$, redom, dat je na narednoj slici.





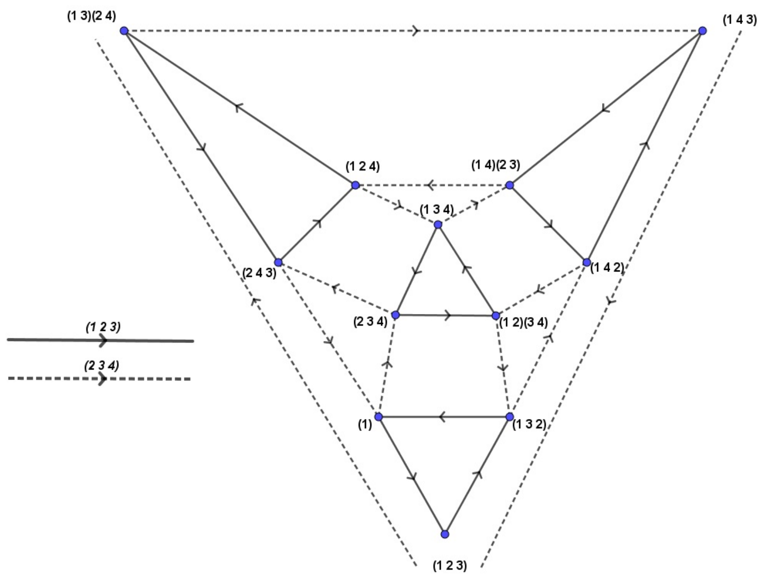
Neka je $a := 10$ i $b := 01$. Tada je $(ab)^2 = 20 \neq 00$, pa je prva razlika u skupu odrednica. Kod grupe D_5 jedna od odrednica je $(rf)^2$, a kod grupe $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_2$ takav proizvod generatornih elemenata ne daje neutralni element grupe. Dalje, grupa $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_2$ je direktan proizvod dve Abelove grupe, te je Abelova, dok dijedarska grupa D_5 nije Abelova. Naime, ako na Kejlijevom digrafu grupe D_5 posmatramo sledeće proizvode $fr^4f = r$ i $ffr^4 = r^4$, odmah zaključujemo da grupa nije Abelova.

Primer 3.18 *Kejlijev obojeni graf grupe* $\mathbb{G}$ *koja ima prezentaciju* $(a, b, c; a^2, b^2, (ab)^4, ac = ca, bc = cb)$ *izgleda ovako:*



Primetimo da je grupa $\mathbb{G}$ *izomorfna direktnom proizvodu grupe simetrija kvadrata i ciklične grupe reda 2.*

Primer 3.19 *Prvi objavljen Kejlijev digraf koji se pojavljuje u Kejlijevom radu, bio je graf grupe* $\mathbb{A}_4$ *u odnosu na generatorni skup* $\{(1\,2\,3), (2\,3\,4)\}$*, koji možemo videti na narednoj slici:*

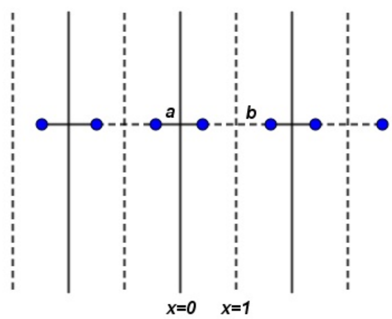


3.3 Kejlijevi grafovi i problem reči

Brojna pitanja koja se pojavljuju prilikom izučavanja teorije grupa su takozvane "jezičke" prirode. Najpoznatiji primer je Denov problem reči, objavljen 1912. godine i glasi: *Za datu grupu $\mathbb{G}$ i njen konačan generatorni skup Ω, da li je moguće odlučiti koje reči azbuke $W := \Omega \cup \Omega^{-1}$ definišu neutralni element grupe?*

Ponekad je ovaj problem lako rešiv. Ako posmatramo grupu $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}$, generisanu sa $a = (1, 0)$ i $b = (0, 1)$, tada reči nad skupom $\{a, b, a^{-1}, b^{-1}\}$ koje definišu neutralni element su tačno one reči kod kojih je suma svih eksponenata a i suma svih eksponenata b nula.

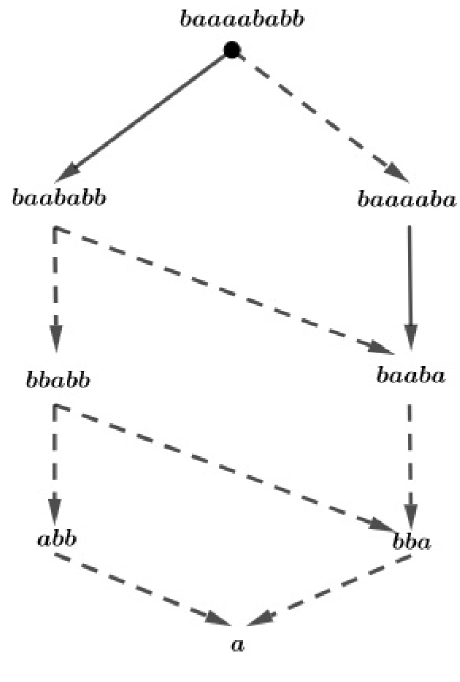
Nešto komplikovaniji slučaj je za dijedarsku grupu $\mathbb{D}_\infty$. Grupa $\mathbf{D}_\infty$ generisana je sa dvema paralelnim osnim simetrijama a i b. Osa simetrije preslikavanja a je prava $x = 0$, dok je osa simetrije za b prava $x = 1$, što vidimo na sledećoj slici.



Tvrđenje 3.20 *Neka je* $\mathbf{D}_\infty$ *grupa generisana osnim simetrijama* a *i* b*, gde* a *fiksira* $x = 0$*, a* b *fiksira* $x = 1$*. Tada se svaki element grupe* $\mathbf{D}_\infty$ *može predstaviti kao proizvod osnih simetrija* a *i* b*. Odnosno, za* $n \in N$ *važi:*

1. *Element* $\underbrace{abab...abab}_{2n} = (ab)^n$ *je horizontalna translacija data sa* $(x, y) \to (x - 2n, y)$*;*
2. *Element* $\underbrace{baba...baba}_{2n} = (ba)^n$ *je horizontalna translacija data sa* $(x, y) \to (x + 2n, y)$*;*
3. *Element* $\underbrace{baba...abab}_{2n-1} = (ba)^{n-1}b$ *je osna simetrija koja fiksira pravu* $x = n$*;*
4. *Element* $\underbrace{abab...baba}_{2n+1} = (ab)^n a$ *je osna simetrija koja fiksira pravu* $x = -n$*.*

Kako su posmatrane osne simetrije same sebi inverzne, posmatramo sve reči nad skupom $\{a, b\}$. Za zadatu takvu reč možemo primenjivati naredno pravilo: *Ako* $\omega \in \{a, b\}$ *sadrži podreč oblika aa ili bb, tada izbaciti tu podreč, i tako dobijamo novu reč* ω"*.* Nova reč ω" ista je kao početna reč ω, pa je dovoljno proveriti da li je $\overline{\varphi}(\omega") = I$. Svaka reč koja se dobija primenom ovog pravila je ekvivalentna sa ω, u smislu da je njena slika preslikavanjem $\overline{\varphi}$ ili prazna reč ili proizvod osnih simetrija a i b. Za posmatrani proizvod preslikavanja *baaaababb* postoji nekoliko načina primene ovog pravila, kao što vidimo na slici. Svaka reč koju dobijamo ovim procesom je ekvivalentna sa ω i kao rezultat dobijamo reč koja je ili prazna ili sastavljena od elemenata a i b.



Iz tvrđenja 3.20 možemo zaključiti da proizvodi osnih simetrija a i b ne definišu neutralni element grupe $\mathbb{D}_\infty$. Dakle, reč ω definiše neutralni element grupe ako i samo ako primenom gore navedenog pravila ω definiše praznu reč.

Poznata je i još jedna varijanta Denovog problema reči: *Za datu grupu $\mathbb{G}$, njen generatorni skup Ω i reči $\omega, \omega" \in \Omega \cup \Omega^{-1}$, da li se može utvrditi da li ω i $\omega"$ definišu isti element grupe?* Tj. da li je $\overline{\varphi}(\omega) = \overline{\varphi}(\omega")$? Ovaj problem poznat je i pod nazivom **problem jednakosti**.

Teorema 3.21 *Za datu grupu $\mathbb{G}$ i njen generatorni skup Ω, problem jednakosti je rešiv ako i samo ako je rešiv problem reči.*

Dokaz. Kako prazna reč definiše neutralni element grupe, ako možemo rešiti problem jednakosti, onda se može odlučiti kada zadata reč ω, definiše isti element kao i prazna reč, odnosno može se rešiti problem reči.

Obratno, ω i $\omega"$ definišu isti element grupe $\mathbb{G}$ ako i samo ako $\omega" \cdot \omega^{-1}$ definiše neutralni element. Tj. ako se može rešiti problem jednakosti. □

Neka je $\Gamma = Cay(\mathbb{G}, \Omega)$ i neka je ω proizvoljna reč azbuke $\Omega \cup \Omega^{-1}$. Svakoj reči ω koja je konačan niz generatora i njihovih inverza, možemo pridružiti odgovarajući put u grafu Γ. Put počinje u čvoru koji odgovara neutralnom elementu grupe I i prati grane grafa koje su obeležene generatornim elementima i njihovim inverzima, kojima je reč ω predstavljena. Put koji je pridružen reči ω obeležavamo sa P_ω. Možemo zaključiti da postoji "1-1" korespodencija između konačnih puteva u grafu Γ koji počinju u čvoru I i reči azbuke $\Omega \cup \Omega^{-1}$. Denov problem reči tada možemo formulisati na sledeći način:

Teorema 3.22 *Za datu grupu $\mathbb{G}$ i njen generatorni skup Ω, problem reči je rešiv ako i samo ako se može utvrditi koje reči ω azbuke $\Omega \cup \Omega^{-1}$ odgovaraju zatvorenim putevima P_ω u Kejlijevom grafu $\Gamma = Cay(G, \Omega)$.*

Primer 3.23 *Problem reči za dijedarsku grupu $\mathbb{D}_n$, sa generatornim skupom $\{f, r\}$, gde je f - osna simetrija, a r - rotacija za ugao $2\pi/n$, je rešiv. Reč ω definiše neutralni element grupe akko je kraj puta P_ω u čvoru grafa Γ koji odgovara neutralnom elementu grupe $\mathbb{D}_n$.*

Nakon ovog primera možemo pomisliti da je problem reči rešiv za bilo koju grupu za koju se može konstruisati Kejlijev graf. Kako bi ovo dokazali, uvodimo sledeće pojmove.

Definicija 3.24 *Neka je $\Gamma = (V(\Gamma), E(\Gamma))$ povezan graf.* ***Rastojanje između čvorova*** *u* ***i*** *w je dužina najkraćeg puta od svih puteva koji spajaju čvorove u i w. To ćemo obeležavati sa $\delta(u, w)$.*

Definicija 3.25 *Neka je $\Gamma = (V(\Gamma), E(\Gamma))$ graf. Za fiksiran čvor $v \in V(\Gamma)$ i $n \in N$ definišemo* ***sferu radijusa*** *n* ***centriranu u čvoru*** *v, kao skup čvorova*

$$S(v, n) := \{w \in V(\Gamma) \mid \delta(v, w) = n\}.$$

Definicija 3.26 ***Lopta radijusa*** *n* ***centrirana u čvoru*** *v, u oznaci $B(v, n)$ je podgraf grafa Γ koji sadrži sve puteve grafa Γ koji počinju u čvoru v i dužine su $\leq n$. Čvorovi podgrafa $B(v, n)$ su svi čvorovi sfere $S(v, i)$, $i \leq n$.*

Za Kejlijev graf $\Gamma = Cay(G, \Omega)$, grupe $\mathbb{G}$ koristimo oznake $S(g, n)$ i $B(g, n)$, gde je $g \in G$. Kejlijev graf grupe se može konstruisati ako za svako $n \in N$ u konačno mnogo koraka možemo konstruisati $B(I, n)$.

Teorema 3.27 *Neka je data grupa $\mathbb{G}$ sa generatornim skupom Ω. Problem reči je rešiv ako i samo ako se može konstruisati Kejlijev graf $\Gamma = Cay(G, \Omega)$.*

Dokaz.
$(\leftarrow)$:
Neka je w reč nad azbukom $\Omega \cup \Omega^{-1}$ i $n = |w|$. Konstruišemo podgraf $B(I, n) \subset \Gamma$ i pratimo put P_w unutar lopte B. Poslednji čvor puta P_w je čvor koji odgovara neutralnom elementu grupe I ako i samo ako je $\overline{\varphi}(w) = I \in G$. Sledi da se može rešiti problem reči.
$(\rightarrow)$:
Indukcijom po n dokazujemo da se može konstruisati $B(I, n)$, gde sa I označavamo čvor koji u grafu Γ odgovara neutralnom elementu grupe $\mathbb{G}$.

- $B(I, 0)$ je podgraf koji se sastoji od jednog čvora koji odgovara neutralnom elementu;

- Pretpostavimo da možemo konstruisati $B(I, n)$;

- Konstrukcija $B(I, n+1)$:

  Neka je $|\Omega \cup \Omega^{-1}| = k$. Svaki čvor v iz $V(\Gamma)$ ima tačno k izlaznih grana koje odgovaraju generatornim elementima iz $\Omega \cup \Omega^{-1}$. Posmatrajmo čvor v iz $V(\Gamma)$. Ako $v \in B(I, n-1)$, onda već znamo svih k izlaznih grana čvora v. Neka je $\delta(I, v) = n$ i neka je $L_n(v) \subset \Omega \cup \Omega^{-1}$ i $L_n(v)$ sadrži sve grane incidentne sa v u lopti $B(I, n)$ (tj. $L_n(v)$ sadrži oznake izlaznih grana čvora v koje se vraćaju u $B(I, n)$).

  Pri konstrukciji $B(I, n+1)$ moramo dodati izlaznu granu čvora v obojenu sa s, za svako $s \in (\Omega \cup \Omega^{-1}) \backslash L_n(v)$. Zanima nas pronalazak drugog čvora koji sa čvorom v daje granu obojenu sa s. Primetimo da ni jedna od grana koje nedostaju ne mogu povezivati v sa čvorem iz lopte $B(I, n-1)$. Ako bi se to desilo, tada bi tražena grana bila prisutna u $B(I, n)$, pa bi bila u skupu $L_n(v)$.

  Neka su elementi sfere radijusa n dati sa $S(I, n) := \{v_1, v_2, ..., v_l\}$. Svakom v_i dodelimo reč w_i čiji odgovarajući put u $B(I, n)$ spaja čvor I sa v_i.

  Krećemo od čvora v_1 i navodimo sve elemente skupa $(\Omega \cup \Omega^{-1}) \backslash L_n(v_1) = \{s_1, s_2, ..., s_m\}$. Grane grafa Γ koje su povezane sa v_1 i obojene s_i takodje ne mogu povezivati v_1 sa čvorem iz $B(I, n-1)$, te imamo dva naredna slučaja:

  1. Neka je $s_i \in \{s_1, s_2, ..., s_m\}$. Ako je čvor v_1 povezan granom koja ima boju s_i sa čvorem $v_j \in S(I, n)$ sledi da je tada $\overline{\varphi}(w_1 s_i (w_j)^{-1}) = I \in G$. Ovo možemo proveriti jer je rešiv problem reči;
  2. Ako je $\overline{\varphi}(w_1 s_i (w_j)^{-1}) \neq I$ za svaki v_j sa ruba $S(I, n)$, tada grana sa bojom s_i povezuje v_1 sa novim čvorem koji nije prisutan u $B(I, n)$.

  Pretpostavimo sada, da smo nacrtali sve nove grane koje izlaze iz čvora v_{i-1}, $i > 1$, i sad smo stigli do čvora v_i. Neka je boja nedostajuće grane iz v_i recimo s_j. Imamo tri mogućnosti za krajnji čvor grane obojene sa s_j:

1. Ako je krajnji čvor neki $v_k \in S(I, n)$, tada je $\overline{\varphi}(w_i s_j (w_k)^{-1}) = I \in G$. Ovo možemo proveriti jer je rešiv problem reči;
2. Ako grana obojena sa s_j vodi u neki prethodno konstruisan novi čvor, koji je spojen sa $v_m \in S(I, n)$, gde je $m < i$. Tada je $\overline{\varphi}(w_i s_j (w_m s_t)^{-1}) = I \in G$, gde je $s_t \in \Omega \cup \Omega^{-1}$. Ovo takođe možemo proveriti jer je rešiv problem reči;
3. Krajnji čvor grane obojene sa s_j je čvor iz $S(I, n+1)$ koji nije spojen ni sa jednim od prethodnih čvorova $\{v_1, ..., v_{i-1}\}$. Dakle, docrtavamo novi čvor u $S(I, n+1)$.

Ako nijedan od prva dva slučaja ne daje neutralni element, onda je u pitanju slučaj tri, i novi čvor treba da se doda u formiranju $B(I, n+1)$. Kako je svaki čvor u $B(I, n+1)$ spojen sa čvorem iz $B(I, n)$, proces će se završiti u konačno mnogo koraka.

□

3.4 Automorfizmi Kejlijevih grafova

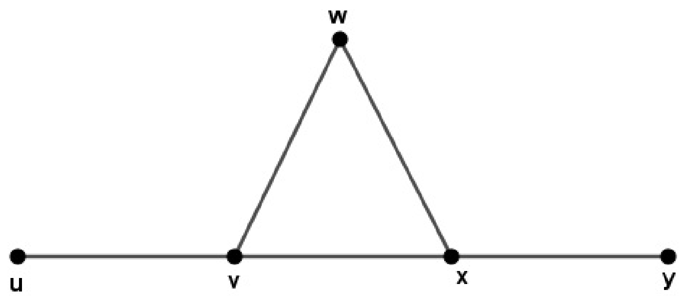
Definicija 3.28 Automorfizam grafa $\Gamma = (V(\Gamma), E(\Gamma))$ *je permutacija* $\alpha : V(\Gamma) \to V(\Gamma)$*, sa osobinom:*

$$uv \in E(\Gamma) \text{ ako i samo ako } \alpha(u)\alpha(v) \in E(\Gamma).$$

Skup svih automorfizama prostog grafa Γ *čini grupu* $\mathbb{A}ut(\Gamma) = (Aut(\Gamma), \circ))$.

Primetimo da domen grupe automorfizama grafa nikad nije prazan skup jer je identičko preslikavanje *id* uvek jedan automorfizam grafa. U slučaju kada je *id* jedini automorfizam grafa, kažemo da graf ima *trivijalnu grupu automorfizama.*

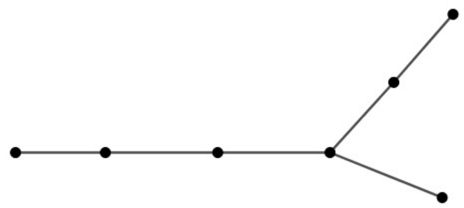
Primer 3.29 *Pronađimo grupu automorfizama za graf* Γ *sa slike.*



Ovaj graf ima dva automorfizma. Jedan je *id*, a drugi možemo zapisati kao permutaciju $\alpha = (u\,y)(v\,x)$. Sledi da je $\mathbb{A}ut(\Gamma) \cong \mathbb{C}_2$.

Postavlja se pitanje koliko velika može biti grupa automorfizama grafa? Posmatrajmo kompletan graf K_n, $n \geq 1$. Svaki čvor grafa povezan je granom sa ostalih $n-1$ čvorova. Neka je α automorfizam grafa i neka je $v_0 \in V(K_n)$ fiksiran čvor. Automorfizam α može preslikati čvor v_0 u bilo koji od n čvorova grafa K_n. Sledeći čvor grafa, recimo v_1, α preslikava u bilo koji od preostalih $n-1$ čvorova. Dolaizimo do zaključka da grupa automorfizama grafa K_n ima $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot 2 \cdot 1 = n!$ elemenata. Dakle $\mathbb{A}ut(K_n) \cong \mathbb{S}_n$. Bilo koji drugi graf Γ sa n čvorova ima grupu automorfizama čiji je red $|Aut(\Gamma)| \leq n!$.

Nakon ovog zaključka pitamo se koliko mala može biti grupa automorfizama grafa? Osim za male vrednosti n, $n \in N$, lako je konstruisati graf sa n čvorova koji ima trivijalnu grupu automorfizama. Dajemo primer stabla sa 7 čvorova koji ima trivijalnu grupu automorfizama.



Primer 3.30 *Pronadjimo najmanji $n > 1, n \in N$, takav da postoji povezan graf Γ, reda n, za koji je $|Aut(\Gamma)| > 1$.*

Neka je $n = 2$ i neka je $\mathbb{G} = \mathbb{Z}_2 = (\{0,1\}, +_2)$. Jasno, $|G| = 2$. Odgovarajući Kejlijev graf je kompletan graf K_2 i sledi da je $|Aut(K_2)| = 2$.

Primer 3.31 *Grupa automorfizama Petersonovog grafa je $Aut(P) = \mathbb{S}_5$.*
Kompletan dokaz može se pročitati u radu [4].

Definicija 3.32 Automorfizam digrafa $D = (V(D), E(D))$ *je permutacija* $\alpha : V(D) \to V(D)$, *takva da važi:*

$$(u,v) \in E(D) \text{ ako i samo ako } (\alpha(u), \alpha(v)) \in E(D).$$

Skup svih automorfizama digrafa D čini grupu $\mathbb{A}ut(D) = (Aut(D), \circ)$.

Podsetimo se, $(u,v) \in E(D)$ je oznaka koju koristimo za granu koja je usmerena od čvora u ka čvoru v. Dakle, automorfizam digrafa "čuva" usmerenja njegovih grana.

Definicija 3.33 *Neka je $D = (V(D), E(D))$ obojeni digraf i neka je $\mathbb{A}ut(D) = (Aut(D), \circ)$ odgovarajuća grupa automorfizama digrafa D. Za automorfizam $\alpha \in Aut(D)$ kažemo da je* **automorfizam koji čuva boje**, *ako za sve grane $(u,v) \in E(D)$, važi da su grane (u,v) i $(\alpha(u), \alpha(v))$ obojene istom bojom.*

Skup svih automorfizama digrafa D koji čuvaju boje čini grupu $\mathbb{A}ut^*(D) = (Aut^*(D), \circ)$.

Kasnije u tvrđenju 3.35 ćemo dokazati da je struktura $\mathbb{A}ut^*(D) = (Aut^*(D), \circ)$ zaista grupa.

Teorema 3.34 *Neka je $\mathbb{G}$ konačna, netrivijalna grupa, čiji je skup generatora Ω. Neka je α permutacija čvorova digrafa $D = Cay(G, \Omega)$. Tada:*

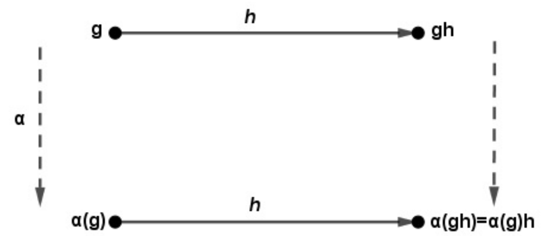
α je automorfizam koji čuva boje ako i samo ako $\alpha(gh) = \alpha(g)h$, za svako $g \in G, h \in \Omega$.

Dokaz.
$(\rightarrow)$:

Neka je α automorfizam koji čuva boje grafa $D = Cay(G, \Omega)$ i neka je $g \in G$, $h \in \Omega$. Tada znamo da važi:

Ako je $(g, gh) \in E(D)$, tada je grana $(\alpha(g), \alpha(gh)) \in E(D)$ obojena bojom h. Direktno sledi da je $\alpha(gh) = \alpha(g)h$.
$(\leftarrow)$:

Neka je α permutacija čvorova za koju važi $\alpha(gh) = \alpha(g)h$, gde je $g \in G$, $h \in \Omega$. Treba pokazati da je α automorfizam koji čuva boju grafa $D = Cay(G, \Omega)$. To sledi trivijalno, posmatrajući priloženu sliku.



Sa slike se vidi da su grane (g, gh) i $(\alpha(g), \alpha(gh))$ obojene istom bojom h, odakle sledi da je α automorfizam digrafa koji čuva boju. $\square$

Tvrđenje 3.35 *Neka je $\mathbb{G}$ konačna, netrivijalna grupa, čiji je skup generatora Ω. Tada je grupa automorfizama koji čuvaju boje digrafa $D = Cay(G, \Omega)$, $\mathbb{A}ut^*(D)$ podgrupa grupe automorfizama $\mathbb{A}ut(D)$.*

Dokaz.

- Domen grupe $\mathbb{A}ut^*(D)$ je neprazan skup jer $id \in Aut^*(D)$;
- $Aut^*(D) \subset Aut(D)$, sledi iz definicije jer je svaki automorfizam koji čuva boje ujedno i automorfizam digrafa;
- Ako α, $\beta \in Aut^*(D)$ da li je tada $\alpha \circ \beta \in Aut^*(D)$? Neka u, $v \in V(D)$ i neka postoji $(u, v) \in E(D)$, odnosno važi $uh = v$, za $h \in \Omega$. Tada je

$$(\alpha(u), \alpha(v)) \in E(D) \text{ i važi } \alpha(u)h = \alpha(v);$$
$$(\beta(u), \beta(v)) \in E(D) \text{ i važi } \beta(u)h = \beta(v).$$

Sledi da je

$(\alpha \circ \beta)(u) = \alpha(\beta(u));$

$(\alpha \circ \beta)(v) = \alpha(\beta(v)) = \alpha(\beta(u)h) = \alpha(\beta(u))h$

Sledi da je grana $((\alpha \circ \beta)(u), (\alpha \circ \beta)(v))$ obojena bojom h, te je $\alpha \circ \beta \in Aut^*(D)$.

- Ako $\alpha \in Aut^*(D)$ da li tada i $\alpha^{-1} \in Aut^*(D)$? Kako je $\alpha \in Aut^*(D)$ sledi da je $\alpha \in Aut(D)$, te je i $\alpha^{-1} \in Aut(D)$. Neka u, $v \in V(D)$ i neka je $(u, v) \in E(D)$, tj. važi $uh = v$, za $h \in \Omega$. Tada je $(\alpha^{-1}(u), \alpha^{-1}(v)) \in E(D)$. Neka je $\alpha^{-1}(u)k = \alpha^{-1}(v)$. Kako je α automorfizam digrafa koji čuva boje, sledi $id(u)k = id(v)$ te je $k = h$.

Na osnovu dokazanog sledi $\mathbb{A}ut^*(D) \leq \mathbb{A}ut(D)$. □

Teorema 3.36 *Neka je $\mathbb{G}$ konačna, netrivijalna grupa, čiji je skup generatora Ω. Tada je grupa automorfizama koji čuvaju boje digrafa $D = Cay(G, \Omega)$ izomorfna sa grupom $\mathbb{G}$. Tj. važi*

$$\mathbb{A}ut^*(D) \cong \mathbb{G}.$$

Dokaz. Neka je $G = \{g_1, ..., g_n\}$, $\Omega = \{h_1, ..., h_t\}$ i neka je $D = Cay(G, \Omega)$. Definišimo leve translacije τ_a na sledeći način:

$\tau_a : V(D) \to V(D)$, dato sa

$$\tau_a(g_i) := ag_i,$$

gde a, $g_i \in G$, $i \in \{1, ...n\}$. Trivijalno se pokazuje da su leve translacije bijekcije. Dokažimo da su τ_a, $a \in G$ automorfizmi Kejlijevog digrafa D. Neka su g_s, $g_k \in \{g_1, ...g_n\}$ i neka je $h \in \{h_1, ...h_t\}$.

$(\to)$:

Ako je $(g_s, g_s h) \in E(D)$ tada sledi

$\tau_a(g_s) = ag_s$ i $\tau_a(g_s h) = a(g_s h) = (ag_s)h$,

pa je $(\tau_a(g_s), \tau_a(g_s h)) \in E(D)$.

$(\leftarrow)$:

Ako je $(\tau_a(g_s), \tau_a(g_k)) \in E(D)$ sledi $(ag_s)h = ag_k$ tj. $a(g_s h) = ag_k$, pa primenom kancelacije je $g_s h = g_k$, tj. imamo granu $(g_s, g_k) \in E(D)$.

Dakle, τ_a ne samo da su automorfizmi digrafa, nego su i jedini automorfizmi Kejlijevog digrafa koji čuvaju boje. Svi automorfizmi koji čuvaju boje su baš leve translacije. Naime, neka je $\alpha \in Aut^*(D)$ i neka je $\alpha(g_1) = g_r$, $r \in \{1, ...n\}$, gde je g_1 neutralni element grupe $\mathbb{G}$. Pokazaćemo da je $\alpha = \tau_{g_r}$.

Neka je $g_s \in G$ i $g_s = h_1...h_k$, $h_i \in \Omega$, $i \in \{1, ...t\}$.

$\alpha(g_s) = \alpha(g_1 g_s) = \alpha(g_1 h_1...h_k) = \alpha(g_1)h_1...h_k = g_r h_1...h_k = g_r g_s$. Kako je g_s proizvoljan element grupe $\mathbb{G}$ sledi da je $\alpha = \tau_{g_r}$.

Dakle, domen grupe $\mathbb{A}ut^*(D)$ je skup svih levih translacija τ_a, $a \in G$.

Definišimo sada preslikavanje $\phi : \mathbb{G} \to \mathbb{A}ut^*(D)$, dato sa

$$\phi(a) := \tau_a,\ \tau_a(g_i) := ag_i$$

Dokazujemo da je ϕ izomorfizam:

- ϕ je "1-1", jer je očigledno $\tau_a \neq \tau_b$ kada je $a \neq b$ te je i $\phi(a) \neq \phi(b)$;
- ϕ je "na", jer je za $\tau \in Aut^*(D)$, $\tau = \tau_{g_r}$ za $g_r \in G$;

- ϕ je homomorfizam:

  Neka su g_i, g_j, $g_k \in G$ dati i neka je $g_i g_j = g_k$. Tada je $\phi(g_i g_j) = \phi(g_k) = \tau_{g_k}$.

  Sada, za svako s, $s \in \{1, ...n\}$ je $\tau_{g_k}(g_s) = g_k g_s = (g_i g_j) g_s = g_i(g_j g_s) = \tau_{g_i}(\tau_{g_j}(g_s)) = (\tau_{g_i} \circ \tau_{g_j})(g_s)$;

  Sada je, $\tau_{g_k}(g_s) = (\tau_{g_i} \circ \tau_{g_j}) g_s$, pa je, $\tau_{g_i g_j} = \tau_{g_i} \circ \tau_{g_j}$, jer je g_s proizvoljno izabaran element grupe $\mathbb{G}$.

  Sledi, $\phi(g_i g_j) = \phi(g_i) \circ \phi(g_j)$.

Dakle, $\mathbb{A}ut^*(D) \cong \mathbb{G}$. □

Problem iz 1936. godine, koji je u svojoj knjizi spomenuo Kenig, bio je problem pronalaženja svih konačnih grupa $\mathbb{G}$, za koje postoji graf Γ takav da važi $Aut(\Gamma) \cong \mathbb{G}$.

Problem je rešen 1938. godine, od strane Fruhta, koji je dokazao da **sve konačne grupe imaju ovo svojstvo**. Ovo tvrđenje zajedno sa dokazom dajemo u nastavku teksta.

Tvrđenje 3.37 *(Fruht, 1938.) Za svaku konačnu, netrivijalnu grupu $\mathbb{G}$ čiji je generatorni skup Ω, postoji prost, neusmeren graf Γ takav da je $Aut(\Gamma) \cong \mathbb{G}$.*

Dokaz. Neka je $\mathbb{G}$ konačna grupa, $G = \{g_1, g_2, ..., g_n\}$, $n \geq 2$ i $\Omega = \{h_1, h_2, ..., h_t\}$, $1 \leq t < n$, njen generatorni skup.

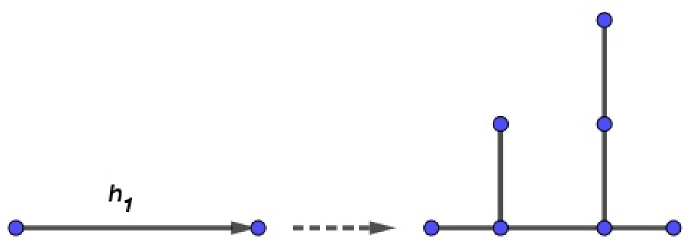
Najpre, konstruišemo Kejlijev digraf $D = Cay(G, \Omega)$. Tada znamo da je $\mathbb{A}ut^*(D) \cong \mathbb{G}$. Dalje, transformišemo digraf D u graf Γ. Cilj ovog dela jeste da grupa automorfizama grafa ostane nepromenjena.

Transformacija digrafa u graf: Neka g_i, $g_j \in V(D)$, $h_k \in \Omega$, $k \in \{1, ...t\}$.

1. Neka je (g_i, g_j) grana digrafa D obojena bojom h_k. Brišemo ovu granu i menjamo je sa putem $g_i u_{ij} u'_{ij} g_j$;
2. Na čvoru u_{ij} konstuišemo put P_{ij}, dužine $2k-1$, a na čvoru u'_{ij} put P'_{ij} dužine $2k$;
3. Ovaj postupak se primenjuje na svaku granu digrafa D.

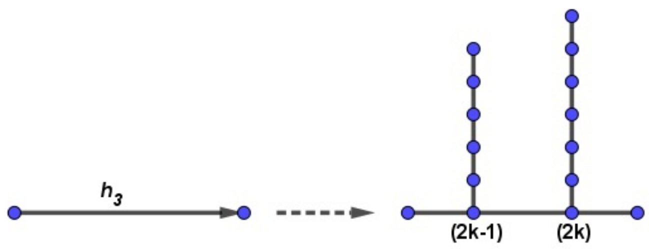
Na primer,

1. $k = 1$



2. $k = 2$

3. $k = 3$



Dodavanje puteva P_{ij} i P'_{ij} u konstrukciji grafa Γ ekvivalentno je usmerenju u digrafu D.

Treba pokazati da svaki automorfizam α koji čuva boju u digrafu D, indukuje automorfizam β grafa Γ i obrnuto, gde je preslikavanje β jedinstvena ekstenzija preslikavanja α koja je automorfizam grafa Γ.

Primetimo: Ako su čvorovi g_i i g_j spojeni granom u digrafu D, oni su spojeni putem u grafu Γ (g_iuvg_j). u i v su čvorovi sa putevima koji **nemaju** grana incidentnih sa ostatkom grafa (tzv. izrasline).

Neka je Y podgraf grafa Γ sadržan od puta g_iuvg_j i od puteva iz u i v. Dužina "izraslina" na čvorovima u i v ukazuje nam na usmerenje grane (g_i, g_j) u digrafu D i boju grane. Naime, početak kraćeg puta pridružen je za teme u, za granu sa usmerenjem $g_i \implies g_j$. Primetimo da je automorfizam grafa Γ preslikavanje $\beta : V(\Gamma) \to V(\Gamma)$. Skup čvorova grafa Γ je skup svih čvorova digrafa D kao i skup svih novih čvorova koji su dobijeni konstrukcijom tzv. izraslina.

- Ako je $\alpha \in Aut^*(D)$ tada je $\beta \in Aut(\Gamma)$ jer dve grane obojene istom bojom u digrafu D odgovaraju paru izomorfnih podgrafova grafa Γ;

- Ako je $\beta \in Aut(\Gamma)$ tada je $\beta(V(D)) = V(D)$, jer su sva "pridodata" temena u grafu Γ delovi puteva koji nemaju grana incidentnih sa ostatkom grafa.

  Ako $(g_i, g_j) \in E(D)$, tada postoji put g_iuvg_j u grafu Γ. Tada, β mora da slika čvorove u i v u dva čvora koja su takođe "koreni" dva puta, gde važi da je put sa početkom u čvoru $\beta(u)$ iste dužine kao i put sa početkom u čvoru u. Isto važi i za čvor v. Ovo znači da su $\beta(g_i)$ i $\beta(g_j)$ povezani u

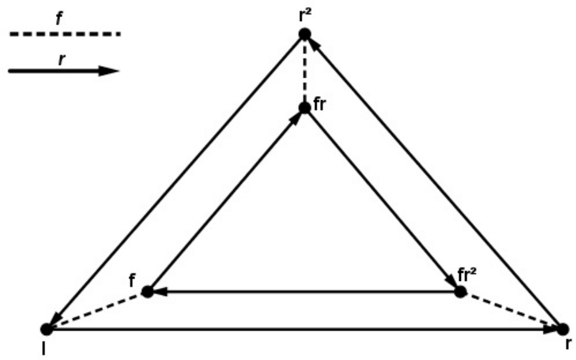
D i grana koja ih povezuje je iste boje i usmerenja kao i grana (g_i, g_j) u grafu D.

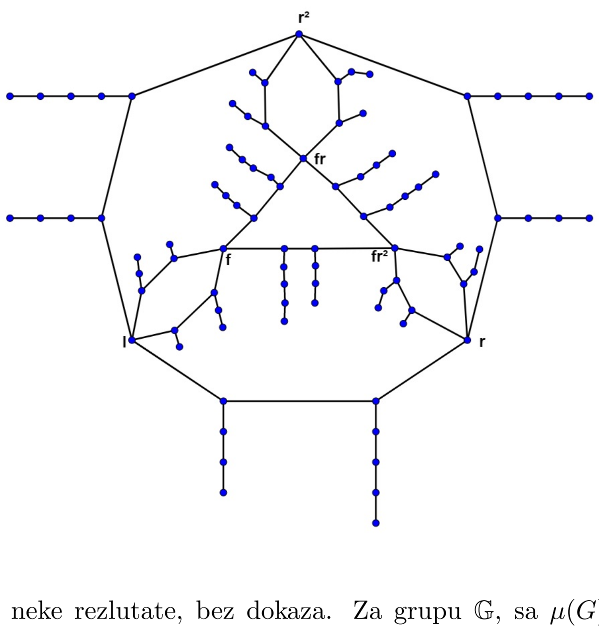
Ako g_i i g_j nisu spojeni u D, onda nisu spojeni ni u grafu Γ, pa $\beta(g_i)$ i $\beta(g_j)$ nisu povezani u D.

Sledi, da je $\alpha = \beta|_{V(D)}$ automorfizam digrafa D.

$\square$

Primer 3.38 *Ilustraciju ovog dokaza dajemo na primeru grupe $\mathbb{D}_3$, gde možemo videti kako se od Kejlijevog digrafa grupe konstruiše graf i pritom grupa automorfizama ostaje nepromenjena.*





Navedimo još neke rezlutate, bez dokaza. Za grupu $\mathbb{G}$, sa $\mu(G)$ označavamo minimalan broj čvorova grafa Γ za koji važi:

$$\mathbb{A}ut(\Gamma) \cong \mathbb{G}.$$

Dobijeni su sledeći rezultati:

$\mathbb{G}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_4$	$\mathbb{Z}_5$	$\mathbb{Z}_p$	$\mathbb{G}$
$\mu(G)$	2	9	10	15	2p	$\leq 2\lvert G\rvert$

gde je p prost broj, $p > 5$.
Neka je $n \geq 3$. Jedini povezan graf sa grupom automorfizama $\mathbb{S}_n$ i

- n čvorova je K_n;
- $n+1$ čvorova je $K_{1,n}$.

Za kraj ove sekcije navodimo važno tvrđenje gde vidimo da za svaku konačnu, apstraktnu grupu postoji **neprebrojivo mnogo** grafova, čija je grupa automorfizama izomorfna polaznoj grupi. Pritom važi da su grafovi regularni stepena r i da je hromatski broj svakog grafa s, gde su r i s unapred zadati brojevi.

Tvrđenje 3.39 *(Izbicki, 1960.) Neka je $\mathbb{G}$ apstraktna, konačna grupa i neka su $r \geq 3, 2 \leq s \leq r$, dati brojevi. Tada, postoji neprebrojivo mnogo grafova $\Gamma = (V(\Gamma), E(\Gamma))$ sa osobinom:*

- *$Aut(\Gamma) \cong \mathbb{G}$;*
- *Γ je regularan graf stepena r;*
- *Hromatski broj grafa Γ je s.*

3.5 Dejstvo grupe na graf

Neka je X matematički objekat (skup, grupa, graf,...). U matematici, $Sym(X)$ može značiti:

- Ako je X skup, onda je $Sym(X)$ grupa permutacija elemenata skupa X. Na primer, ako je $|X| = n$ onda je $Sym(X) \cong Sym_n$, gde je Sym_n simetrična grupa čija je poznatija oznaka $\mathbb{S}_n$;
- Ako je X grupa, $Sym(X) = Aut(X)$;
- Ako je X euklidska ravan $\mathbb{R}^2$, tada posmatramo funkcije koje čuvaju rastojanje medju tačkama, $Sym(X) = Isom(\mathbb{R}^2)$ tj. grupa izometrija u $\mathbb{R}^2$;
- Ako je $X = \mathbb{Z}$, gde je $\mathbb{Z}$ skup celih brojeva, onda je grupa $Sym(\mathbb{Z})$ beskonačna;
- Ako je $X = (\mathbb{Z}, +)$, gde je $(\mathbb{Z}, +)$ grupa celih brojeva, onda je $Sym(\mathbb{Z}) = Aut(\mathbb{Z}, +)$, gde je jedini netrivijalni automorfizam grupe $\mathbb{Z}$, $n \mapsto -n$;
- Ako je X graf, onda je $Sym(X)$ grupa automorfizama grafa.

Dajemo dve definicije dejstva grupe na matematički objekat, za koje se može pokazati da su ekvivalentne.

Definicija 3.40 *Dejstvo grupe $\mathbb{G} = (G, \cdot)$ na matematički objekat X je homomorfizam grupe $\varphi : \mathbb{G} \to Sym(X)$.*

Definicija 3.41 *Dejstvo grupe $\mathbb{G} = (G, \cdot)$ na matematički objekat X je preslikavanje $\alpha : G \times X \to X$, dato sa $(g, x) \mapsto gx$ za svako $x \in X$, $g \in G$. Za preslikavanje α važi:*

1. $(\forall x \in X)\, Ix = x$;

2. $(\forall g, h \in G)(\forall x \in X)\, (gh)x = g(hx)$.

Ako postoji dejstvo grupe $\mathbb{G}$ na matematički objekat X, to obeležavamo sa $\mathbb{G} \curvearrowright X$. U tom slučaju, odgovarajući homomorfizam $\varphi : G \to Sym(X)$ zovemo **reprezentacija** grupe $\mathbb{G}$. Reprezentacija je **verodostojna** ako je φ injektivno preslikavanje. Važi sledeće tvrđenje:

Tvrđenje 3.42 *Preslikavanje je verodostojno, ako za proizvoljan element $g \in G$, $g \neq I$, postoji $x \in X$, tako da je $gx \neq x$.*

Dokaz. Neka je $x \in X$ proizvoljan. Ako su $g, h \in G$ i $g \neq h$, onda mora postojati $x \in X$, takvo da je $gx \neq hx$, jer ako $gx = hx$, onda je $(g^{-1}g)x = (g^{-1}h)x$, pa je $x = (g^{-1}h)x$. Tada mora biti $g^{-1}h = I$, tj. $h = g$, što je kontradikcija. $\square$

Posledica 3.43 *Neka je $\mathbb{G}$ grupa, X matematički objekat, i neka postoji dejstvo grupe $\mathbb{G}$ na X. Dalje, neka je odgovarajući homomorfizam $\varphi : G \to Sym(X)$. Sledeći uslovi su ekvivalentni:*

1. *Preslikavanje φ je verodostojno;*

2. *Preslikavanje φ je injektivno;*

3. $(\forall g \neq I)\, \varphi(g) \neq id$.

Primer 3.44 *Dijedarska grupa $\mathbb{D}_n$ je grupa izometrija regularnog n-tougla. Kao takva ona permutuje temena n-tougla, tj. postoji reprezentacija $D_n \to Sym_n$. Kako svaki element grupe $\mathbb{D}_n$, koji je različit od I, pomera bar $n-2$ elemenata n-tougla, sledi da je posmatrana reprezentacija verodostojna.*

Napomena 3.45 *Kako nisu sve grupe Abelove, veoma je značajno razlikovati levo i desno dejstvo grupe na posmatrani matematički objekat. Sva dejstva koja mi posmatramo u ovom radu su leva dejstva. Njih biramo iz razloga jer leva dejstva najviše odgovaraju oznakama funkcija i standardna su u geometriji teorije grupa kao i u topologiji.*

Definicija 3.46 *Neka je $\mathbb{G}$ grupa i X neki matematički objekat (graf, skup, poligon,...). Neka grupa $\mathbb{G}$ deluje na X. Ako je $x \in X$, definišemo* **stabilizator elementa** *x kao*

$$Stab(x) := \{g \in G \,|\, gx = x\}.$$

Tvrđenje 3.47 *Neka je $\mathbb{G}$ grupa i X neki matematički objekat. Za svako dejstvo $\mathbb{G} \curvearrowright X$, $Stab(x)$, $x \in X$, je podgrupa grupe $\mathbb{G}$.*

Dokaz.

- Kako je $Ix = x$ sledi da $I \in Stab(x)$;

- Ako $g \in Stab(x)$ tada je $gx = x$. $g^{-1}x = g^{-1}(gx) = (g^{-1}g)x = x$ odakle sledi da $g^{-1} \in Stab(x)$;

- Ako $g, h \in Stab(x)$, tada je $(gh)x = g(hx) = gx = x$. Sledi $gh \in Stab(x)$.

  Dakle, za svako $x \in X$ je $Stab(x) \leq \mathbb{G}$.

□

Definicija 3.48 *Kažemo da je dejstvo* $\mathbb{G} \curvearrowright X$ **slobodno** *ako je za svako* $x \in X$ $Stab(x) = \{I\}$.

Definicija 3.49 *Neka* $\mathbb{G} \curvearrowright X$ *i neka je* $x \in X$. *Definišemo* **orbitu elementa** x *kao*

$$Orb(x) := \{gx \mid g \in G\}.$$

Tvrđenje 3.50 *Neka je* $\mathbb{G}$ *grupa,* X *neki matematički objekat i neka* $\mathbb{G} \curvearrowright X$. *Ako su* $x, y \in X$ *iz iste orbite, onda su njihovi stabilizatori konjugovane podgrupe.*

Dokaz. Ako x i y pripadaju istoj orbiti, sledi da postoji $g \in G$ tako da je $y = gx$. Treba pokazati da je $Stab(y) = gStab(x)g^{-1}$.

($\subseteq$) : Neka $h \in Stab(y)$. $y = gx$ pa je $x = g^{-1}y$. $(g^{-1}hg)x = g^{-1}(h(gx)) = g^{-1}(hy) = g^{-1}y = x$. Sledi $g^{-1}hg \in Stab(x)$ pa $h \in gStab(x)g^{-1}$.

($\supseteq$) : Neka $h \in Stab(x)$. Tada $(ghg^{-1})y = g(h(g^{-1}y)) = g(hx) = gx = y$. Sledi $ghg^{-1} \in Stab(y)$. Dakle, $gStab(x)g^{-1} \subseteq Stab(y)$. □

Teorema 3.51 *Za dato dejstvo* $\mathbb{G} \curvearrowright X$ *i za svaki* $x \in X$, *postoji bijektivna korespodencija izmedju* $Orb(x)$ *i levih koseta* $Stab(x)$, *data sa* $gx \to gStab(x)$.

Dokaz. Definišimo preslikavanje $\varphi : Orb(x) \to \{gStab(x) \mid g \in G\}$, dato sa

$$\varphi(gx) := gStab(x).$$

- Preslikavanje φ je dobro definisano: Ako je $gx = hx$, onda
  $\Longrightarrow h^{-1}(gx) = h^{-1}(hx)$
  $\Longrightarrow (h^{-1}g)x = (h^{-1}h)x$
  $\Longrightarrow h^{-1}gx = x$
  $\Longrightarrow h^{-1}g \in Stab(x)$
  $\Longrightarrow gStab(x) = hStab(x)$.
- Trivijalno sledi da je preslikavanje φ "na";
- Preslikavanje φ je "1-1":
  Jeste, jer ako je $gStab(x) = hStab(x)$, onda
  $\Longrightarrow g \in hStab(x)$,
  $\Longrightarrow h^{-1}g \in Stab(x)$,
  $\Longrightarrow h^{-1}gx = x$,
  $\Longrightarrow gx = hx$, pa su originali preslikavanja φ isti.

Dakle, φ je bijekcija. □

Posledica 3.52 *Neka je* $\mathbb{G}$ *grupa,* $x \in X$ *i* $\mathbb{G} \curvearrowright X$. *Onda je*

$$|Orb(x)| = [G : Stab(x)].$$

Teorema 3.53 *(Orbit - Stabilizer Teorema)*

Neka je $\mathbb{G}$ konačna grupa, X neki matematički objekat i $\mathbb{G} \curvearrowright X$. Tada, za svako $x \in X$ važi:

$$|G| = |Stab(x)| \cdot |Orb(x)|.$$

Dokaz. Poznato je da je da je red grupe jednak proizvodu reda podgrupe i indeksa iste podgrupe. Tj. važi: $|G| = |Stab(x)| \cdot [G : Stab(x)]$, pa iz posledice 3.52 sledi $|G| = |Stab(x)| \cdot |Orb(x)|$. □

Neka je $\Gamma = (V(\Gamma), E(\Gamma))$ graf i $\mathbb{A}ut(\Gamma)$ grupa njegovih automorfizama. Sada je posmatrana grupa $\mathbb{A}ut(\Gamma)$, dok je graf Γ matematički objekat. Definišimo relaciju R na skupu čvorova $V(\Gamma)$ na sledeći način: Neka su u, $v \in V(\Gamma)$.

$$uRv \text{ ako i samo ako } (\exists\, \alpha \in Aut(\Gamma))\, \alpha(u) = v$$

Može se dokazati da je R relacija ekvivalencije na skupu $V(\Gamma)$ i njene klase zovemo **orbite**. Za dva čvora grafa Γ koja pripadaju istoj orbiti kažemo da su **slični čvorovi**. Jasno je da slični čvorovi imaju isti stepen. Ovde grupa automorfizama grafa deluje nad skupom čvorova tog grafa, i orbite tog dejstva su upravo orbite relacije R. Stoga ćemo orbite relacije R zapisivati kao $Orb(u) = \{\alpha(u) \mid \alpha \in Aut(\Gamma)\}$.

Definicija 3.54 *Neka je $\mathbb{G}$ grupa, X matematički objekat i neka $\mathbb{G} \curvearrowright X$. Kažemo da je dejstvo* ***tranzitivno*** *ako za svaka dva elementa $x, y \in X$ postoji element $g \in G$ takav da je $gx = y$.*

Definicija 3.55 *Graf $\Gamma = (V(\Gamma), E(\Gamma))$ je:*

1. **čvorno tranzitivan**, *ako $\mathbb{A}ut(\Gamma)$ ima tranzitivno dejstvo na $V(\Gamma)$, tj. ako $(\forall\, u,\, v \in V(\Gamma))(\exists\, \varphi \in Aut(\Gamma))$ tako da je $\varphi(u) = v$. Drugim rečima, graf koji ima samo jednu orbitu je čvorno tranzitivan;*

2. **granski tranzitivan**, *ako $\mathbb{A}ut(\Gamma)$ ima tranzitivno dejstvo na $E(\Gamma)$, tj. ako $(\forall\, (x, y), (u, v) \in E(\Gamma))(\exists\, \varphi \in Aut(\Gamma))$ tako da je $(\varphi(u), \varphi(v)) = (x, y)$.*

Primetimo da, ako je Γ povezan graf i δ rastojanje između čvorova $u, v \in V(\Gamma)$, tada za svaki automorfizam $\alpha \in Aut(\Gamma)$ važi:

$$\delta(u, v) = \delta(\alpha(u), \alpha(v)).$$

Dakle, ne postoji automorfizam koji par čvorova koji su na udaljenosti r, slika u par čvorova koji su na udaljenosti s, gde je $r \neq s$.

Definicija 3.56 *Graf $\Gamma = (V(\Gamma), E(\Gamma))$ je* ***tranzitivan u odnosu na rastojanje čvorova*** *ako za svake x, y, u, $v \in V(\Gamma)$ takve da je $\delta(u, v) = \delta(x, y)$ postoji $\alpha \in Aut(\Gamma)$ takav da je*

$$\alpha(u) = x \wedge \alpha(v) = y.$$

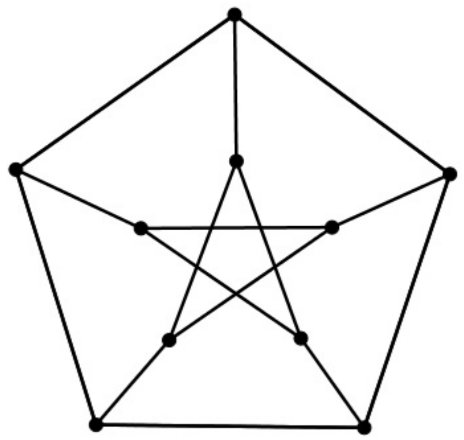
Neka je $\Gamma = (V(\Gamma), E(\Gamma))$ graf. Važi sledeća implikacija:

Ako je Γ tranzitivan u odnosu na rastojanje čvorova onda je Γ je čvorno tranzitivan.

Teorema 3.57 *Svaki čvorno tranzitivan graf je regularan.*

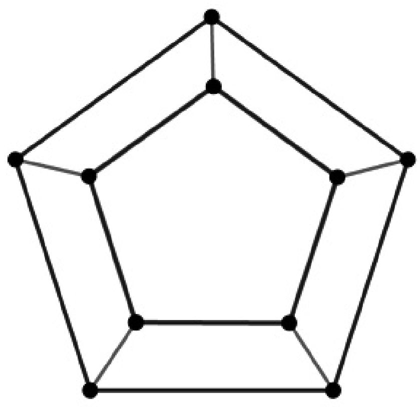
Dokaz. Sledi odmah iz definicije, jer ima samo jednu orbitu. Dakle, svi čvorovi grafa su u jednoj orbiti, a znamo da su svi elementi jedne orbite istog stepena. □

Primer 3.58 *Petersonov graf jeste čvorno tranzitivan.*

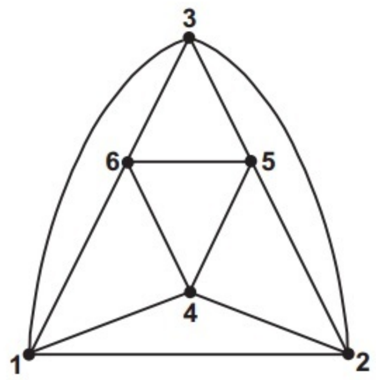


Primer 3.59 *Svi grafovi oblika* $K_n, n \geq 1$, $C_n, n \geq 3$ *i* $K_{r,r}, r \geq 1$ *su čvorno tranzitivni.*

Primer 3.60 $\Gamma := C_5 \times K_2$ *jeste čvorno tranzitivan*

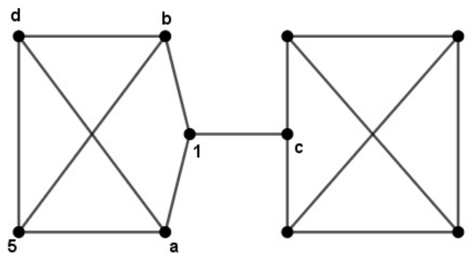


Primer 3.61 $\Gamma := K_{2,2,2}$ *jeste čvorno tranzitivan*



Na primer, posmatrajmo čvorove 1 i 5. Da li postoji automorfizam koji slika čvor $1 \to 5$? Postoji, traženi automorfizam možemo zapisati kao $\alpha = (1\,5)(2\,4)(3\,6)$.

Primer 3.62 *Regularan graf* $\Gamma = (V(\Gamma), E(\Gamma))$

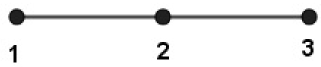


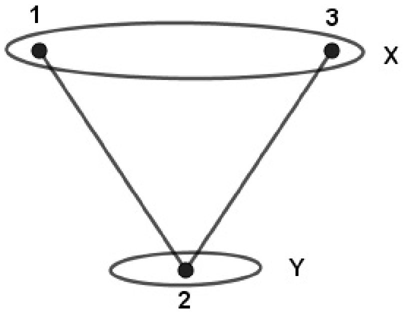
Ovaj graf nije čvorno tranzitivan. Naime, pokazaćemo da ne postoji automorfizam koji slika čvor 1 u čvor 5. Pretpostavimo suprotno, da takav automorfizam α postoji. Ako α slika čvor 1 u čvor 5 čvorovi a i b moraju ili ostati fiksirani preslikavanjem α ili zameniti mesta.

- Ako čvorovi a i b ostaju fiksirani preslikavanjem α, posmatrajmo tada čvor d, preostalog suseda čvora 5. Ako je i čvor d fiksiran, tada grana $d5 \in E(\Gamma)$ ali $\alpha(d)\alpha(5) = d1 \notin E(\Gamma)$, te α nije automorfizam grafa. Jedina preostala mogućnost je da α slika čvor d u čvor c. No tada je grana $db \in E(\Gamma)$, ali $\alpha(d)\alpha(b) = cb \notin E(\Gamma)$, pa α nije automorfizam grafa.

- Ako se automorfizmom α čvor a slika u čvor b. Sličnim postupkom za čvor d dobijamo da α nije automorfizam grafa.

Primer 3.63 *Posmatrajmo put sa tri čvora,* P_3. *On nije čvorno tranzitivan, ali jeste granski tranzitivan.*





Primetimo da je put P_3 iz prethodnog primera bipartitan graf. U narednoj teoremi ćemo dokazati da je svaki povezan graf koji jeste granski, ali nije čvorno tranzitivan, bipartitan.

Teorema 3.64 *Ako je povezan graf* $\Gamma = (V(\Gamma), E(\Gamma))$ *granski tranzitivan, a nije čvorno tranzitivan, onda sledi da je taj graf bipartitan.*

Dokaz. Posmatrajmo graf $\Gamma = (V(\Gamma), E(\Gamma))$. Kako graf nije čvorno tranzitivan, postoje bar dve orbite čvorova $V(\Gamma)$. Označimo ih sa X i Y. Graf je povezan pa postoji grana između čvorova x i y gde je $x \in X$ i $y \in Y$. Ne postoji grana između nijedna dva čvora iz iste orbite jer je Γ granski tranzitivan. Pretpostavimo da postoji i treća orbita Z. Onda postoji $z \in Z$ koji je susedan sa $t \in T$, gde je T orbita različita od Z. Ali time dobijamo kontradikciju jer ne postoji automorfizam koji slika granu xy na granu zt. $\square$

Teorema 3.65 *Neka je* $\mathbb{G} = (G, \cdot)$ *konačna grupa i* Ω *njen generatorni skup.*

1. *Svaki Kejlijev graf* $\Gamma = Cay(G, \Omega)$ *je čvorno tranzitivan;*

2. *Neka je* α *automorfizam grupe* $\mathbb{G}$ *takav da je* $\alpha(\Omega) = \Omega$*. Tada je* α*, posmatran kao permutacija čvorova grafa* $\Gamma = Cay(G, \Omega)$*, automorfizam grafa* $\Gamma = Cay(G, \Omega)$ *i* α *fiksira čvor koji odgovara elementu* I*.*

Dokaz.

1. Neka je $g \in G$. Tada je preslikavanje definisano sa $\bar{g} : G \to G$, $\bar{g}(x) = gx, \forall x \in G$, leva translacija. Znamo da su leve translacije ujedno i automorfizmi Kejlijevog grafa $\Gamma = Cay(G, \Omega)$. Dakle, skup svih levih translacija $\bar{g}$, $g \in G$, čini grupu automorfizama $\overline{\mathbb{G}}$, i važi da je $\overline{\mathbb{G}} \cong \mathbb{G}$. $\overline{\mathbb{G}}$ deluje tranzitivno na skupu čvorova, tj. ako $h, k \in V(\Gamma)$, onda postoji $g \in G$ takav da je $h = gk$, to jest $\bar{g}(k) = h$.

2. Neka je α automorfizam grupe $\mathbb{G}$ i neka je $\alpha(\Omega) = \Omega$. Jasno, tada je $\alpha(I) = I$, jer je α automorfizam grupe. Dokažimo još da je α automorfizam Kejlijevog grafa $\Gamma = Cay(G, \Omega)$.

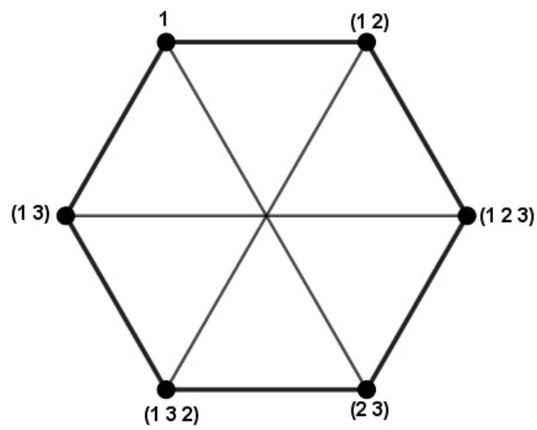
   $hk \in E(\Gamma) \implies h^{-1}k \in \Omega$

$$\implies \alpha(h^{-1}k) \in \Omega$$
$$\implies \alpha(h^{-1})\alpha(k) \in \Omega$$
$$\implies (\alpha(h))^{-1}\alpha(k) \in \Omega$$
$$\implies \alpha(h)\alpha(k) \in E(\Gamma).$$

□

Grupa automorfizama Kejlijevog grafa $\Gamma = Cay(G, \Omega)$ često je strogo veća od grupe levih translacija $\overline{\mathbb{G}}$, što možemo i videti u narednom primeru.

Primer 3.66 *Ako je grupa* $\mathbb{G}$ *simetrična grupa* $\mathbb{S}_3$ *i ako je* $\Omega = \{(12), (23), (13)\}$ *njen generatorni skup, onda je Kejlijev graf* $\Gamma = Cay(G, \Omega) \cong K_{3,3}$.



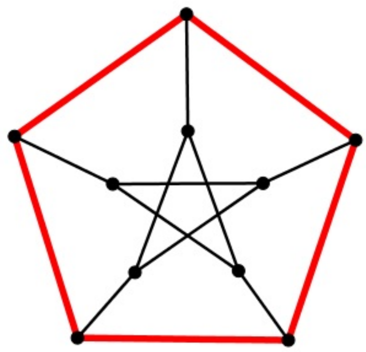
Svaki automorfizam od $\mathbb{S}_3$ fiksira skup Ω, pa sledi da je stabilizator čvora 1 najmanje reda 6 (toliko ima levih translacija od $\mathbb{S}_3$). Štaviše, red stabilizatora je 12 i $|Aut(K_{3,3})| = 72$, jer je za $v \in V(\Gamma)$, $|Aut(\Gamma)| = |G| = |Stab(v)| \cdot |V(\Gamma)| = 12 \cdot 6$.

Teorema 3.67 *Nije svaki čvorno tranzitivan graf Kejlijev graf!*

Dokaz. Dokaz dajemo za Petersonov graf, odnosno, dokazujemo da je on čvorno tranzitivan ali nije Kejlijev. Petersonov graf je 3-regularan, povezan graf sa 10 čvorova. Postoje tačno 2 grupe reda 10, a to su ciklična grupa $\mathbb{C}_{10}$ i dijedarska grupa $\mathbb{D}_5$. Ako bi Petersonov graf Γ bio Kejlijev graf, onda je izomorfan Kejlijevom grafu grupe $\mathbb{C}_{10} = (C_{10}, \Omega)$ ili $\mathbb{D}_5 = (D_5, \Omega)$, gde je Ω generatorni skup takav da važi:

- $\Omega = \Omega^{-1}$;
- $|\Omega| = 3$;
- $< \Omega >= C_{10} \vee < \Omega >= D_5$.

Kako je dužina najkraće konture u Petersonovom grafu 5 (označeno crvenom bojom na slici), dovoljno je da pokažemo da svaki povezan Kejlijev graf sa 10 čvorova ima dužinu najkraće konture $\neq 5$.



Detaljnom proverom svih mogućnosti za skup Ω koji zadovoljava navedene uslove, dobija se da je u oba slučaja dužina najkraće konture 4. $\square$

Definicija 3.68 *Neka je* $\Gamma = (V(\Gamma), E(\Gamma))$ *i neka je* $\mathbb{A}ut(\Gamma)$ *grupa automorfizama grafa* Γ*. Grupa automorfizama grafa* Γ *ima* ***regularno dejstvo*** *na graf* Γ *ako svaki netrivijalan automorfizam ne fiksira nijedan čvor grafa* Γ*.*

Neka je $\Gamma = (V(\Gamma), E(\Gamma))$, $\mathbb{G} := \mathbb{A}ut(\Gamma)$ i neka je $Stab(v)$ stabilizator čvora $v \in V(\Gamma)$. Kada $\mathbb{G}$ ima tranzitivno dejstvo na $V(\Gamma)$, odnosno u slučaju čvorne tranzitivnosti, sve podgrupe $Stab(v)$, $v \in V(\Gamma)$, su konjugovane u $\mathbb{G}$, pa su i izomorfne. Indeks podgrupe $Stab(v)$ dat je sa

$$[G : Stab(v)] = |G|/|Stab(v)| = |V(\Gamma)|$$

Ako se svaka podgrupa $Stab(v), v \in V(\Gamma)$, sastoji samo od jediničnog elementa, tada svaki element grupe $\mathbb{G}$ ne fiksira nijedan čvor, pa sledi da $\mathbb{G}$ ima regularno dejstvo na $V(\Gamma)$. U tom slučaju je $|Aut(\Gamma)| = |G| = |V(\Gamma)|$.

Naredna teorema daje odgovor na veoma bitno pitanje, **koji (di)grafovi su Kejlijevi (di)grafovi neke grupe?**

Teorema 3.69 *(Teorema Sabidusi, 1964.)*

Digraf $D = (V(D), E(D))$ *je Kejlijev digraf neke grupe ako i samo ako postoji podgrupa* U *grupe automorfizama digrafa,* $Aut(D)$ $(U \leq Aut(D))$*, takva da* U *ima regularno, tranzitivno, levo dejstvo na digraf* D*, odnosno da je levo dejstvo i da važi:*

$$(\forall\, x, y \in V(D))(\exists!\, \alpha \in U)\alpha(x) = y$$

Dokaz. $(\rightarrow)$:

Pretpostavimo da je $D = Cay(\mathbb{G}, \Omega)$, gde je $\mathbb{G}$ konačna netrivijalna grupa, i $\Omega \subseteq G$ generatorni skup grupe $\mathbb{G}$. Dokažimo da $Aut(D)$ ima podgrupu U koja ima regularno, tranzitivno levo dejstvo na digraf D. Neka je $U := \{\tau_g \,|\, g \in G\}$, gde su $\tau_g : G \rightarrow G$ leve translacije date na sledeći način:

$$\tau_g(x) = gx, \text{ gde } g, x \in G.$$

Tada znamo:

1. $U \cong \mathbb{G}$, jer je svaka grupa izomorfna sa skupom svojih levih translacija, odakle sledi da je U grupa;
2. $U \leq Aut(D)$: Ranije smo već pokazali da je svaka leva translacija τ_g automorfizam digrafa D, te je $U \leq Aut(D)$.
3. $U = \{\tau_g \,|\, g \in G\}$ je levo dejstvo na digraf D, tj.

   $\tau_g(\tau_h(x)) = (\tau_g\tau_h)(x)$, tj.

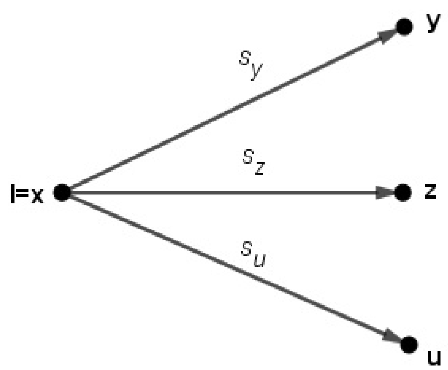
   $g(h(x)) = (gh)(x)$ i $\tau_I(x) = Ix = x$.
4. U je regularno, tranzitivno levo dejstvo na digraf D, tj. treba dokazati da

$$(\forall x, y \in V(D))(\exists!\, \alpha \in U)\alpha(x) = y.$$

   Zaista, postoji jedinstven $g \in G$, takav da je $\tau_g(x) = y$, jer je $g = yx^{-1}$ (jer je τ_g "na"). Odatle je $\tau_g(x) = (yx^{-1})x = y$, pa je $\alpha = \tau_g$.

$(\leftarrow)$:

Neka je $D = (V(D), E(D))$ digraf takav da postoji podgrupa $U \leq Aut(D)$, koja ima regularno, tranzitivno levo dejstvo na digraf D. Treba odrediti grupu $\mathbb{G} = (G, \Omega)$, takvu da je D Kejlijev digraf grupe $\mathbb{G}$, $D = Cay(G, \Omega)$. Dokazaćemo da za traženu grupu $\mathbb{G}$ možemo uzeti baš grupu U. Dakle, krenemo od digrafa D, uočimo čvor $x \in V(D)$ i njega proglasimo za neutralni element buduće grupe I.



Sada, gledamo grane koje izlaze iz x. Neka je $(x, y) \in E(D)$, onda postoji jedinstveno $s \in U$ takvo da je $s(x) = y$. Označimo taj element $s := s_y$. Dalje, neka je $\Omega := \{s_y \,|\, (x, y) \in E(D)\}$ tj. pokupimo sve grane koje izlaze iz čvora x. Ovako definisan skup će odgovarati skupu generatornih elemenata buduće grupe. Posmatrajmo grupu $U \leq Aut(D)$ i preimenujmo elemente od U na sledeći način: Za svako u preslikavanje s koje slika x u u označavamo sa s_u. Dokažimo da je digraf D tada izomorfan sa $Cay(U, \Omega)$: Hoćemo da pokažemo da za svako $u, v \in V(D)$, $(u, v) \in E(D)$ ako i samo ako $(s_u, s_v) \in E(Cay(U, \Omega))$, odnosno ako postoji $c \in \Omega$ tako da je $s_u c = s_v$. Dakle,

$(u, v) \in E(D) \iff (s_u(x), s_v(x)) \in E(D)$

$\iff (x, s_u^{-1}(s_v(x))) \in E(D)$, jer je $s_u^{-1} \in Aut(D)$
$\iff s_u^{-1} \circ s_v \in \Omega$
$\iff (\exists c \in \Omega)\, s_u^{-1} \circ s_v = c$
$\iff (\exists c \in \Omega)\, s_v = s_u c$

Znači da u Kejlijevom digrafu grupe U imamo granu (s_u, s_v) ako i samo ako $(u, v) \in E(D)$. $\square$

Na kraju ovog rada, osvrnimo se još jednom na teoremu koju je dokazao Fruht: Za svaku konačnu, netrivijalnu grupu $\mathbb{G}$ čiji je generatorni skup Ω, postoji prost, neusmeren graf Γ takav da je $Aut(\Gamma) \cong \mathbb{G}$.

Definicija 3.70 *Kažemo da konačna grupa $\mathbb{G}$ ima **grafički regularnu reprezentaciju, (GRR)**, ako postoji graf Γ takav da je $\mathbb{G} \cong \mathbb{A}ut(\Gamma)$ i $\mathbb{A}ut(\Gamma)$ ima regularno dejstvo na $V(\Gamma)$.*

Poznato je koje sve grupe imaju GRR. Naime, 1976. godine dokazano je da jedine rešive grupe koje **nemaju** GRR su:

- Abelove grupe eksponenta bar 2;
- Generalizovane diciklične grupe;
- $(a, b, c; a^2, b^2, c^2, abc(bca)^{-1}, abc(cab)^{-1})$;
- $(a, b; a^8, b^2, b^{-1}aba^{-5})$;
- $(a, b, c; a^3, b^3, c^2, a^{-1}b^{-1}ab, (ac)^2, (bc)^2)$;
- $(a, b, c; a^3, b^3, c^3, a^{-1}c^{-1}ac, b^{-1}c^{-1}bc, c^{-1}a^{-1}b^{-1}ab)$;
- $\mathbb{Z}_2^2$, $\mathbb{Z}_2^3$, $\mathbb{Z}_2^4$, $\mathbb{D}_6$, $\mathbb{D}_8$, $\mathbb{D}_{10}$, $\mathbb{A}_4$, $\mathbb{Q} \times \mathbb{Z}_k$, $k \in \{3, 4\}$.

Godzil[10]1981. godine pokazao je da svaka nerešiva grupa ima GRR, tako da je prethodna lista kompletna lista grupa koje nemaju GRR.

Može se dokazati naredno tvđenje [2].

Tvrđenje 3.71 *Neka je $\Gamma = (V(\Gamma), E(\Gamma))$ čvorno tranzititvan graf čija je grupa automorfizama $\mathbb{G} = Aut(\Gamma)$, i neka je $\mathbb{G}$ je Abelova grupa. Tada $\mathbb{G}$ ima regularno dejstvo nad $V(\Gamma)$ i grupa $\mathbb{G}$ je elementarna Abelova grupa u kojoj je svaki element reda 2.*

Za kraj navodimo još jedan interesantan rezultat (Babai, Godzil, Imrih, Lovas)[11]:

Tvrđenje 3.72 *Za konačnu grupu $\mathbb{G}$, koja nije ni Abelova, ni eksponenta bar 2, ni generalizovana diciklična, verovatnoća da je Kejlijev graf grupe $\mathbb{G}$ baš GRR, teži 1 kada $|G| \to \infty$. Odnosno skoro svi Kejlijevi grafovi su GRR, za dovoljno velike grupe. Babai i Godzil su pokazali da ovo važi i za nilpotentne grupe neparnog reda, ali daljeg rada na ovu temu nije bilo.*

[10] Chris Godsil, 1949 -
[11] László Babai, 1950 - ; Wilfried Imrich, 1941 - ; László Lovász, 1948 -

Glava 4

Zaključak

Grupa je, kao apstraktna algebarska struktura, skup sa jednom binarnom operacijom koja zadovoljava dobro poznate aksiome. Iz Kejlijeve tablice grupe veoma je teško spoznati suštinske osobine grupe. Cilj ovog rada je proučavanje veze između teorije grupa i teorije grafova. Tako se upoznajemo sa drugim pristupom upoznavanju strukture date grupe. Polazimo od toga da svakoj konačno generisanoj grupi možemo na prirodan način pridružiti graf. Dajemo definicije za Kejlijev obojen digraf i Kejlijev neusmeren graf grupe $\mathbb{G}$. Ispostavilo se da grafovi koji nastaju na taj način sadrže puno relevantnih informacija o grupi kojoj su pridružene. Kroz primere Kejlijevih (di)grafova najpoznatijih konačnih i nekih beskonačnih grupa, upoznali smo se sa nekim osnovnim karakteristikama Kejlijevog (di)grafa grupe. Videli smo dokaz tvrđenja da za svaku konačnu grupu $\mathbb{G}$ postoji prost graf Γ takav da je $Aut(\Gamma) \cong \mathbb{G}$. Neka od pitanja na koje smo dali odgovor u ovom radu su: Koji je potreban i dovoljan uslov da je digraf D Kejlijev digraf neke grupe? Da li je svaki čvorno-tranzitivan graf Kejlijev graf i da li važi obrnuto? Kada je automorfizam grupe ujedno i automorfizam njenog Kejlijevog grafa? Posebna pažnja je posvećena problemu reči gde smo dokazali veoma bitnu povezanost izmedju Kejlijevog grafa grupe i problema reči. Naime, pokazali smo da je problem reči rešiv za grupu $\mathbb{G}$ ako i samo ako se može konstruisati Kejlijev graf date grupe.

Literatura

[1] Baumslag, B., Chandler, B., *Theory and problems of group theory*, New York University, New York, 1968.

[2] Biggs, N., *Algebraic graph theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 1993.

[3] Chartrand, G., Lesniak, L., *Graphs & digraphs*, Wadsworth, Inc., California, 1979.

[4] Ganesan, A., *Cayley graphs and symmetric interconnection networks*, Proceedings of the Pre-Conference Workshop on Algebraic and Applied Combinatorics, 31st Annual Conference of the Ramanujan Mathematical Society, pp. 118-170, Trichy, Tamilnadu, India, 2016.

[5] Grossman, I., Magnus, W., *Groups and their graphs*, Mathematical association of America, Washington, 1964.

[6] Grulović, Z. M., *Osnovi teorije grupa*, Univerzitet u Novom Sadu, Novi Sad, 1997.

[7] Knauer, U., *Algebraic graph theory*, The Deutsche Nationalbibliothek, Berlin, 2011.

[8] Madarász, Sz. R., Crvenković, S., *Uvod u teoriju automata i formalnih jezika*, Univerzitet u Novom Sadu, Novi Sad, 1995.

[9] Meier, J., *Groups, graphs and trees*, Cambridge University Press, Cambridge, 2008.

[10] Sherman-Bennett, U. M., *On groups and their graphs*, Bard College at Simon's Rock, Great Barrington, 2016.

Biografija

Sonja Medojević rođena je 8. novembra 1991. godine u Novom Sadu. Osnovnu školu "Dositej Obradović" završila je 2006. godine. Godine 2010. završava gimnaziju "Isidora Sekulić", prirodno-matematički smer. Školske 2010/2011. upisuje osnovne studije na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu, smer Diplomirani profesor matematike. Godine 2015. upisala je master studije na istom fakultetu, smer Master profesor matematike. Položila je sve ispite predviđene nastavnim planom i programom i time stekla pravo na odbranu ovog rada.

u Novom Sadu, oktobra 2018.

Sonja Medojević

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU I INFORMATIKU
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:
RBR
Identifikacioni broj:
IBR
Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija
TD
Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal
TZ
Vrsta rada: Master rad
VR
Autor: Sonja Medojević
AU
Mentor: dr Rozália Sz. Madarász
MN
Naslov rada: Kejlijevi grafovi grupa
NR
Jezik publikacije: srpski (latinica)
JP
Jezik izvoda: srpski i engleski
JI
Zemlja publikovanja: Srbija
ZP
Uže geografsko područje: Vojvodina
UGP
Godina: 2018.
GO
Izdavač: Autorski reprint
IZ
Mesto i adresa: Novi Sad, Departman za matematiku i informatiku, Prirodno-matematički fakultet u Novom Sadu, Trg Dositeja Obradovića 4
MA
Fizički opis rada: 4 / 64 / 10 / 41
FO
Naučna oblast: Matematika
NO
Naučna disciplina: Teorija grupa i teorija grafova
ND
Ključne reči: Kejlijev graf grupe, problem reči, prezentacija grupe, automorfizmi
PO
UDK:
Čuva se: Biblioteka Departmana za matematiku i informatiku Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta u Novom Sadu
ČU
Važna napomena:

VN
Izvod: Cilj ovog master rada je da dublje izuči vezu između teorije grupa i teorije grafova. Svakoj grupi koja je konačno generisana možemo na prirodan način pridružiti graf. U zavisnosti da li ćemo obojiti grane tako dobijenog grafa i da li ćemo zanemariti orijentaciju grana, dobijamo različite grafičke prikaze strukture date grupe. Najznačajnije teoreme u radu su teorema koja daje potreban i dovoljan uslov da je digraf D Kejlijev digraf neke grupe i teorema koja tvrdi da je problem reči u grupi rešiv ako i samo ako se Kejlijev graf posmatrane grupe može konstruisati.
IZ
Datum prihvatanja teme od strane NN veća: 8.6.2017.
DP
Datum odbrane:
DO
Članovi komisije:
KO

Predsednik: dr Vojislav Petrović, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu
Član: dr Ivica Bošnjak, vanredni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu
Član: dr Rozália Sz. Madarász, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu, mentor

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE
DEPARTMENT OF MATHEMATICS AND INFORMATICS
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:
ANO
Identification number:
INO
Document type: Monograph type
DT
Type of record: Printed text
TR
Contents code: Master thesis
CC
Author: Sonja Medojević
AU
Mentor: dr Rozália Sz. Madarász
MN
Title: Cayley graphs of groups
XI
Language of text: Serbian (latin)
LT
Language of abstract: Serbian and English
LA
Country of publication: Serbia
CP
Locality of publication: Vojvodina
LP
Publication year: 2018.
PY
Publisher: Author's reprint
PU
Publ. place: Novi Sad, Department of mathematics and informatics, Faculty of Science, Trg Dositeja Obradovića 4
PP
Physical description: 4 / 64 / 10 / 41
PD
Scientific field: Mathematics
SF
Scientific discipline: Group theory and graph theory
SD
Key words: Cayley graphs of groups, word problem, group presentation, automorfism
SKW UC:
Holding data: The Library of the Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science, University of Novi Sad
HD
Note:

N
Abstract: This thesis deals with relationship between group theory and graph theory. Every finitely generated group we can associate with Cayley graph. We discuss the basic correspondences between the structure of a group and the structure of its Cayley graph. The most significant theorems in this paper are necessary and sufficient condition for a digraph D to be Cayley digraph of some group, and a theorem that claims that the word problem for a group is solvable if and only if Cayley graph of that same group is constructible.
AB
Accepted by Scientific Board on: 8.6.2017.
ASB
Defended:
DE
Thesis defend board:
DB

President: dr Vojislav Petrović, Full proffesor, Faculty of Science, Univercity of Novi Sad
Član: dr Ivica Bošnjak, Associate proffesor, Faculty of Science, Univercity of Novi Sad
Član: dr Rozália Sz. Madarász, Full proffesor, Faculty of Science, Univercity of Novi Sad, mentor