UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA
MATEMATIKU I INFORMATIKU

PODALGEBRE AUTOMATSKI PREDSTAVLJIVIH ALGEBRI

MASTER TEZA

Autor
Sonja Iličić

Mentor:
dr. Rozalia Sz. Madarasz

Novi Sad, 2015.

Sadržaj

Predgovor

Cilj ovog rada je proučavanje automatske predstavljivosti konačno generisanih podalgebri automatski predstavljivih algebri.
Prvo poglavlje ovog rada smo posvetili nastanku algoritma, njegovom intuitivnom i formalnom pojmu. Takođe smo se ukratko osvrnuli na život i rad poznatog arapskog matematičara po kom je algoritam dobio ime.
U drugoj glavi smo se upoznali sa poznatim naučnikom Alanom Tjuringom i sa njegovim, još poznatijim, pronalaskom – sa Tjuringovom mašinom. Objasnili smo način na koji Tjuringova mašina radi. U drugoj glavi smo takođe objasnili pojam pod nazivom: “Entscheidungsproblem“.
Treća glava je rezervisana sa Formalne jezike i automate, gde smo dali najvažnije definicije formalnih jezika i objasnili način na koji radi konačan automat.
U četvrtoj glavi smo objasnili šta je konvolucija, dali definiciju regularne relacije i uradili detaljno par ključnih primera. Zatim smo definisali i objasnili detaljnije šta je Automatska struktura kao i Automatski predstavljiva struktura i uradili detaljno primere za njih.
U petoj glavi smo proučavali podalgebre FA-predstavljivih algebri. Pokazali smo da iako je klasa unarno automatski predstavljivih algebri zatvorena u odnosu na formiranje konačno generisanih podalgebri, u opštem slučaju to ne važi. Konstruisanjem primera konačno-generisane FA-predstavljive algebre koja sadrži ne FA-predstavljivu konačno-generisanu podalgebru, pokazali smo da klasa FA-predstavljivih algebri nije zatvorena za konačno-generisane podalgebre. Dalje, ova nezatvorenost se odražava i u klasi algebri koje imaju samo unarne operacije. Međutim, klasa FA-predstavljivih algebri sa samo jednom unarnom operacijom je zatvorena za formiranje konačno-generisanih podalgebri.

Na kraju, bih želela da se zahvalim dr. Ivici Bošnjaku i dr. Borisu Šobotu na pruženom znanju, neophodnom za nastanak ovog master rada, kao i na razumevanju i podršci. Zahvalila bih se i svojim roditeljima, dedi, sestri i prijateljima na velikoj podršci koju su mi pružili. Najveću zahvalnost dugujem mojoj mentorki dr. Rozaliji Madarasz Szilagyi na znanju, savetima, pomoći i svesrdnoj podršci koju mi je pružila prilikom izrade ovog rada.

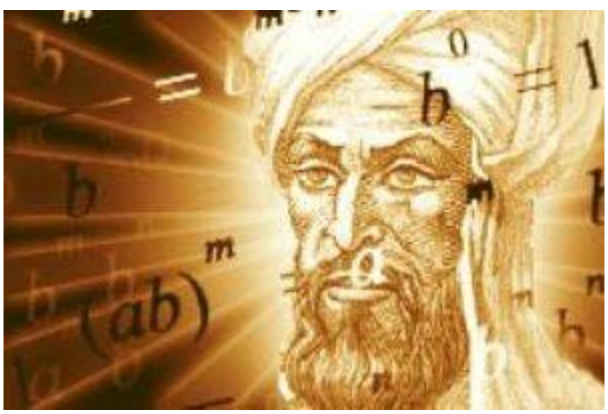
Glava 1

Algoritam

1.1 Istorija algoritma

Jedan od najznačajnijih arapskih matematičara, Abu Džafar Muhamed ibn-Musa al-Horezmi, (Abu Jafar Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi), je uspeo da svoje vlastito ime ucrta u osnove matematike. Tako je od prezimena ovog srednjovekovnog matematičara, prvog, čije ime vredi pominjati posle skoro pola milenijuma od poznog helenizma, nastala reč algoritam.

Abu Džafar Muhamed ibn-Musa al-Horezmi je rođen oko 780. godine nove ere u Horezmu, današnjem Uzbekistanu, a najveći deo svog života je proveo radeći kao naučnik u Bagdadu, stvarajući u Kući mudrosti.



Posle smrti al-Fazarija dolazi na mesto glavnog bibliotekara u Kući mudrosti, i tu funkciju časno obavlja sve do svoje smrti. On je bio centar oko koga su se okupljali naučnici, istoričari i pesnici, kojima je delio poslove i zaduženja, sve vreme posvećujući se pisanju. U ono vreme, njegova geografska karta sveta je bila najsavršenija, sastavio je najpouzdanije astronomske tablice, pisao je raspravu o sunčanom časovniku, proučavao trouglove i četvorouglove.
Njegovo najznačajnije delo je *Hisab al-džabr val mukabala*, što znači: “Knjiga o svođenju i dvostrukom oduzimanju”. Knjiga je napisana oko 820. godine, i ona predstavlja zbir i

sistematizaciju tada poznatih veština u rešavanju algebarskih jednačina. U tu grupu spadaju kvadratne jednačine, koje je al-Horezmi podelio na šest osnovnih tipova, do kojih dolazi primenama pravila al-džabar (sabirak može da pređe na drugu stranu jednačine uz promenu znaka) i al-mukabala (potiranje istih sabiraka na obe strane jednačine).
Međutim, za nastanak reči "algoritam" od ključne važnosti je njegovo drugo najznačajnije delo pod nazivom: "Al-Horezmi o indijskoj veštini računanja". Arapski original ovog spisa je izgubljen, a na latinskom je dobio naziv *Algoritmi de numero indorum*, početkom 12. veka.

Vekovima je ovo delo korišćeno u čitavoj Evropi, i mnogi koji su kasnije učili iz ovog dela nisu ni znali da je algoritam zapravo latinizovano Al-Horezmijevo ime, pa su taj pojam počeli da upotrebljavaju za postupak, proceduru uopšte. Otuda i u savremenoj matematici pojam algoritam.

1.2 Intuitivni pojam algoritma

Intuitivno možemo reći, da je algoritam precizan opis postupka za rešavanje nekog problema u konačnom broju koraka.

Velike svetske kompanije, prilikom razgovora za posao, kandidatima postavljaju neka neuobičajena, nelogična i na prvi pogled besmislena pitanja kao što je: „Kako staviti slona u frižider?"

Odgovor na ovo, naizgled besmisleno pitanje, glasi:
1. Otvoriti frižider
2. Staviti slona
3. Zatvoriti frižider

Odgovor nam daje dobar primer algoritma, koji se sastoji od tri koraka.

Svrha algoritma je rešavanje određenog problema. Svaki problem odlikuju dve karakteristike: ulazni i izlazni podaci. Podaci su matematički objekti koji pripadaju nekom konačnom ili prebrojivom skupu, dok se sam problem sastoji u pronalaženju određene uzročno-posledične veze između ulaza i izlaza, načina na koji se ulazne veličine transformišu kasnije u traženi rezultat. Poznati informatičar, Donald Knut (Donald Ervin Knuth), ističe pet ključnih svojstava intuitivnog pojma algoritma:

1. postojanje ulaza
2. postojanje izlaza
3. konačnost
4. određenost
5. efektivnost

Prva dva svojstva nam govore da je algoritam sredstvo za rešavanje problema. Konačnost ograničava broj elementarnih koraka, potrebnih za rešavanje problema algoritma, na konačan. Određenost nalaže da svaki korak algoritma bude precizno i jednoznačno zadat. Efektivnost garantuje da su koraci koji čine algoritam dovoljno elementarni a ceo algoritam jednostavan i lak za proveru.
Dakle, zaključimo da je algoritam postupak za rešavanje nekog problema koji je formalno napisan ali i dalje intuitivno razumljiv.

1.3 Formalizacija pojma algoritam

Iako su precizni postupci za rešavanje matematičkih problema postojali i mnogo ranije, formalna definicija algoritma nastala je tek početkom dvadesetog veka. U jeku reforme i novog utemeljivanja matematike, tražio se odgovor na pitanje da li postoji algoritam kojim se mogu dokazati sve matematičke teoreme. Ovim problemom bavilo se nezavisno nekoliko istaknutih matematičara tog vremena.

Mladi austrijski matematičar Kurt Gedel (Kurt Gödel, 1906-1978) 1931. godine objavljuje svoja otkrića i stavlja tačku na ideje da je sistem aksioma PA dovoljan za izvođenje svih tvrđenja na skupu prirodnih brojeva. Gedel dokazuje da postoje tvrđenja (tj. formule prvog reda) koja važe u skupu prirodnih brojeva, ali ipak nisu teoreme formalne teorije PA. Dokazao je da ukoliko pođemo od bilo kojeg skupa formula Q, koje važe na skupu prirodnih brojeva, takvog da:

- Q sadrži sve aksiome PA
- Postoji algoritam koji rešava problem pripadnosti date formule A skupu aksioma Q

tada uvek postoji formula B koja važi na skupu prirodnih brojeva, ali nije formalna posledica od Q. Drugim rečima, ne postoji aksiomatska teorija koja potpuno formalizuje prirodne brojeve. Kao direktnu posledicu ovoga, dobijamo da problem odlučivanja za teoriju strukture prirodnih brojeva, nije algoritamski rešiv. Ovo je ujedno i prvi algoritamski nerešiv problem u istoriji matematike.
Gedel je tokom ovog svog istraživanja koristio (parcijalno) rekurzivne funkcije, koje spadaju u posebnu klasu aritmetičkih funkcija. Nematematičko tvrđenje: „Ne postoji algoritam koji rešava problem“, Gedel, u svojim dokazima, zamenjuje sa: „aritmetička funkcija f nije rekurzivna“.
Tako njegova teorema nekompletnosti aritmetike glasi: ne postoji konzistentno rekurzivno proširenje PA koje aksiomatizuje teoriju prirodnih brojeva.

Nedugo zatim, američki matematičari Alonzo Čerč (Alonzo Church, 1903-1995) i Stiven Klini (Stephen C. Kleene, 1909-1994) sredinom tridesetih godina, su razvili λ-račun, formalni sistem koji leži u osnovi većine funkcionalnih programskih jezika. Aritmetičke funkcije koje je ovaj sistem mogao da računa bile su upravo Gedelove rekurzivne funkcije. Tako 1936. godine Čerč predlaže dogovor da se intuitivni pojam algoritma poklapa sa λ-izračunljivošću / rekurzivnim funkcijama.

Nekoliko nedelja kasnije, engleski matematičar Alan Tjuring (Alan M. Turing, 1912-1954) podneo je uredništvu časopisa Londonskog matematičkog društva svoj rad u kojem uvodi koncept izračunljivosti preko računskog modela, idealizacije računske mašine koja će kasnije postati poznata pod imenom Tjuringova mašina. Londonsko matematičko društvo je zahtevalo od Tjuringa da dopuni svoj rad tako što bi svoj koncept izračunljivosti uporedio sa λ-računom. Tjuring je ubrzo to i učinio, i ispostavilo se da su ta dva sistema potpuno ekvivalentna po računskoj moći. Tako je nastala takozvana Čerč-Tjuringova teza: problem je algoritamski rešiv ako i samo ako ga može rešiti Tjuringova mašina.

Iste 1936. godine Emil Post (Emil L. Post 1897-1954) uvodi Postove sisteme, od kojih se kasnije razvijaju formalne gramatike. Ovaj sistem računanja se takodje ispostavlja kao ekvivalent Tjuringovoj mašini, λ-računu i Gedelovim rekurzivnim funkcijama, u smislu da je klasa diskretnih funkcija koje ti sistemi mogu da izračunavaju, u svim slučajevima ista.

Mi ćemo se zadržati kod Tjuringa i kod svetski poznate, sve popularnije, Tjuringove mašine.

Glava 2

Tjuring i Tjuringova mašina

2.1 Život Alana Tjuringa

Alan Tjuring (Alan Turing) je rođen 1912. godine u Londonu. Roditelji su mu škotskog porekla, aristokratskog. Kako i doliči jednom plemiću, pohađao je najelitnije škole svoga vremena u kojima je vidno ispoljavao svoj talenat za nauku.

Nakon završene srednje škole, Tjuring upisuje Kembridž, gde je 1934. godine, diplomirao na matematici sa izuzetnim uspehom. Naredne godine postaje asistent na koledžu i uspešno brani doktorsku disertaciju na temu centralne granične teoreme. Pomenuta teorema je bila dokazana još 1922, što Tjuring nije znao, ipak to nije ni na koji način umanjilo utisak komisije o njegovom originalnom i preciznom radu.

1936. godine, Alan Tjuring objavljuje jedno od svojih najznačajnijih dela, danas poznato pod nazivom: „Tjuringove mašine“. Negde u to vreme, Alan Tjuring počinje da radi na određeno vreme u Državnoj školi GCCS (Government Code and Cypher School), školi za kodiranje i šifre. Tamo se bavio pokušajima razbijanja šifara nemačke sofisticirane mašine za kodiranje „Enigme“. Počeo je drugi svetski rat i Tjuring je ostao u timu koji se bavio dešifrovanjem

Enigme. Pomogao je da se razvije mašina „Bombe“ koja je pratila rad Enigme i bila od velike pomoći pri njenom dešifrovanju.

U prvim godinama nakon rata, Tjuring se doselio u londonsko naselje Ričmond, gde je radio u Nacionalnoj laboratoriji za fiziku. Tamo je upoznao Arlonda Mareja (Arlond Murray) sa kojim je stupio u emotivnu vezu. Osuđen zbog veze sa muškarcem, Alan Tjuring je izbačen sa mesta konsultanta u GCCS. 7 juna 1954. godine, Tjuring je preminuo.

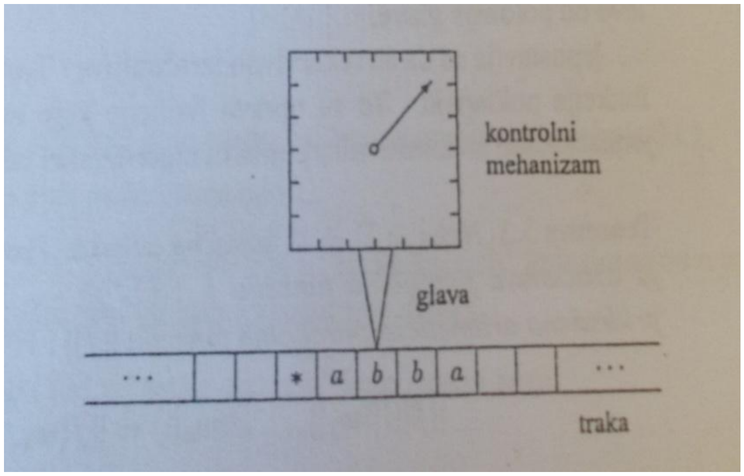
Narednih trideset godina, ime Alan Tjuring je nestalo iz istorije. Mnogo kasnije, tačnije 1966. godine Udruženje za računarske uređaje ACM je počelo da dodeljuje Tjuringovu nagradu za izuzetan doprinos u teoriji ili u tehničkim rešenjima u računarskoj nauci.

Alan Tjuring je osuđen u vremenu, ali živi u večnosti.

2.2 Tjuringova mašina

Iz potrebe za definisanjem pojma izračunljivosti preko računskog modela, sredinom tridesetih godina, Alan Tjuring uvodi Tjuringove mašine. Podsetimo se prvo nekih osnovnih pojmova koji će nam koristiti u opisu rada Tjuringove mašine. Definišimo prvo azbuku, kao konačan, neprazan skup simbola nedeljive celine. Svaki konačan niz simbola iz azbuke zovemo reč nad tom azbukom. Prazna reč je reč koja ne sadrži ni jedan simbol, i nju ćemo obeležavati sa λ. Skup svih reči nad azbukom A ćemo obeležavati sa A^*. Jezik je proizvoljan podskup skupa svih reči nad datom azbukom.

Osnovni model Tjuringove mašine je jednostavan. On se, najpre, sastoji od *kontrolnog mehanizma* koji može da bude u jednom od konačnog broja stanja. Stanja se menjaju u zavisnosti od toka rada mašine. Drugi deo Tjuringove mašine je *traka*, koja je beskonačna sa obe strane, i izdeljena na polja. U svakom polju trake se nalazi neki simbol iz unapred zadate azbuke u kojoj radi Tjuringova mašina. Polja, u kojima se ne nalaze simboli azbuke, sadrže simbol blanko, prazan simbol, koji označavamo sa *. Kontrolni mehanizam i traku povezuje *glava*, koja u svakom trenutku skenira jedno polje trake. Glava čita simbol upisan na traci, i može da obriše isti, i umesto njega upiše novi simbol. Takođe, glava može da se pomeri levo ili desno na traci, ili da izazove promenu stanja kontrolnog mehanizma. Rad Tjuringove mašine je određen programom, koji u zavisnosti od trenutnog stanja i simbola koji glava čita, definiše akciju glave na traci i naredno stanje kontrolnog mehanizma. Za neku kombinaciju stanja i simbola, program može da naloži obustavljanje rada mašine.



Formalno, Tjuringova mašina je uređena sedmorka $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \top, \perp)$, gde je Q - konačan skup stanja kontrolnog mehanizma, Σ - ulazna azbuka (skup simbola pomoću kojih su zapisani ulazni podaci), Γ – azbuka trake (pored ulaznih simbola sadrži i simbol * za blanko),q_0– početno stanje, $\top$ - stanje prihvatanja, $\perp$ - stanje odbijanja. δ je funkcija prelaza data sa

$$\delta\colon Q \times \Gamma \rightarrow (\Gamma \cup \{L, R, H\}) \times Q$$

gde L, R, H redom predstavljaju komande za pomeranje glave levo, desno i za zaustavljanje mašine. Ove komande ne pripadaju nijednom od gore definisanih skupova.

Kako bismo pratili rad Tjuringove mašine, potrebno je uvesti pojam trenutne konfiguracije.
Konfiguracija je uređena trojka $(w_1, q, w_2) \in \Gamma^* \times Q \times \Gamma^*$. Ovo znači da je u datom trenutku mašina u stanju q, da skenira prvi karakter reči w_2 i da su reči w_1 i w_2 redom levo, odnosno desno od pozicije glave. Pri tome ove reči reprezentuju samo „interesantni" deo trake, dok su ostala polja trake popunjena praznim simbolima *.
Funkciju: $\delta(q, a) = (\alpha, q')$ tumačimo kao komandu: „ako si u stanju q, a glava čita na traci simbol a, uradi α i pređi u stanje q'", gde ako je $\alpha \in \Gamma$, briše se simbol u polju trake kojeg skenira glava i umesto njega se upisuje α. Ako je $\alpha = L$ glava se pomera ulevo, za $\alpha = R$, glava se pomera udesno, dok se za $\alpha = H$, mašina zaustavlja.

Tjuringova mašina uvek započinje rad trojkom (w, q_0, λ) gde je w ulazna reč, q_0 početno stanje, a λ prazna reč. Jezik Tjuringove mašine M, je skup svih ulaznih reči koje nakon konačno mnogo koraka M prevode u prihvatno stanje. Označavamo ga sa $L(M)$. Za mašine $M1$ i $M2$ kažemo da su ekvivalentne ako je $L(M1) = L(M2)$.

Postoje i nešto složeniji modeli Tjuringovih mašina, osposobljeni da rade bolje i brže u skladu sa vremenom i napretkom nauke. Takve su Višetračne Tjuringove mašine, koje umesto jedne, imaju više traka, kojima operiše glava. One su u prednosti u odnosu na osnovni model, jer glava može istovremeno da pristupi većem broju simbola, pa je samim tim rad na Višetračnoj Tjuringovoj mašini brži. Postoje i Univerzalne Tjuringove mašine koje mogu da simuliraju rad proizvoljne osnovne Tjuringove mašine.

2.3 Entscheidungsproblem

David Hilbert (David Hilbert) je 1928. godine postavio izazov poznat kao Entscheidungsproblem. Entscheidungsproblem je traženje algoritma koji će odlučiti da li je data formula prvog reda valjana. Prema teoremi o kompletnosti logike prvog reda formula je valjana ako i samo ako je teorema, odnosno ako i samo ako se može dokazati iz aksioma.

Poreklo ovog problema datira još iz 17. veka od G. Lajbnica (Gottfried Wilhelm Freiherr (baron) von Leibniz), koji nakon što je konstruisao uspešnu mehaničku mašinu za računanje, želeo je da napravi mašinu koja bi mogla da manipuliše simbolima, sa ciljem da odredi vrednosti matematičkih iskaza. Došao je do zaključka da bi prvi korak morao biti konstruisanje čistog formalnog jezika i njegov dalji rad upravljen je prema tom cilju. 1928. godine D. Hilbert i V. Akerman (Wilhelm Friedrich Ackermann) su postavili pitanje koje se ticalo ovoga, da bi iste godine na internacionalnoj konferenciji D. Hilbert postavio tri pitanja, od kojih je treće postalo poznato kao Entscheidungsproblem. Pre ovoga, D. Hilbert je čvrsto verovao da ne postoji nerešiv problem.
1935. Tjuring je napisao rad ”*On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem*”. Razvio je logički paradoks koji je odgovorio na Hilbert-ovo pitanje, dokazom da Entscheidungsproblem nema rešenje.
Oslanjajući se na ranija dela S.Klinija (Stephen Kleene), A.Tjuring je redukovao Halting problem za Tjuringovu mašinu na Entscheidungsproblem.
K. Gedel (Kurt Gödel), utiče na rad obojice, svojim radom na teoremi o nepotpunosti. Entscheidungsproblem je povezan sa Hilbertovim desetim problemom, koji traži algoritam za odlučivanje da li Diofantova jednačina ima rešenje. Nepostojanje algoritma ustanovljeno je od J. Matijaševića (Yuri Matijasevic) 1970. koji takođe daje negativan odgovor na Entscheidungsproblem.

Glava 3

Formalni jezici i automati

3.1 Konačni automati

Konačni automati u najširem smislu obuhvataju strukture različitih namena i osobina. Neki od njih služe samo za prepoznavanje nizova ulaznih simbola, drugi služe kao prevodioci, dok treći služe kao generatori određenih nizova izlaznih signala. Neformalno rečeno, konačan automat može biti u jednom od konačno mnogo stanja. Izdvajamo početno stanje iz pomenutog skupa, kao i skup završnih stanja. Kažemo da automat prihvata ulaznu reč, ako ta učitana reč dovodi automat iz početnog, u neko od završnih stanja. U suprotnom, kažemo da automat ne prihvata ulaznu reč.

Formalno, konačan automat je uređena petorka $A = (S, \Sigma, \delta, q_0, F)$ gde je S – konačan skup stanja, Σ – ulazna azbuka, q_0 – početno stanje, F – skup završnih stanja. δ je funkcija prelaza data sa

$$\delta : S \times \Sigma \rightarrow P(S)$$

Jezik automata A je skup svih onih reči iz Σ^* koji automat prevode iz početnog stanja, u jedno od završnih stanja.

<u>**Definicija 3.1.1**</u> Neka je $A = (S, \Sigma, \delta, q_0, F)$ automat. ***Jezik automata*** A jeste skup $L(A)$ definisan sa:

$$L(A) = \{w \in \Sigma^* \mid \delta(q_0, w) \cap F \neq \emptyset\}.$$

Ako $w \in L(A)$ kažemo da A prihvata (ili prepoznaje) reč w. □
□
Lako zaključujemo da automati ne mogu pokriti skup svih jezika, jer jezika ima više nego automata.

Teorema 3.1.1 Neka je Σ neka azbuka. Tada postoji neprebrojivo mnogo jezika nad Σ koji nisu jezici automata.

3.2 L_3 jezici (Regularni jezici)

Definicija 3.2.1 ***Jezik*** nad Σ, gde je Σ neka azbuka, je svaki podskup skupa svih reči Σ^*.

Među jezicima, tri najvažnije operacije su sabiranje (+), konkatenacija (·) i iteracija (*). Najveći prioritet ima iteracija (*), zatim konkatenacija (·), pa sabiranje (+), gde pomenute operacije definišemo na sledeći način: ako su *R, S* iz *P(Σ*)* onda važi

$R + S = R \cup S$

$R \cdot S = \{ w_1 w_2 : w_1 \in R \ \wedge \ w_2 \in S \}$

$R^* = \{ w : (\exists\, n \in \mathrm{N})\ w \in R^n \}$, gde je $R^0 = \{\lambda\}$, $R^{n+1} = R^n \cdot R$.

Algebru

$L_\Sigma = (P(\Sigma^*), +, \cdot, \{\lambda\}, *)$ zovemo ***algebra jezika*** nad Σ.

Regularni jezici su važna potklasa jezika. Skup regularnih jezika nad Σ, definišemo kao najmanji skup jezika nad Σ koji sadrži sve jednoelementne jezike $\{a\}$, $a \in \Sigma$, kao i jezike $\emptyset$ i $\{\lambda\}$, i zatvoren je u odnosu na operacije +, · i *. Još ćemo regularne jezike definisati kao vrednosti *regularnih izraza*.

Definicija 3.2.2 Neka je Σ neka azbuka. Tada ***regularne izraze*** nad Σ dobijamo na sledeći način:

a) $\emptyset$, λ su regularni izrazi nad Σ;
b) Ako je $a \in \Sigma$, onda je a regularni izraz nad Σ ;
c) Ako su r i s regularni izrazi nad Σ onda su i $(r+s)$, $(r \cdot s)$ i (r^*) regularni izrazi nad Σ.

Skup svih regularnih izraza nad Σ označavamo sa $Reg(\Sigma)$. □
□
Regularni izrazi su objekti sintaktičke prirode, gde su +, ·, * samo simboli, za razliku od ranije uvedenih operacija +, ·, * među jezicima. Ako interpretiramo regularne izraze u algebri jezika dobijamo da svaki regularni izraz predstavlja, ustvari, neki jezik.

Definicija 3.2.3 Za jezik kažemo da je ***regularan*** ako se može predstaviti regularnim izrazom. □

□

Teorema 3.2.1 Jezik svakog konačnog automata je regularan.

Postavlja se pitanje da li važi i obrnuto, odnosno, da li za svaki regularan jezik postoji konačan automat koji ga prihvata. Odgovor daje sledeća teorema, poznata kao „*teorema Kleenija*“

Teorema 3.2.2 Jezik je regularan ako i samo ako postoji konačan automat koji ga prihvata.

Ipak, ekvivalentnost između pojmova *regularan jezik* i *jezik prihvatljiv nekim konačnim automatom*, još uvek ne daje dovoljno efikasan način za proveravanje da li je neki jezik regularan ili nije. Sledeće tvrđenje, poznato pod nazivom „*Pumping Lema*“ omogućava da u nekim slučajevima dokažemo da neki jezik nije regularan.

Lema 3.2.1 Neka je L regularan jezik. Tada važi:

$(\exists\ n \in \mathrm{N})\ (\forall z\ \in L)\ (|z| \geq n \Rightarrow (\exists\, u, v, w\ \in \Sigma^*)\ (z = uvw\ \wedge\ |uv| \leq n\ \wedge\ |v| \geq 1\ \wedge (\forall\, i \in \mathrm{N})\ (uv^i w \in L))$ gde je sa $|uv|$ označena dužina reči.

Lema 3.2.2 Neka su A i B dva konačna automata sa ulaznim azbukama Σ_1, odnosno Σ_2. Tada:

a) Postoji automat C takav da je $L(C) = L(A) \cap L(B)$
b) Postoji automat D takav da je $L(D)=\Sigma_1^* \setminus L(A)$ □

Teorema 3.2.3 Postoji algoritam koji za svaka dva konačna automata utvrđuje da li su ekvivalentni.

Jezike možemo zadati i preko *generativne gramatike*. Suštinu gramatike čini konačan skup nekih pravila izvođenja, koja zovemo produkcije. Produkcije nam govore o tome kako polazeći od početnog simbola dobijamo nove reči. Koristimo takozvane *neterminalne simbole* kao pomoćne simbole, i *terminalne simbole* – simbole azbuke.

<u>**Definicija 3.2.4**</u> ***Generativna gramatika G*** je uređena četvorka (V,T,S,P) gde su V i T konačni, disjunktni skupovi, $S \in V$, a P je konačan skup uređenih parova (α, β) gde su $\alpha, \beta \in (V \cup T)^*$ i reč α sadrži bar jedan simbol iz V. □

□

V je skup neterminalnih simbola, T skup terminalnih, S je oznaka za početni simbol, dok P označava skup produkcija. Po dogovoru, produkcije (α, β) obeležavamo sa $\alpha \rightarrow \beta$. Umesto *generativna gramatika* često ćemo govoriti i samo *gramatika*. Ako eksplicitno nije rečeno drugačije, važe sledeći dogovori:

- Velikim slovima A,B,C,D,E i S se označavaju neterminalni simboli, gde je S početni simbol.
- Malim slovima a, b, c, d, e i ciframa se označavaju terminalni simboli.
- Velikim simbolima X,Y,Z se označavaju simboli koji su neterminalni ili terminalni.
- Malim slovima u, v, w, x, y, z se označavaju terminalne reči (reči sastavljene od terminalnih simbola).
- Malim grčkim slovima $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ se označavaju reči sastavljene od terminalnih i neterminalnih slova.

Definicija 3.2.5 Neka je $G = (V,T,S,P)$ gramatika. Definišimo binarnu relaciju $\underset{G}{\Rightarrow}$ na skupu $(V \cup T)^*$ na sledeći način: ako su $\alpha, \beta \in (V \cup T)^*$, tada je $\alpha \underset{G}{\Rightarrow} \beta$ akko postoje reči $\alpha_1, \alpha_2 \in (V \cup T)^*$ i postoji produkcija $\gamma \to \delta$ iz P tako da je $\alpha = \alpha_1 \gamma \alpha_2$ i $\beta = \alpha_1 \delta \alpha_2$.
Relaciju $\overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}}$ na skupu $(V \cup T)^*$ definišemo kao refleksivno-tranzitivno zatvorenje relacije $\underset{G}{\Rightarrow}$.
□

Po dogovoru, ako je jasno o kojoj gramatici je reč, umesto $\underset{G}{\Rightarrow}$ odnosno $\overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}}$ pisaćemo $\Rightarrow$ odnosno $\overset{*}{\Rightarrow}$. Po definiciji refleksivno-tranzitivnog zatvorenja relacije imamo da $\alpha \overset{*}{\Rightarrow} \beta$ ako i samo ako $\alpha = \beta$ ili postoji konačan niz reči $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ iz $(V \cup T)^*$ tako da je $\alpha = \alpha_1$, $\beta = \alpha_n$ i $\alpha_i \Rightarrow \alpha_{i+1}$ za sve i, $1 \le i \le n$.
Svaki konačan niz reči $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ iz $(V \cup T)^*$, takav da je $\alpha_1 = S$ i $\alpha_i \Rightarrow \alpha_{i+1}$, za sve i, $1 \le i \le n$, zovemo *izvođenje* (*reči* α_n) *u gramatici* G.

Definicija 3.2.6 Neka je $G = (V,T,S,P)$ gramatika. ***Jezik generisan gramatikom G*** jeste jezik $L(G)$ definisan sa

$$L(G) = \left\{ w \in T^* : S \overset{*}{\Rightarrow} w \right\}.$$
□

Imajući u vidu dogovore o korišćenju različitih tipova slova za različite simbole, gramatika je jednoznačno određena samim navođenjem produkcija.

Definicija 3.2.7 Neka je $G = (V,T,S,P)$ gramatika. Za G kažemo da je tipa 3 ako su sve produkcije oblika:

$$A \to wB \text{ i } A \to w, \text{ gde } A, B \in V, \; w \in T^*$$

Klasu jezika koji se mogu generisati gramatikama tipa 3, zovemo jezici tipa 3, i obeležavamo ih sa L_3. □

Jezike tipa 3 zovemo i *regularni jezici*. Vidimo da su regularni jezici, jezici koji se mogu predstaviti regularnim izrazima (odnosno jezici konačnih automata). Hoćemo da pokažemo da gramatike tipa 3 generišu tačno klasu jezika konačnih automata, a to upravo dokazuju sledeće dve teoreme.

Teorema 3.2.4 Za svaku gramatiku *G* tipa 3 postoji konačan automat A_G takav da je $L(A_G) = L(G)$.

Teorema 3.2.5 Neka je *A* konačan automat. Tada postoji gramatika G_A tipa 3 takva da je $L(G_A) = L(A)$.

Posledica 3.2.1 Klasa regularnih jezika se poklapa sa klasom jezika tipa 3.

3.3 L_2 (Kontekstno slobodni) i L_1 (Kontekstno osetljivi) jezici

Definicija 3.3.1 Neka je *G* = (*V*,*T*,*S*,*P*) gramatika. Za *G* kažemo da je tipa 2 ako su sve produkcije oblika:

$A \to \alpha$, gde $A \in V,\ \alpha \in (V \cup T)^*$.

Klasu jezika koji se mogu generisati gramatikama tipa 2, zovemo jezici tipa 2, i obeležavamo ih sa L_2. □

Gramatike tipa 2 zovemo *kontekstno slobodne gramatike* ili *CF gramatike*, a odgovarajuće jezike *kontekstno slobodni jezici*, *jezici tipa 2* ili *CF jezici*.

Definicija 3.3.2 Neka je *G* = (*V*,*T*,*S*,*P*) gramatika. Za *G* kažemo da je tipa 1 ako su sve produkcije oblika:

1) $\alpha A\beta \to \alpha\gamma\beta$, gde $A \in V,\ \alpha,\beta,\gamma \in (V \cup T)^*, \gamma \neq \lambda$,
2) $S \to \lambda$, gde je λ oznaka za praznu reč,

pod uslovom da, ako gramatika sadrži produkciju $S \to \lambda$, onda se simbol *S* ne javlja sa desne strane ni jedne produkcije gramatike *G*. □

Gramatike tipa 1 zovemo *kontekstno osetljive gramatike* ili *CS gramatike*, a odgovarajuće jezike *kontekstno osetljivi jezici* , *jezici tipa 1* ili *CS jezici*.

Definicija 3.3.3 Za dve gramatike kažemo da su ***ekvivalentne*** ako generišu isti jezik. □

Teorema 3.3.1 Za svaku *CF* gramatiku postoji ekvivalentna *CF* gramatika koja zadovoljava sve uslove za *CS* gramatike.

Posledica 3.3.1 Za *CF* gramatike postoji algoritam za utvrđivanje da li jezik generisan datom *CF* gramatikom sadrži praznu reč ili ne.

Posledica 3.3.2 Svaki *CF* jezik je ujedno i *CS* jezik tj. $L_2 \subseteq L_1$.

Za neku gramatiku kažemo da je *λ-slobodna* ako ni jedna produkcija te gramatike nema sa desne strane simbol λ.

Teorema 3.3.2 Za svaku gramatiku G tipa 2 možemo konstruisati gramatiku G_1 tipa 2 tako da je G_1 λ-slobodna i važi:

$$L(G_1) = L(G) \setminus \{\lambda\}.$$

Teorema 3.3.3 Postoji algoritam koji za svaku *CF* gramatiku *G* i svaku reč *w* odlučuje o tome da li reč *w* pripada ili ne pripada jeziku generisanim gramatikom *G*.

Posledica 3.3.3 Postoji algoritam pomoću koga za svaku *CF* gramatiku *G* i svaki konačan jezik *L* možemo odlučiti da li je $L \subseteq L(G)$ i da li je $L \cap L(G) = \emptyset$.

Za *CF* gramatike je odlučivo da li generišu konačan ili beskonačan jezik. Takođe, moguće je pokazati da neki jezici nisu *CF* jezici. Oba tvrđenja se dokazuju preko jedne leme, poznate kao *Pumping lema* za *CF* jezike.

Lema 3.3.1 Za svaki *CF* jezik *L* postoje brojevi *p* i *q* takvi da za svaku reč *v* iz *L* koja je duža od *p* važi sledeće: postoje reči *u ,x, w, y, z* takve da je

$$v = uxwyz,\ |xwy| \leq q,\ xy \neq \lambda,$$

i za sve $i \in N$ važi:

$$ux^i wy^i z \ \in L.$$

Teorema 3.3.4 Postoji algoritam koji za proizvoljnu *CF* gramatiku *G* odlučuje o tome da li je jezik *L(G)* konačan ili beskonačan.

Definicija 3.3.4 Za gramatiku kažemo da je ***rastuća*** ako za sve njene produkcije $\alpha \to \beta$ važi $|\alpha| \leq |\beta|$ □

Primetimo da rastuće gramatike ne sadrže produkciju $S \to \lambda$.

Teorema 3.3.5 Svaka rastuća gramatika generiše kontekstno osetljiv jezik.

Posledica 3.3.4 Postoji kontekstno osetljiv jezik koji nije kontekstno slobodan.

Teorema 3.3.6 Postoji algoritam koji za svaku kontekstno osetljivu gramatiku $G = (V,T,S,P)$ i za proizvoljnu reč $w \in T^*$ odlučuje o tome da li je w u $L(G)$ ili nije.

Spomenimo još da je za CS jezike, odnosno CF jezike, moguće opisati neku vrstu automata koji prihvataju tačno klasu CS jezika, odnosno, klasu CF jezika.

3.4 L_0 jezici

Definicija 3.4.1 Gramatika tipa 0 je svaka generativna gramatika. Klasu jezika koji se mogu generisati gramatikama tipa 0, zovemo jezici tipa 0, i obeležavamo ih sa L_0. □

Klasa jezika tipa 0 je specifična po tome što za razliku od klasa jezika tipa i (i = 1,2,3), ne postoji algoritam koji odlučuje o problemu pripadanja reči. Kažemo da je problem pripadanja reči za klase jezika i (i = 1,2,3) *algoritamski odlučiv*. Svaki algoritam je *procedura*. *Procedura* je postupak koji se može opisati pomoću izraza konačne dužine (na nekoj konačnoj azbuci) i koji ima tačno određene diskretne korake, koji se posle zadavanja ulaznih promenljivih mogu sprovesti mehanički (bez dodatnih informacija i razmatranja). Algoritam je procedura koja se za svaki ulazni podatak završava u konačno mnogo koraka. Naravno, nije svaka procedura algoritam. Jezike kod kojih je problem pripadanja reči algoritamski odlučiv, zovemo *rekurzivnim jezicima*.

Definicija 3.4.2 Za neki jezik $L \subseteq \Sigma^*$ kažemo da je ***rekurzivan*** ako je problem pripadanja reči za L algoritamski odlučiv tj. ako postoji algoritam koji za svaku reč $w \in \Sigma^*$ odlučuje o tome da li w pripada ili ne pripada jeziku L.
Za jezik L kažemo da je ***rekurzivno nabrojiv*** ako postoji procedura koja nabraja (u nekom redosledu sa ili bez ponavljanja) sve reči jezika L. □

Možemo zaključiti da ako je jezik $L \subseteq \Sigma^*$ rekurzivan, onda je rekurzivan i njegov komplement $\overline{L}$, a svaki rekurzivan jezik je ujedno i rekurzivno nabrojiv. Dovoljno je u nekom redosledu generisati sve reči iz Σ^* a zatim pomoću algoritma odlučivanja izdvajati iz tog niza one reči koje pripadaju jeziku L. Ovim smo dali proceduru za nabrajanje svih reči iz L.

Lema 3.4.1 Jezik $L \subseteq \Sigma^*$ je rekurzivan akko su L i $\overline{L}$ rekurzivno nabrojivi.

Teorema 3.4.1 Postoji rekurzivno nabrojiv jezik koji nije rekurzivan

Označimo sa R klasu rekurzivnih jezika, a sa E klasu rekurzivno nabrojivih jezika. Iz prethodne teoreme sledi da je R prava podklasa klase E.

Teorema 3.4.2 Svaki CS jezik je rekurzivan i svaki jezik tipa 0 je rekurzivno nabrojiv.

Teorema 3.4.3 Postoji rekurzivan jezik koji nije tipa 1.

Za dokazivanje da postoji jezik tipa 0 koji nije rekurzivan koristimo Tjuringovu mašinu.

Glava 4

Automatske strukture

4.1 Motivacija

Intuitivno, za relacijsku strukturu kažemo da je *automatska* ako je nosač regularan jezik nad nekom konačnom azbukom, a sve fundamentalne relacije su prepoznatljive nekim konačnim automatom. Struktura je automatski predstavljiva ako je izomorfna sa nekom automatskom strukturom.

Mogli bismo reći da je teorija automatskih struktura motivisana problematikom izračunljivosti. Za strukturu kažemo da je izračunljiva (computable) ako su joj domen i fundamentalne relacije izračunljive pomoću neke Tjuringove mašine. Kako se osamdesetih godina prošlog veka ispostavilo da je svaka izračunljiva čisto relacijska struktura ekvivalentna sa nekom polinomno-izračunljivom strukturom, B. Kousainov (B. Khoussainov) i A. Nerode (A. Nerode) su 1995. godine predložili da se krene sa sistematskim izučavanjem struktura koje su suštinski algoritamski jednostavnije. Konkretno, predložili su korišćenje konačnih automata kao baznog algoritamskog modela za prepoznavanje nosača i fundamentalnih relacija date strukture.

Ipak, ideja da se konačni automati koriste prilikom izučavanja algebarskih struktura potiče još od Buhi-ja (Büchi-ja), koji je 1960. godine koristio konačne automate da dokaže da je tzv. Presburgerova aritmetika (tj, teorija prvog reda strukture prirodnih brojeva sa operacijom +) odlučiva. Iako je Hodson (Hodson) 1982. godine, inspirisan tim dokazom, definisao pojam automatski odlučive teorije, njegov rad je ostao nezapažen. U suštini, 1995. godine Kousainov i Nerode ponovo otkrivaju pojam automatske strukture i iniciraju sistematsko izučavanje te oblasti. Ispostavilo se da je projekat plodan i za relativno kratko vreme doneo je veoma interesantne rezultate.

Već i letimičnim pregledom odgovarajuće literature možemo zaključiti da je količina rezultata koji se odnose na automatske strukture ogromna. Mi ćemo na ovom mestu prikazati samo početne pojmove i rezultate koji se odnose na automatske odnosno automatski predstavljive strukture.

U nastavku rada ćemo dati definiciju regularne relacije, automatske strukture i automatski predstavljive strukture. Detaljno ćemo razmatrati nekoliko ključnih primera, kao i osnovne osobine tih struktura. Zatim ćemo se zadržati na pitanju automatske predstavljivosti konačno generisanih podalgebri automatski predstavljivih algebri. Naime, iako je klasa unarno automatski predstavljivih algebri zatvorena u odnosu na formiranje konačno generisanih podalgebri, u opštem slučaju to ne važi.

4.2 Konvolucija relacija, regularne relacije

Cilj ove sekcije je da definišemo *regularne relacije* tj. relacije prepoznatljive konačnim automatima. Intuitivno, to su relacije koje su definisane na nekom skupu reči (nad nekom azbukom) za koje postoji konačan automat koji ih prihvata (tj. prepoznaje).

Za početak definišimo *konvoluciju* konačno mnogo reči nad nekom azbukom. Neka je data azbuka Σ i neka su $x_1, x_2, \dots, x_k \in \Sigma^*$ neke reči nad tom azbukom. Ako su $x_1, x_2, \dots, x_k$ sve iste dužine, recimo n, onda je njihova konvolucija $c(x_1, x_2, \dots, x_k)$ uređena n-torka (ili, reč dužine n), tako da je i-ti element konvolucije uređena k-torka $\langle x_1(i), x_2(i), \dots, x_k(i)\rangle$. Intuitivno, konvoluciju n reči iste dužine dobijamo kada ih ispišemo jednu ispod druge, i čitamo redom odgovarajuće kolone.

<u>Primer 4.2.1</u> Neka je data azbuka $\Sigma = \{a, b\}$, i nad njom reči: $x_1 = aaaba$; $x_2 = bbaaa$; $x_3 = abaab$. Treba naći $c(x_1, x_2, x_3)$.

Ispišimo prvo ove reči jednu ispod druge:

$$x_1 = \ a\,a\,a\,b\,a$$
$$x_2 = \ b\,b\,a\,a\,a$$
$$x_3 = \ a\,b\,a\,a\,b$$

$c(x_1, x_2, x_3) = (\underbrace{aba}_{=y}, \underbrace{abb}_{=z}, \underbrace{aaa}_{=u}, \underbrace{baa}_{=q}, \underbrace{aab}_{=r}) = yzuqr$ gde je $yzuqr$ reč koja se sastoji od slova y, z, u, q, r redom. ■

Razmotrimo sada slučaj kada date reči $x_1, x_2, \dots, x_k \in \Sigma^*$ nisu iste dužine. Pretpostavimo, na primer, da je x_n najduža među rečima $x_1, x_2, \dots, x_k$. Da bismo dobili reč iste dužine, veštački ćemo ih dopuniti jednim novim simbolom \$ koga ćemo dopisati na kraj svih reči onoliko puta koliko je neophodno da bi dobili reči iste dužine kao najduža reč x_n . Po definiciji, konvolucija reči $x_1, x_2, \dots, x_k$ je konvolucija tih novih, dopunjenih reči (istih dužina).

Primer 4.2.2 Neka je data azbuka $\Sigma = \{a, b\}$, i nad njom reči: $x_1 = aa$; $x_2 = b$; $x_3 = abaabb$; $x_4 = bbbb$. Treba naći $c(x_1, x_2, x_3, x_4)$.

Ispišimo prvo ove reči jednu ispod druge, kao u predhodnom primeru:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= a\ a \\
x_2 &= b \\
x_3 &= a\ b\ a\ a\ b\ b \\
x_4 &= b\ b\ b\ b
\end{aligned}
$$

Sada ćemo „napraviti“ nove reči koje će sve biti arnosti šest:

$$
\begin{aligned}
x_1' &= a\ a\ \$\ \$\ \$\ \$ \\
x_2' &= b\ \$\ \$\ \$\ \$\ \$ \\
x_3' &= a\ b\ a\ a\ b\ b \\
x_4' &= b\ b\ b\ b\ \$\ \$
\end{aligned}
$$

$c(x_1, x_2, x_3, x_4) = (\underbrace{abab}_{=y}, \underbrace{a\$bb}_{=z}, \underbrace{\$\$ab}_{=u}, \underbrace{\$\$ab}_{=u}, \underbrace{\$\$b\$}_{=r}, \underbrace{\$\$b\$}_{=r}) = yzuurr$ gde je $yzuurr$ reč koja se sastoji od slova y, z, u, u, r, r redom.

$c(x_1, x_2, x_3, x_4)$ je reč na azbuci $(\Sigma \cup \{\$\})^4$. ■

U daljem, Σ će uvek obeležavati neku azbuku. Neka je R neka k-arna relacija nad skupom svih reči Σ^*. Definišimo sad *konvoluciju relacije* R kao skup reči koja je dobijena kao skup konvolucija svih uređenih k-torki iz R:

$$c(R) = \{c(x_1, x_2, \dots, x_k) \mid (x_1, x_2, \dots, x_k) \in R\}.$$

Primer 4.2.3 Neka je data azbuka $\Sigma = \{a, b\}$ i relacija $R = \{(ab, bba), (b, aaaa)\}$. Treba naći $c(R)$.

Prvo tražimo $c(w_1, w_2)$ gde su w_1 i w_2 prve dve reči koje su u relaciji, tj. to su reči ab *i* bba redom. Dobijamo da je

$c(w_1, w_2) = (\underbrace{ab}_{=x}, \underbrace{bb}_{=y}, \underbrace{\$a}_{=z}) = xyz$ gde je xyz reč koja se sastoji od slova x, y, z redom.

Analogno tražimo $c(w_3, w_4)$ gde su w_3 i w_4 druge dve reči koje su u relaciji tj. to su reči b i $aaaa$ redom. Dobijamo da je

$c(w_3, w_4) = \left(\underbrace{ba}_{=r}, \underbrace{\$a}_{=z}, \underbrace{\$a}_{=z}, \underbrace{\$a}_{=z}\right) = rzzz$ gde je $rzzz$ reč koja se sastoji od slova r, z, z, z redom.

Sada je konvolucija relacije R po definiciji:

$$c(R) = \{xyz, rzzz\}.$$

■

Primer 4.2.4 Neka je data azbuka $\Sigma = \{a\}$ i relacija $R = \{(a^n, a^{n+1}) \mid n \geq 1\}$. Naći $c(R)$.

Treba naći konvoluciju za svake dve reči koje su oblika (a^n, a^{n+1}) za $n \geq 1$, tj. za:

$n = 1$ je $c(a, aa) = \left(\underbrace{aa}_{=x}, \underbrace{\$a}_{=y}\right) = xy$ gde je xy reč koja se sastoji od slova x i y redom.

$n = 2$ je $c(aa, aaa) = \left(\underbrace{aa}_{=x}, \underbrace{aa}_{=x}, \underbrace{\$a}_{=y}\right) = xxy$ gde je xxy reč koja se sastoji od slova x, x, y redom.

…

$n = k$ je $c((\underbrace{aa \dots a}_{k}), (\underbrace{aa \dots a}_{k+1})) = \underbrace{xx \dots x}_{k} y$ gde je $\underbrace{xx \dots x}_{k} y$ reč koja se sastoji od slova $\underbrace{x, x, \dots, x}_{k-puta}, y$ redom.

…

Sada je po definiciji $c(R) = \{xy, x^2y, \dots, x^ky, \dots\}$. ■

Definicija 4.2.1 Neka je R neka k-arna relacija nad skupom svih reči Σ^*. Relacija R je ***regularna relacija*** (ili ***FA prepoznatljiva relacija*** ili ***relacija prepoznatljiva konačnim automatom***) ako je konvolucija relacije R regularan jezik (tj. jezik nekog konačnog automata). □

Primer 4.2.5

a) Dokazati da je relacija R iz *primera 4.2.3* regularna
b) Dokazati da je relacija R iz *primera 4.2.4* regularna

a) $c(R)$ je regularan jezik jer je svaki konačan jezik regularan, pa je po definiciji relacija R regularna.
b) $c(R)$ je regularan jezik jer je predstavljen regularnim izrazom xx^*y, gde je $x = aa$, a $y = \$a$. Sada je po definiciji relacija R regularna. ■

Može se dokazati da ako su R_1 i R_2 regularne relacije na rečima azbuke Σ, tada su regularne relacije $R_1 \cup R_2$, $R_1 \cap R_2$ i $R_1 \setminus R_2$.

4.3 Automatske strukture

Naš glavni cilj je da izučavamo strukture koje su prepoznatljive konačnim automatima. Da bismo to uspeli, prvo moramo definisati pojam strukture.

Definicija 4.3.1 (***Operacijsko-relacijsku***) ***strukturu S*** čine skup S koji nazivamo domen ili nosač, kao i relacije $R_1, R_2, \dots, R_k$, operacije $f_1, f_2, \dots, f_m$ na skupu S kao i konstante $c_1, c_2, \dots, c_n$. Konstantama smatramo unarne relacije kardinalnosti 1 $(C \to \{C\})$. Strukturu označavamo sa $\boldsymbol{S} = (S, R_1, R_2, \dots, R_k, f_1, f_2, \dots, f_m, c_1, c_2, \dots, c_n)$ ***Tip strukture S*** čine simboli i arnosti relacija i operacija te strukture. □

Primer 4.3.1 Evo nekoliko primera struktura:

1) $\boldsymbol{S_1} = (\mathbb{N}, \leq, +, \cdot, 0, 1)$
2) $\boldsymbol{S_2} = (\mathbb{R}, >, =)$
3) $\boldsymbol{S_3} = (\mathcal{P}(S), \cup, \cap, \emptyset)$; $S = \{1,2,3,4, \dots, 100\}$.

Struktura $\boldsymbol{S_1}$ ima za domen skup prirodnih brojeva, jednu binarnu relaciju $\leq$, dve binarne operacije $+$ i $\cdot$, i dve konstante 0 i 1. Struktura $\boldsymbol{S_2}$ ima samo domen i dve binarne relacije dok struktura $\boldsymbol{S_3}$ ima za domen partitivni skup od S, dve binarne operacije i konstantu. ■

Definicija 4.3.2 ***Relacijska struktura*** je struktura koja nema operacije već samo relacije. □

Primer 4.3.2

1) $\boldsymbol{S_1} = (\mathbb{N}, \leq, R)$; gde važi: $n\,R\,m \Leftrightarrow n \mid m$
2) $\boldsymbol{S_2} = (\mathcal{P}(S), \subseteq_3, =)$; gde je $S = \{1,2,3,4,5\}$. ■

Ukoliko struktura ima samo operacije i konstante, kažemo da je (*univerzalna*) *algebra*. Napomenimo da se svaka algebra može ekvivalentno predstaviti kao relacijska struktura. Naime, svaka operacija f skupa S, arnosti n, može se jednoznačno zadati kao relacija R_f arnosti $n+1$. Naime, za $a_1, a_2, \dots, a_n, b \in S$ važi da $(a_1, a_2, \dots, a_n, b) \in R_f \Leftrightarrow f(a_1, a_2, \dots, a_n) = b$. Tako na primer $(3,4,7) \in R_+ \Leftrightarrow 3 + 4 = 7$.

Definicija 4.3.3 Dve relacijske strukture S i P istog tipa su ***izomorfne*** ($\boldsymbol{S} \cong \boldsymbol{P}$) ako postoji bijekcija $f: S \to P$ između domena ovih struktura, takva da za svaki relacijski simbol R arnosti n, i za svaku uređenu n-torku elemenata iz S važi: $(s_1, s_2, \dots, s_n) \in R^S$ ako i samo ako $(f(s_1), f(s_2), \dots, f(s_n)) \in R^P$. ***Tip izomorfizma*** strukture S je klasa svih struktura koje su izomorfne strukturi S. □

Primer 4.3.3

a) Neka je $\boldsymbol{S} = (\{a, b, c\},\ R)$; gde je $R = \{(a, b), (b, c), (a, c)\}$; i neka je $\boldsymbol{P} = (\{0,1,2\},\ <)$. Ove dve strukture su izomorfne, tj. važi $\boldsymbol{S} \cong \boldsymbol{P}$.

Primetimo da preslikavanje $f = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ jeste „1-1“ i „na“ ; i da su definisane relacije na strukturama saglasne.

b) Neka je $\boldsymbol{S_1} = (\{\top, \bot\},\ \vee)$ i neka je $\boldsymbol{P_1} = (\{0,1\},\ \cdot_2)$. Ove dve strukture su izomorfne kao algebre, pa su izomorfne i odgovarajuće indukovane relacijske strukture.

Preslikavanje $f = \begin{pmatrix} \top & \bot \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ je „1-1“ i „na“. Iz datih tablica se vidi saglasnost odgovarajućih operacija odnosno indukovanih relacija.

$\wedge$	$\top$	$\bot$
$\top$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\bot$

$\cdot_2$	**0**	**1**
0	0	0
1	0	1

■

Definicija 4.3.4 Za strukturu $\boldsymbol{S} = (S, R_1, R_2, \dots, R_k, f_1, f_2, \dots, f_m, c_1, c_2, \dots, c_n)$ kažemo da je ***automatska struktura nad azbukom Σ*** ako je njen domen regularan jezik nad azbukom Σ, a sve njene relacije (gde operacije arnosti n posmatramo kao odgovarajuce relacije arnosti $n + 1$, a konstante kao relacije kardinalnosti 1 ($c \to \{c\}$)) su prepoznatljive konacnim automatima. □

Automatske strukture nad jednoelementnom azbukom Σ zovemo *unarne automatske strukture.*

Primer 4.3.4 Struktura $\boldsymbol{S} = (1^*, <, S)$ gde je $1^m < 1^n \Leftrightarrow m < n$ i $S(1^n) = 1^{n+1}$ je automatska struktura. Zaista, 1^* je regularan jezik. Pokažimo da su odgovarajuće relacije regularne.

Za $m = 0$ i $n = k$, gde $k \in (1,2,3,\dots)$ tražimo:

$c(1^0, 1^k) = \left(\underbrace{\$1, \$1, \dots, \$1}_{k\ puta}\right) = x^k$ gde je $x = \$1$; x^k je reč koja se sastoji od slova $\underbrace{x, x, x, \dots x}_{k-puta}$

$c(1^1, 1^k) = \left(11, \underbrace{\$1, \$1, \dots, \$1}_{k-1\ puta}\right) = yx^{k-1}$ gde je $y = 11$; yx^{k-1} je reč koja se sastoji od slova $y, \underbrace{x, x, x, \dots x}_{k-1\ puta}$ redom.

$\dots$

$c(1^l, 1^k) = \left(\underbrace{11,11, \dots, 11}_{l\ puta}, \underbrace{\$1, \$1, \dots, \$1}_{k-l\ puta}\right) = y^l x^{k-l}$ za neko $l < k$; $y^l x^{k-l}$ je reč koja se sastoji od slova $\underbrace{y, y, y, \dots, y}_{l-puta}, \underbrace{x, x, x, \dots, x}_{k-l\ puta}$ redom.

$\dots$.

Na osnovu ovoga možemo zaključiti da konvoluciji relacije $<$, $(c(<))$, odgovara regularni izraz $y^* x x^*$, odakle sledi da je $c(<)$ regularan jezik.

Sada ćemo datu operaciju skupa S arnosti 1 jednoznačno zadati kao relaciju arnosti 2, na način na koji smo već napomenuli:

$S(1^n) = 1^{n+1} \Leftrightarrow (1^n, 1^{n+1}) \in R_s$ za svako $n \geq 0$.

Pokažimo da je ova relacija regularna. Tražimo konvoluciju relacije:

$c(R_s) = \left(\underbrace{\$1}_{=x}, \underbrace{11}_{=y}\underbrace{\$1}_{=x}, \underbrace{11}_{=y}\underbrace{11}_{=y}\underbrace{\$1}_{=x}, \dots, \underbrace{(11)^k}_{=y^k}\underbrace{\$1}_{=x}, \dots\right) = y^n x$ gde je $y^n x$ reč koja se sastoji od slova $\underbrace{y, y, y, \dots, y}_{n-puta}, x$ redom.

Iz ovoga sledi da konvoluciji relacije R_s odgovara regularni izraz $y^* x$ odakle sledi da je $c(R_s)$ regularan jezik.

Pošto je domen strukture regularan jezik nad jednoelementnom azbukom, i obe njene relacije su regularne, struktura $\boldsymbol{S}$ je po definiciji unarna automatska struktura. ■

<u>Primer 4.3.5</u> Struktura $\boldsymbol{S} = (\{0,1\}^*, R)$ gde $p \in R \Leftrightarrow$ *p je binaran zapis prirodnog broja koji je deljiv sa* 3; je automatska struktura. Kako je $\{0,1\}^*$ regularan jezik, preostaje nam da pokažemo da je relacija R regularna. To ćemo uraditi na sledeći način: konstruisaćemo konačan automat koji prihvata tačno brojeve deljive sa tri, u binarnom zapisu.
Stanja automata neka budu A_0, A_1 i A_2, gde će samo stanje A_0 biti završno. Pošto je nula u binarnom zapisu ponovo označena sa 0, a 0 je deljiva sa 3, stanje A_0 će ujedno biti i početno stanje našeg automata. Do sada smo definisali:

$$S = \{A_0, A_1, A_2\};$$
$$\Sigma = \{0,1\};$$
$$q_0 = A_0;$$
$$F = \{A_0\}.$$

Ostaje nam još da definišemo funkciju prelaza (δ).
Primetimo da kada na kraj proizvoljnog broja $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, u binarnom zapisu, dopišemo nulu dobijamo broj $2 \cdot n$. Analogno, ako na kraju broja n dopišemo jedinicu dobijamo broj $2 \cdot n + 1$. Koristeći se ovim možemo zaključiti da se iz stanja A_0 nulom dolazi ponovo u stanje A_0 tj.

$A_0 \xrightarrow{0} A_0$ jer kad nulu dopišemo na kraj nekog broja koji je deljiv sa 3K, gde je 3K neki prirodan broj u binarnom zapisu koji je deljiv sa 3, dobićemo broj $2 \cdot 3K$ koji je takođe deljiv sa 3.

$A_0 \xrightarrow{1} A_1$ jer kada na broj $3K$ dopišemo jedinicu dobijamo broj $2 \cdot 3K + 1$ a to je broj koji pri deljenju sa 3 daje ostatak jedan.

$A_1 \xrightarrow{0} A_2$ jer je $2 \cdot (3K + 1) = 6K + 2$ tj. to je broj koji pri deljenju sa tri daje ostatak dva.

$A_1 \xrightarrow{1} A_0$ jer $2 \cdot (3K + 1) + 1 = 6K + 3$ tj. dobija se broj deljiv sa 3.

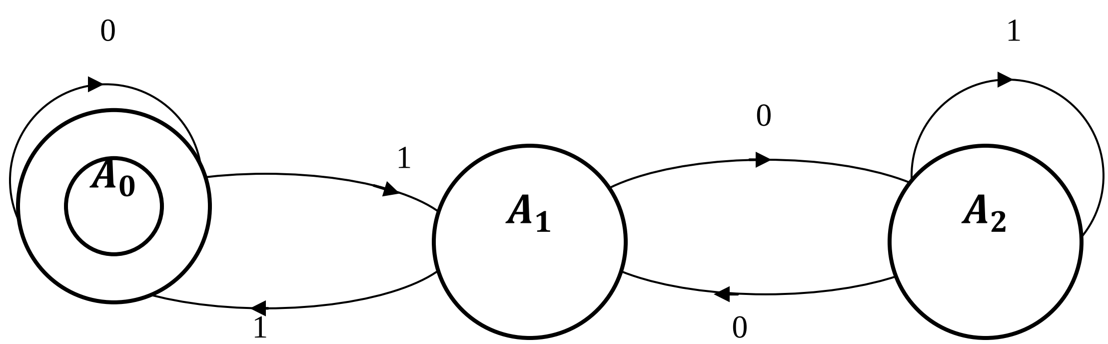
$A_2 \xrightarrow{0} A_1$ jer broj $6K + 4$ pri deljenju sa 3 daje ostatak 1 za neko $K \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

$A_2 \xrightarrow{1} A_2$ jer broj $6K + 5$ pri deljenju sa 3 daje ostatak 2.

Ovim smo sve slučajeve “pokrili” pa funkciju prelaza možemo definisati na sledeći način:

$$\delta(A_0, 0) = A_0;$$
$$\delta(A_0, 1) = A_1;$$
$$\delta(A_1, 0) = A_2;$$
$$\delta(A_1, 1) = A_0;$$
$$\delta(A_2, 0) = A_1;$$
$$\delta(A_2, 1) = A_2.$$

Sada možemo konstruisati automat



Pošto smo našli konačan automat koji prepoznaje relaciju R, relacija R je po definiciji regularna. ■

Može se dokazati da važi sledeća teorema:

Teorema 4.3.1 Postoji algoritam koji za datu automatsku strukturu $\boldsymbol{S} = (S, R_1, R_2, \dots, R_n)$ i formulu prvog reda $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ konstruiše automat koji prepoznaje one uređene n −torke $\langle s_1, s_2, \dots, s_n \rangle$ za koje je formula φ tačna u S.

Definicija 4.3.5 ***Teorija prvog reda strukture S*** je skup svih rečenica prvog reda (tj.formula bez slobodnih promenljivih) koje su tačne u strukturi $\boldsymbol{S}$**.** □

Primer 4.3.6 Neka je data struktura $\boldsymbol{S} = (\mathbb{N}, \leq, +, 1)$ onda sledeće formule pripadaju teoriji prvog reda te strukture:

- $(\forall x)\; x \leq x + 1$
- $(\forall x)(\exists y)\; x \leq y$
- $(\forall y)(\exists x)\; x \leq 1 + y$ ■

Teorija je *odlučiva*, ako postoji algoritam koji za svaku rečenicu prvog reda odlučuje da li ona pripada toj teoriji.
Na osnovu teoreme *4.3.1* možemo zaključiti da važi:

Teorema 4.3.2 Teorija prvog reda bilo koje automatske strukture je odlučiva.

4.4 Automatski predstavljive strukture

Definicija 4.4.1 Struktura $\boldsymbol{S}$ je ***automatski predstavljiva*** ako je izomorfna nekoj automatskoj strukturi $\boldsymbol{B}$. Tada za $\boldsymbol{B}$ kažemo da je ***automatsko predstavljanje od S*** ili ***FA-predstavljanje od S***. □

Ako $\boldsymbol{S}$ ima FA-predstavljanje kažemo da je *FA-prezentabilna*. Nadalje, ako je $\boldsymbol{B}$ automatsko predstavljanje od $\boldsymbol{S}$, to ćemo obeležavati sa (B, f) gde je B domen strukture $\boldsymbol{B}$ a f je bijekcija iz B u S. Ako je R fundamentalna relacija strukture $\boldsymbol{S}$ onda sa $\Lambda(R, f)$ označavamo odgovarajuću relaciju automatske strukture B.
Ako je (B, f) FA-predstavljanje od $\boldsymbol{S}$ i B je jezik nad jednoelementnom azbukom, onda je (B, f) *unarno FA-predstavljanje od* $\boldsymbol{S}$ i kažemo da je $\boldsymbol{S}$ *unarno FA-predstavljiva*.

Primer 4.4.1 Prirodni brojevi u odnosu na sabiranje i poredak imaju automatsko predstavljanje. Automatsko predstavljanje je struktura reči $\boldsymbol{S} = (\{0,1\}^*, +_2, \leq)$. U principu trebalo bi da je domen ove strukture $1(0+1)^* + 0$ ali iz tehničkih razloga zgodnije nam je da ispred broja sa manjim brojem cifara dopišemo potreban broj nula tj. onoliko nula koliko je potrebno da oba broja imaju jednak broj cifara. Lako se proverava da su date relacije saglasne, odakle sledi da su ove dve strukture izomorfne. Još treba pokazati da je $\boldsymbol{S}$ automatska struktura**.** Lako se vidi da je $\{0,1\}^*$ regularan jezik, treba još da pokažemo da su relacije ove strukture regularne.
Zadajmo binarnu operaciju $+_2$ kao ternarnu relaciju na sledeći način:

$$n_1 + n_2 = n_3 \Leftrightarrow (n_1, n_2, n_3) \in R_+$$

gde su brojevi n_i, $i \in \{1,2,3\}$, proizvoljni brojevi iz skupa $\mathbb{N} \cup \{0\}$. Brojeve u binarnom zapisu sabiramo tako što ispišemo brojeve jedan ispod drugog a zatim ih sabiramo na uobičajen način, uzimajući u obzir da pri sabiranju binarnih brojeva, ponovo treba da dobijemo binaran broj. Zbog toga cifre sabiramo na sledeći način:

$$0 + 0 = 0\ ;$$
$$0 + 1 = 1 + 0 = 1\ ;$$
$$1 + 1 = 10\ .$$

Na primer saberimo brojeve 101 i 1001 (u dekadnom zapisu to su brojevi 5 i 9).

$$\begin{array}{r} 101 \\ 1001 \\ \hline 1110 \end{array}$$

Dobili smo broj 1110, odnosno, u dekadnom zapisu to je broj 14. Konstruisaćemo konačan automat koji sabira brojeve u binarnom zapisu. Neka je A početno stanje i neka su B i C završna stanja našeg automata. U automat unosimo dva binarna broja koja automat treba da sabere. Neka su, na primer, to brojevi 101 i 1001. Automat sabira dve po dve cifre, počevši od manje značajnih cifri. U našem primeru automat će prvo sabrati dve jedinice (tako bismo sabrali i da ručno sabiramo). Primetimo da posle sabiranja cifre 1 (prve cifre broja 101) i cifre 0 (druge cifre broja 1001), broj 101 nema više cifri za sabiranje, dok broj 1001 ima još cifru 1 koju automat nije sabrao. U tom slučaju automat sabira preostalu jedinicu sa nulom tj. ispred broja 101 automat "dopisuje" nulu. Dakle naš automat se sastoji od:

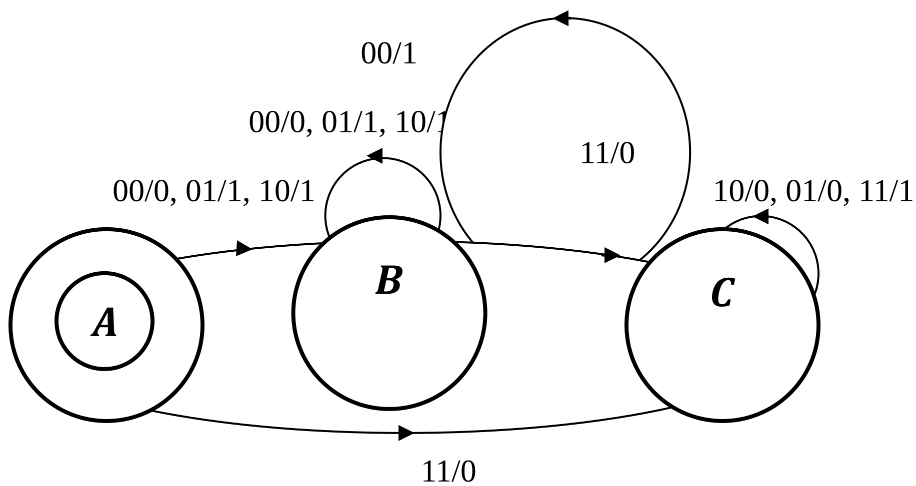
$$S = \{A, B, C\};$$
$$\Sigma = \{00, 01, 10, 11\};$$
$$q_0 = A;$$
$$F = \{B, C\}.$$

Preostaje nam još da definišemo funkciju prelaza. Ako automat sabira dve nule, kao rezultat on izbacuje nulu, to ćemo pisati: 00/0. Ako sabira jedinicu i nulu, kao rezultat će izbaciti jedinicu, što pišemo: 01/1. Ako sabira dve jedinice, izbaciće kao rezultat nulu i preći u stanje koje će u narednom koraku dodati jedinicu tj. funkciju prelaza definišemo:

$$\delta(A, 00/0) = B;$$
$$\delta(A, 01/1) = B;$$
$$\delta(A, 10/1) = B;$$
$$\delta(A, 11/0) = C;$$
$$\delta(B, 00/0) = B;$$

$$\delta(B,10/1) = B;$$
$$\delta(B,01/1) = B;$$
$$\delta(B,11/0) = C;$$
$$\delta(C,00/1) = B;$$
$$\delta(C,10/0) = C;$$
$$\delta(C,01/0) = C;$$
$$\delta(C,11/1) = C.$$

Sada možemo konstruisati automat



Pošto smo našli konačan automat koji prepoznaje relaciju R_+ , relacija R_+ je po definiciji regularna. Za ovaj automat postoji ekvivalentan konačan automat kakav smo već definisali (poglavlje 3.1).

Preostaje nam još da dokažemo da je relacija $\leq$ regularna. Konstruisaćemo konačan automat koji upoređuje dva broja u binarnom zapisu. Ako je nakon upoređivanja prvi broj manji ili jednak od drugog, automat treba da završi u stanju prihvatanja, označimo to stanje sa *D*. Ako prvi broj nije manji ili jednak od drugog, automat treba da završi u stanju odbijanja, označimo to stanje sa *N*. Ispišimo brojeve koje treba uporediti jedan ispod drugog, kao i malo pre. Neka su to ponovo, na primer, brojevi 101 (odnosno 5 u dekadnom zapisu) i 1001 (odnosno 9 u dekadnom zapisu). Automat upoređuje dve po dve cifre, počevši sa desna na levo. Ispred broja 101 nema ni jedne cifre sa kojom bi automat mogao da uporedi prvu cifru broja 1001, pa će u tom slučaju automat "dopisati" ispred broja 101 sombol 0, a zatim će uporediti 0 sa prvom jedinicom broja 1001. Dakle, naš automat izgleda ovako:

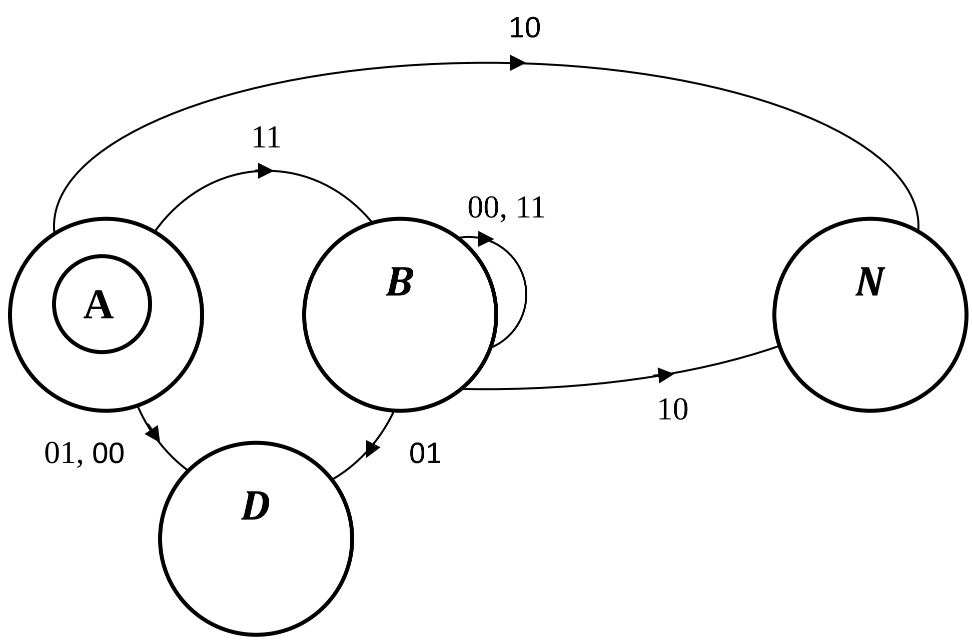
$$S = \{A, B, D, N\};$$
$$\Sigma = \{0,1\};$$

$$q_0 = A;$$
$$F = \{D, N\}.$$

Preostaje nam još da definišemo funkciju prelaza:

$$\delta(A, 11) = B;$$
$$\delta(A, 01) = D;$$
$$\delta(A, 10) = N;$$
$$\delta(A, 00) = D;$$
$$\delta(B, 00) = B;$$
$$\delta(B, 11) = B;$$
$$\delta(B, 01) = D;$$
$$\delta(B, 10) = N.$$

Konstruišimo ovaj automat:



Dakle i relacija $\leq$ je regularna. ■

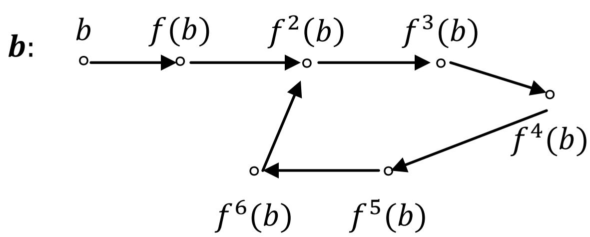
Glava 5

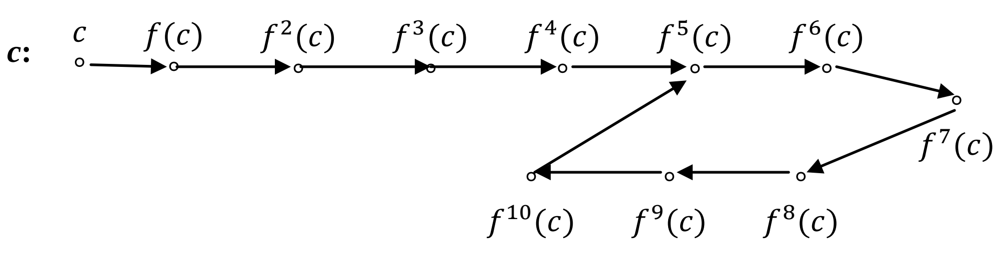
Podalgebre FA-predstavljivih algebri

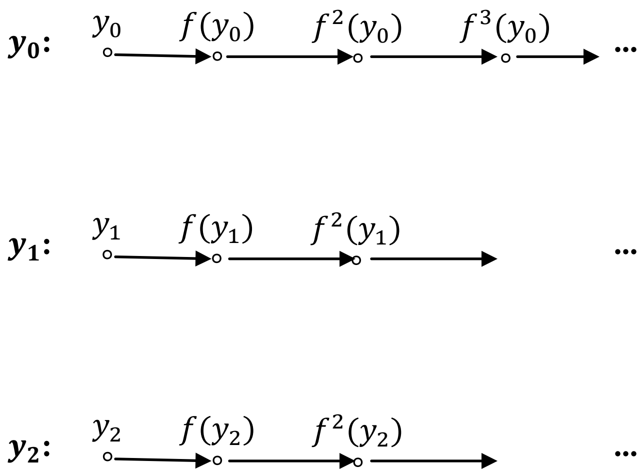
5.1 FA–predstavljivost konačno generisanih mono-unarnih algebri

Poznato je da je svaka konačno-generisana podgrupa FA-prezentabilne grupe je FA-prezentabilna.
U slučaju algebri sa jednom unarnom operacijom opet imamo pozitivan rezultat naime, klasa ovakvih FA-prezentabilnih algebri je zatvorena za konačno generisane podalgebre. Ovo sledi iz narednog jačeg tvrđenja. Pre dokaza , pogledajmo sledeći primer:

Primer 5.1.1 Neka je data mono-unarna algebra $\boldsymbol{A} = (A, f)$ generisana sa $A = \{\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{y_0}, \boldsymbol{y_1}, \boldsymbol{y_2}\}$. Pokažimo da je $\boldsymbol{A}$ unarno FA-prezentabilna ako su dati disjunktni grafovi:







Primetimo da je algebra $\boldsymbol{A}$ ovde predstavljena kao orijentisan graf $\boldsymbol{G}$ koji se sastoji od dva konačna $(\boldsymbol{b}$ i $\boldsymbol{c})$ i tri beskonačna $(\boldsymbol{y_0}, \boldsymbol{y_1}$ i $\boldsymbol{y_2})$ grafa. Nađimo automatsko predstavljanje grafa $\boldsymbol{G}$ na azbuci $\{a\}$. Definišimo preslikavanje:

$$\varphi: \begin{pmatrix} a^0 & a^1 & a^2 & & a^6 & a^7 & a^8 & a^9 & & a^{17} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \dots & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \dots & \downarrow \\ b & f(b) & f^2(b) & & f^6(b) & c & f(c) & f^2(c) & & f^{10}(c) \end{pmatrix}$$

Lako se vidi da je $f^7(b) = f^2(b) = f^{12}(b) = \cdots$; $f^8(b) = f^3(b) = f^{13}(b) = \cdots$; ... Analogno je $f^{11}(c) = f^5(c) = f^{17}(c) = \cdots$

Zadajmo unarnu operaciju f kao binarnu relaciju na način na koji smo već pokazali. Označimo dobijenu relaciju samo na konačnom delu grafa sa R_1. Dobijamo:

$$R_1 = \{(a^0, a^1), (a^1, a^2), \dots, (a^5, a^6), (a^6, a^2), (a^7, a^8), (a^8, a^9), \dots, (a^{16}, a^{17}), (a^{17}, a^{12})\}.$$

Nađimo sada konvoluciju ove relacije po definiciji. Dobijamo:

$c(R_1) = \{x, yx, y^2x, \dots, y^5x, y^2z^4, y^7x, y^8x, \dots, y^{16}x, y^{12}z^5\}$; gde je $x = \$a; y = a^2; z = a\$$.

$c(R_1)$ je regularan jezik jer je konačan, pa je R_1 regularna relacija.

Obeležimo sada čvorove beskonačnih grafova $(\boldsymbol{y_0}, \boldsymbol{y_1}$ i $\boldsymbol{y_2})$ na sledeći način:

čvorove grafa $\boldsymbol{y_0}$ obeležimo sa: $y_{00}\ y_{01}\ y_{02}\ \dots\ y_{0i}\ \dots$
čvorove grafa $\boldsymbol{y_1}$ obeležimo sa: $y_{10}\ y_{11}\ y_{12}\ \dots\ y_{1i}\ \dots$
čvorove grafa $\boldsymbol{y_2}$ obeležimo sa: $y_{20}\ y_{21}\ y_{22}\ \dots\ y_{2i}\ \dots$

i preslikajmo ih ovako:

$$\theta: \begin{pmatrix} a^{18+0+3i} & a^{18+1+3i} & a^{18+2+3i} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ y_{0i} & y_{1i} & y_{2i} \end{pmatrix}; \text{ za } i \in \{0,1,2,\ldots\}.$$

Obeležimo sa R_2 odgovarajuću indukovanu relaciju samo na beskonačnom delu grafa. Odgovarajuća relacija je:

$R_2 = \{(a^{18}, a^{21}), (a^{21}, a^{24}), \ldots\} \cup \{(a^{19}, a^{22}), (a^{22}, a^{25}), \ldots\} \cup \{(a^{20}, a^{23}), (a^{23}, a^{26}), \ldots\}$ tj.

$R_2 = \{(a^k, a^{k+3}) \mid k \geq 18\}$.

Nađimo konvoluciju ove relacije na već pokazani način, dobijamo:

$$c(R_2) = \{y^{18}x^3, y^{19}x^3, \ldots\}; \text{ gde je } y = a^2; x = \$a.$$

Odavde sledi da je $c(R_2)$ regularan jezik jer se može predstaviti regularnim izrazom $y^{18}y^*x^3$. Dakle i relacija R_2 je po definiciji regularna.

Relacija $R = R_1 \cup R_2$ je odgovarajuća indukovana relacija operacije f na orijentisanom grafu $\boldsymbol{G}$. Kako su R_1 i R_2 regularne relacije regularna je i relacija R, pa unarna algebra $\boldsymbol{A}$ ima unarno automatsko predstavljanje. ■

Propozicija 5.1.1 Neka je $\boldsymbol{S} = (S, \sigma)$ konačno generisana algebra sa jednom unarnom operacijom σ. Tada je $\boldsymbol{S}$ unarno FA prezentabilna.

<u>Dokaz</u> Algebra $\boldsymbol{S}$ je skup sa jednom unarnom operacijom. Zbog toga možemo $\boldsymbol{S}$ da posmatramo kao orijentisan graf $\boldsymbol{G}$ sa skupom čvorova S. Svaka dva susedna čvora povezana su granom $\sigma(a) = b$ (gde su a i b dva susedna čvora). Lako je videti da se graf $\boldsymbol{G}$ sastoji od unije skupa konačnih grafova i skupa beskonačnih grafova (gde za svaki beskonačan graf važi $(\forall k, l \in \mathbb{N})(k \neq l \Rightarrow \sigma^k(b) \neq \sigma^l(b))$.
Uzmimo u obzir da grafovi ne moraju da budu disjunktni. Ukoliko dva grafa nisu disjunktna postojaće „zajednički“ čvor za ta dva grafa, od koga će na dalje grafovi imati isti put tj. grane koje pripadaju različitim grafovima će u nekom delu ulaziti u isti čvor od kog će se na dalje putevi grafova poklapati. U svakom slucaju, skup čvorova tih grafova možemo podeliti na one koji pripadaju "čistom beskonačnom lancu" (u koji se ne "uliva" ni jedan graf) i na ostale čvorove (koji pripadaju konačnim grafovima).

Pretpostavimo da skup konačnih grafova ima ukupno m čvorova, a skup beskonačnih grafova da sadrži ukupno n grafova. Neka je $\varphi: a^* \to S$ preslikavanje reči $a^0, a^1, \dots, a^{m-1}$ u m čvorova iz skupa konačnih grafova. Čvorove beskonačnih grafova preslikavamo na sledeći način: Obeležimo prvo beskonačne grafove sa: $\boldsymbol{y_i}$ gde $i \in \{0,1,\dots,n-1\}$. Čvorove beskonačnog grafa $\boldsymbol{y_i}$ obeležimo sa y_{ik}, gde $k \in \{0,1,2,\dots\}$ i preslikavamo ih na sledeći način:

$$\psi: \begin{pmatrix} a^{m+0+nk} & a^{m+1+nk} & a^{m+2+nk} & & a^{m+i+nk} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \dots & \downarrow \\ y_{0k} & y_{1k} & y_{2k} & & y_{ik} \end{pmatrix}$$

Obeležimo odgovarajuću indukovanu relaciju samo na skupu konačnih grafova sa R_1.
Kako je R_1 konačna relacija, $c(R_1)$ će biti konačan jezik, odakle sledi da je relacija R_1 regularna.

Obeležimo odgovarajuću indukovanu relaciju samo na skupu beskonačnih grafova sa R_2. Odgovarajuća relacija je

$$R_2=\{(a^l, a^{l+n}) \mid l \geq m\}$$

Lako se dobija da je $c(R_2) = \{y^m x^n, y^{m+1} x^n, \dots\}$ gde je $x = \$a$; $y = aa$. Odavde sledi da je $c(R_2)$ regularan jezik jer se može predstaviti regularnim izrazom $y^m y^* x^n$. Dakle i relacija R_2 je regularna.
Relacija $R = R_1 \cup R_2$ je odgovarajuća indukovana relacija operacije σ na orijentisanom grafu $\boldsymbol{G}$. Kako su R_1 i R_2 regularne relacije regularna je i relacija R, pa konačno generisana algebra $\boldsymbol{S}$ ima unarno automatsko predstavljanje. ■

5.2. Konačno generisane podalgebre FA-prezentabilnih algebri

Na kraju rada dokažimo da klasa FA-prezentabilnih algebri nije zatvorena za konačno generisane podalgebre.
Naime, daćemo primer FA-prezentabilne algebre koja ima konačno generisanu podalgebru koja nije automatski predstavljiva.

Definicija 5.2.1 Neka je $\{S_i : i \in I\}$ skup polugrupa. ***Nula- unija od*** $\boldsymbol{S_i}$ je skup $\{O_s\} \cup \bigcup_{i \in I} S_i$ gde je O_s nov element sa množenjem definisanim na sledeći način:
Ako $s, t \in S_i$ onda njihov proizvod $s \cdot t \in S_i$ računamo prirodno, u suprotnom je $s \cdot t = O_s$.

Ovo množenje je asocijativno pa je nula-unija od S_i i sama polugrupa. □

<u>**Definicija 5.2.2**</u> Neka je Σ azbuka sa totalnim uređenjem $\leq$. Neka je $L \subseteq \Sigma^*$. ***Dužina-plus-leksikografsko uređenje reči u L*** indukovano sa $\leq$, koje ćemo označavati sa $\sqsubseteq$ definiše se na sledeći način. Definišimo prvo relaciju $\sqsubset$ sa:

$$x_1x_2 \dots x_k \sqsubset y_1y_2 \dots y_l \Leftrightarrow (k < l) \vee (k = l \wedge (\exists i)(x_i < y_i \wedge (\forall j < i)(x_j = y_j))$$

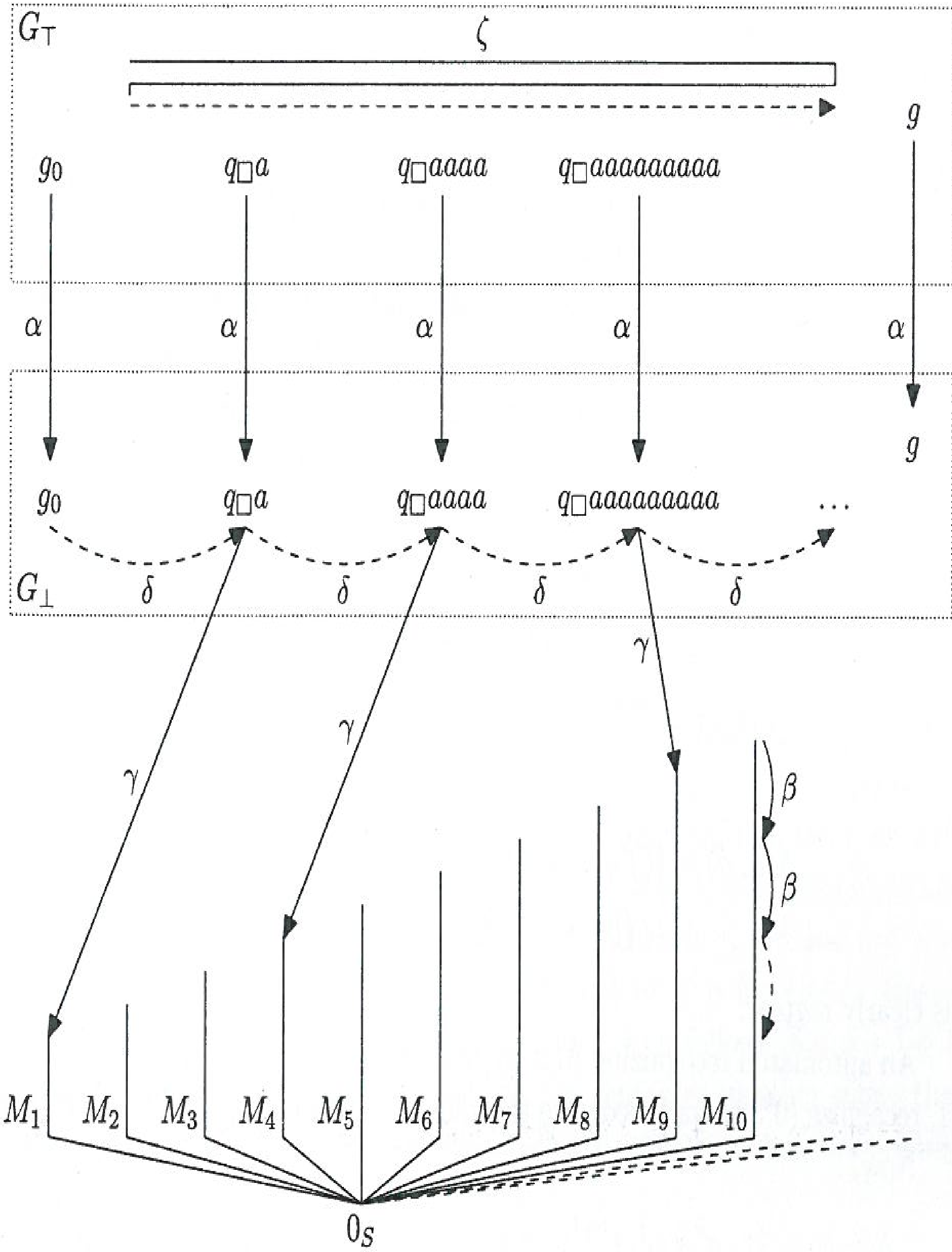
Relacija $\sqsubseteq$ će biti refleksivno zatvorenje relacije $\sqsubset$

tj. $\sqsubseteq$ prvo ređa reči po dužini a onda reči iste dužine leksikografski u odnosu na $\leq$. □

Teorema 5.2.1 Klasa FA-prezentabilnih algebri nije zatvorena za konačno generisane podalgebre.

<u>Dokaz</u> Konstruisaćemo FA-prezentabilnu algebru χ i pokazaćemo da sadrži konačno generisanu podalgebru koja nije FA-prezentabilna. Algebra χ će se sastojati od disjunktne unije polumreže i dve kopije grafa konfiguracije Tjuringove mašine proširenih dodatnim unarnim operacijama. Za $\forall i \in \mathbb{N}$ neka je M_i lanac od 2^i elemenata. Svaki lanac definiše na prirodan način semigrupu tj. važi $a \wedge b = a \Leftrightarrow a \leq b$. Neka je sada S nula-unija svih M_i, gde je nula od S označena sa O_s. Primetimo da je S polumreža i može se posmatrati kao parcijalno-uređen skup, ili kao polugrupa gde je „množenje“ njena operacija, gde pod „množenjem“ podrazumevamo operaciju polumreže.
Označimo sa τ determinističku Tjuringovu mašinu koja generiše nizove simbola a^{j^2}, $j \in \mathbb{N}$. Preciznije, τ počinje sa praznom trakom, zatim izvršava neku operaciju i dolazi u *istaknuto stanje* $q_\square$ a sadržaj trake je a^{1^2}. Ponovo izvršava operaciju i dolazi opet u stanje $q_\square$ sa sadržajem trake a^{2^2}. U opštem slučaju u različitim fazama za vreme izvršavanja operacija, τ ima sadržaj trake a^{j^2} $\forall j \in \mathbb{N}$ i τ ulazi u stanje $q_\square$ tačno kad su mu sadržaji trake a^{j^2}, za $\forall j \in \mathbb{N}$. Primetimo da τ radi beskonačno dugo (tj. da mašina nije totalna).
Neka je Q skup stanja a B azbuka τ. Podsetimo se da se konfiguracija od τ sastoji iz stanja, sadržaja trake i položaja glave na traci. Graf konfiguracije od τ je beskonačan graf čiji su čvorovi sve moguće konfiguracije od τ sa direktnim putem od g do g' ako τ u konfiguraciji g može samo u jednom koraku da dođe do konfiguracije g'. Napomenimo da u opštem slučaju nisu sve konfiguracije dostižne iz početne konfiguracije.
Uzmimo sada da su $G_\top$ i $G_\perp$ dve kopije grafa konfiguracija od τ. Tada će nosač algebre χ biti $X = S \cup G_\top \cup G_\perp$. Polumreža S već sadrži operaciju $\circ$ („množenje“), pa želimo da proširimo ovu operaciju na ceo X tako što definišemo $g \circ g' = g$ i $g \circ s = s \circ g = g$ za $g, g' \in G_\top \cup G_\perp$ i $s \in S$.

Graf konfiguracije $G_{\perp}$ ima usmerene grane δ. Pošto je δ determinističko, svaki čvor ima jednu izlaznu granu pa relaciju δ možemo da posmatramo kao unarnu operaciju. Proširimo δ na X tako što definišemo $\delta(x) = x$ za $\forall x \in S \cup G_{\top}$. Naglašavamo da se δ ponaša kao operacijski korak od τ u grafu konfiguracija $G_{\perp}$, ali se ponaša kao identičko preslikavanje na grafu konfiguracija $G_{\top}$.
Definišimo sada tri nove unarne operacije. Prvo definišimo operaciju α koja preslikava svaku konfiguraciju iz $G_{\top}$ u odgovarajuću konfiguraciju iz $G_{\perp}$; u ostalim slučajevima (elemente koji pripadaju $S \cup G_{\perp}$) preslikava elemente u same sebe kao identičko preslikavanje. Sada definišimo drugu operaciju β koja preslikava svaki element lanca M_i u element odmah ispod njega u istom lancu M_i, a minimalan element svakog lanca šalje u O_s. Za elemente iz $\{O_s\} \cup G_{\top} \cup G_{\perp}$ ponaša se kao identičko preslikavanje. Konačno, definišimo i treću operaciju γ koja preslikava konfiguracije iz $G_{\perp}$ u stanju $q_{\square}$ i sadržajem trake a^k u maksimalni element lanca M_k a preostale elemente iz $G_{\perp}$ i elemente iz $S \cup G_{\top}$ u same sebe.
Dakle imamo skup X sa operacijama $\circ, \alpha, \beta, \gamma$ i δ. Preostaje nam da definišemo još jednu unarnu operaciju ζ da bi dobili naš primer algebre $\chi = (X, \circ, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \zeta)$. Pre toga je neophodno definisati FA-predstavljanje (B, f) za χ, jer želimo da definišemo ζ u skladu sa predstavnicima iz B.
No, pre toga pokažimo kako bi izgledao šematski dijagram algebre χ :



$G_\top$
ζ
g
g_0
$q_\Box a$
$q_\Box aaaa$
$q_\Box aaaaaaaaa$
α
α
α
α
α
g
g_0
$q_\Box a$
$q_\Box aaaa$
$q_\Box aaaaaaaaa$
$\cdots$
$G_\perp$
δ
δ
δ
δ
γ
γ
γ
β
β
M_1 M_2 M_3 M_4 M_5 M_6 M_7 M_8 M_9 M_{10}
0_S

Neka je L jezik $\{z\} \cup \{0,1\}^{+} \cup \{\top, \bot\} B^{*} Q B^{*}$ gde je z novi simbol koji nije iz B ili Q. Definišimo $f\colon L \to X$ na sledeći način:

1. Neka je $f(z) = O_s$
2. Ako $u \in \{0,1\}^{k}$ onda je $f(u)$ u-ti element (u je binarni broj) otpozadi u M_k (primetimo da M_k ima tačno 2^k elemenata pa je restrikcija od f između $\{0,1\}^{k}$ i M_k bijekcija.
3. Ako $t \in \{\top, \bot\}$, $u, v \in B^{*}$, $q \in Q$ onda je $f(tuqv)$ konfiguracija u G_t gde je stanje q sadržaj trake uv i glava pokazuje na prvi simbol iz v.

Prvo ćemo pokazati da je definicija FA-predstavljivosti zadovoljena za operacije $\circ, \alpha, \beta, \gamma$ i δ. Da bismo videli da je $\wedge(\circ, f)$ regularan, najjednostavnije je uočiti da je $\wedge(\leq, f)$ regularan, gde je $\leq$ uređenje iz polumreže S. Ovo sve važi jer automat koji prepoznaje $\wedge(\leq, f)$ mora da izvršava dva zadatka:

1. upoređuje dužine dva niza iz $\{0,1\}^{*}$ i onda ih upoređuje kao brojeve u binarnom zapisu
2. uvek prihvata ako je leva ulazna reč z a desna je iz $\{z\} \cup \{0,1\}^{*}$.

Prvo definišimo operaciju $\circ$

$$s \circ t = x \Leftrightarrow (x \leq s) \wedge (x \leq t) \wedge (\forall y \in S)(((y \leq s) \wedge (y \leq t)) \Rightarrow (y \leq x)).$$

Stoga je $\wedge(\circ, f)$ regularan. Dalje,

$$\wedge(\alpha, f) = \{(\top uqv,\ \bot uqv)\colon u, v \in B^{*},\ q \in Q\} \ \cup\ \{(w, w)\colon w \in \{z\} \ \cup\ \{0,1\}^{*} \ \cup \bot\, B^{*} Q B^{*}\}$$

je očigledno regularan. Automat koji prepoznaje $\wedge(\beta, f)$, treba da spušta broj u binarnom zapisu za jedan, da prepoznaje $(0^{k}, z)$ i prepoznaje identičku relaciju na $\{z\} \cup \{\top, \bot\} B^{*} Q B^{*}$. Sada je

$$\wedge(\gamma, f) = \left\{(\bot\, a^{k} q_{\Box}\, a^{l},\ 1^{k+1})\colon k, l \in \{0,1,2, \dots\} \ \cup\ \{(u, u)\colon u \in L - \bot\, a^{*} q_{\Box}\, a^{*}\}\right\}$$

što lako vidimo da je regularan.

Relacija $\wedge(\delta, f)$ koja je regularna, u svakom koraku Tjuringove mašine izvršava male lokalizovane promene na konfiguraciji kao što je predstavljeno rečima u $B^{*} Q B^{*}$. Sada konačno možemo definisati i poslednju operaciju ζ. Neka je $\sqsubseteq$ dužina-plus-leksikografsko uređenje reči u $\top B^{*} Q B^{*}$ indukovano nekim uređenjem iz $\{\top\} \cup B \cup Q$. Za svaki element $g \in G_{\top}$ definišemo $g\zeta$ na sledeći način: Neka je u jedinstvena reč iz $\top B^{*} Q B^{*}$ tako da je $f(u) = g$. Neka je u' reč iz $\top B^{*} Q B^{*}$ koja je sledbenik u po uređenju $\sqsubset$, onda $g\zeta$ definišemo kao $f(u')$. Za sve $x \in S \cup G_{\bot}$ definišemo $x\zeta = x$. Primetimo da

$\wedge\,(\zeta, f) = \{(u, u')\colon u \in \top B^*QB^* \wedge (u \sqsubset u') \wedge (\forall v \in \top B^*QB^*)(u \sqsubset v \Rightarrow u' \sqsubseteq v)\} \cup$
$\{(w, w)\colon w \in L - \top B^*QB^*\}$

je regularno jer automat može da prepozna relaciju $\sqsubset$. Stoga je (L, f) FA-predstavljanje za algebru $\chi = (X, \circ, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \zeta)$.

Lema 5.2.1 Algebra χ je konačno generisana.

<u>Dokaz</u> Neka je u minimalna reč u odnosu na relaciju $\sqsubseteq$ u $\top B^*QB^*$. Podsetimo se da je $f(u)$ element iz X predstavljen pomoću u pa je $f(u) \in G_\top$. Neka je T skup elemenata podalgebre generisane sa $f(u) \in G_\top$, cilj je da pokažemo da je $T = X$.
Ponovnim primenjivanjem operacije ζ na f svi elementi iz $G_\top$ su u T. Primenjivanjem α na elemente iz $G_\top$, svi elementi iz $G_\perp$ su u T. Primenjivanjem γ na konfiguracije iz $G_\perp$ gde je stanje $q_\square$ i sadržaj trake a^k za $k \in \mathbb{N}$, maksimalni elementi svih lanaca M_i su u T. Ponovljenim primenjivanjem β na sve maksimalne elemente lanaca M_i su u T kao i O_s. Odavde sledi da su svi elementi iz X u T pa je $X = T$.
Neka je g_0 početna konfiguracija τ u grafu konfiguracija $G_\perp$. Neka je Υ podalgebra generisana sa g_0. Pri dokazu da Υ nije FA-predstavljiva, biće nam potrebna lema koju ćemo sada dokazati.

Lema 5.2.2 Neka je $\varpi\colon \mathbb{N}^0 \to \mathbb{N}^0$ (gde je $\mathbb{N}^0$ skup prirodnih brojeva uključujući i nulu) injekcija. Tada postoji beskonačno mnogo $i \in \mathbb{N}$ da je $i \leq \varpi(i)$.

<u>Dokaz</u> Pretpostavimo da ima samo konačno mnogo $i \in \mathbb{N}^0$ takvih da je $i \leq \varpi(i)$. Neka je $I = \{i \in \mathbb{N}\colon i \leq \varpi(i)\}$ i po pretpostavci I je konačan. Neka je $m = maxI$ i $n = \max(\varpi[I])$. Tada je $m \leq \varpi(m)$ i $\varpi(m) \leq n$ odakle sledi da je $m \leq n$. Dalje je $\varpi(i) \leq i$ za $i \notin I$ i $\varpi(i) \leq n$ za $i \in I$. Odavde sledi da je $\varpi(i) \leq n$, za sve $i \leq n$. Pošto je $m = maxI$ i $m \leq n$ sledi da $n + 1 \notin I$ i onda je $\varpi[(n + 1)] \leq n + 1$.
Ova dva iskaza pokazuju da $\varpi[\{0,1, \dots, n + 1\}] \subseteq \{0,1, \dots, n\}$ što je kontradikcija sa činjenicom da je ϖ injekcija. Dakle, ima beskonačno mnogo $i \in \mathbb{N}^0$ za koje je $i \leq \varpi(i)$. ■

Lema 5.2.3 Podalgebra Υ nije FA predstavljiva.

<u>Dokaz</u> Prvi korak je da pokažemo da podalgebra Υ sadrži lance M_{j^2} i ne sadrži druge lance M_i. Podsetimo se da je Υ generisano sa g_0, početnom konfiguracijom od τ u $G_\perp$. Kada operaciju δ primenimo ponovo na g_0 dobijamo da je svaki element dostižan iz g_0 u konfiguracijskom grafu $G_\perp$. Neka je H skup svih dostižnih elemenata. Po definiciji τ skup H sadrži konfiguracije sa stanjem $q_\square$ i sadržajem trake a^{j^2} za $\forall j \in \mathbb{N}$. Definicija τ nam

osigurava da H ne sadrži druge konfiguracije sa stanjem $q_\Box$. Operacija γ primenjena na H daje maksimalan element svakog M_{j^2} , $j \in \mathbb{N}$. Operacija β daje sve elemente svakog M_{j^2} i takođe daje O_s. Zato Υ sadrži skup $Y = \{O_s\} \cup H \cup \bigcup_{j\in\mathbb{N}} M_{j^2}$. Lako je videti da je Y zatvoren za svaku operaciju. Možemo zaključiti da je Y domen od Υ i da Υ sadrži lance M_{j^2} i nijedan drugi lanac M_i.

Pretpostavimo da Υ ima automatsko predstavljanje (L, f). Neka je $Y_1 = \{y \in Y: y \circ O_s = O_s\}$ i primetimo da $Y_1 = \{O_s\} \cup \bigcup_{j\in\mathbb{N}} M_{j^2}$. Dalje primetimo da je Y_1 definisan formulom prvog reda pa je $L_1 = f^{-1}(Y_1)$ regularno. Primetimo da relacija uređenja $\leq$ na podpolumreži Y_1 može biti definisana formulom prvog reda pomoću $\circ$. Neka je $K_1 = \{u \in L_1: (\forall v)((f(u) \leq$ *$fv \Rightarrow fu=fv$).* Tada *K1* sadrži predstavnike iz L maksimalnih elemenata raznih pod-lanaca M_{j^2} od Y_1. Pošto je definisan formulom prvog reda K_1 je regularan. Neka je $K_2 = \{u \in K_1: (\forall v \in L_1)((v \in K_1 \wedge |u| = |v|) \Rightarrow (v \sqsubseteq u))\}$ onda se K_2 sastoji iz dužina-plus-leksikografsko minimalnih reči različitih dužina u K_1 . Jezik K_2 je regularan. Relacija $R_1 = \{(u, v): (u \in K_2) \wedge (f(u) \geq f(v)) \wedge (f(v) \neq O_s)\}$ je regularna. Primetimo da R_1 stavlja reč $u \in K_2$ koja predstavlja maksimalni element nekog lanca M_{j^2} u relaciju sa svim rečima v koje predstavljaju elemente tog lanca. Neka je u broj stanja u automatu koji prepoznaje $c(R_1)$. Ako $(u, v) \in R_1$ onda $|v| \leq |u| + n$, jer u suprotnom bi se podreč od v koja premašuje u mogla puštati da se dobije beskonačno mnogo reči koje predstavljaju elemente jednog M_{j^2} što bi proizvelo beskonačno mnogo različitih elemenata od M_{j^2} (pošto je f injektivno), što je kontradikcija.

Neka je $R_2 = \{(u \,\#^n, v): (u, v) \in R_1\}$, gde je $\#$ nov simbol. Po prethodnim razmatranjima ako $(u, v) \in R_2$ onda $|u| \geq |v|$. Dalje ako $(u, v), (u', v') \in R_2$ i $|u| = |u'|$ onda $u = u'$ po definiciji R_2 u K_2 . Dalje, nijedna reč iz $c(R_2)$ ne sadrži slovo čija je leva komponenta \$. Stoga broj reči dužine k u $c(R_2)$ je ili nula ili ako postoji reč $u \in K_2$ dužine $k - n$, broj mogućih reči v takvih da $(u \,\#^n, v)$ pripada R_2 koja je broj elemenata lanca M_{j^2} kojem pripada $f(u)$ koji je 2^{j^2}. Neka je z_k broj reči u $c(R_2)$ dužine k. Po prethodnim razmatranjima kad je z_k ne-nula to je broj elemenata u nekom lancu M_{j^2} . Pošto je $c(R_2)$ regularan jezik, generativna funkcija $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} z_k x^k$ je racionalna funkcija koja nema singularitet u nuli. Stoga, radijus konvergencije njenog stepenog reda proširenja mora biti strogo veći od nule. Cilj je da dođemo do kontradikcije pokazivanjem da stepeni red ima radijus konvergencije nula. Na osnovu Pamping leme za regularne jezike, postoje konstante p, q takve da z_{p+kq} nije nula za $\forall k \in \mathbb{N}^0$ pa za $\forall k \in \mathbb{N}^0$ postoji $k\varpi \in \mathbb{N}^0$ tako da $z_{p+kq} = 2^{(\varpi(k))^2}$. Ovo definiše injekciju $\varpi: \mathbb{N}^0 \to \mathbb{N}^0$. Po lemi *5.3.2* za beskonačno mnogo vrednosti $k \in \mathbb{N}^0$ pa biranjem dovoljno velikog k i zadovoljavanjem $k \leq \varpi(k)$ vrednost $|z_{p+kq}|^{\frac{1}{p+kq}}$ $=|2^{(\varpi(k))^2}|^{\frac{1}{p+kq}} = \left|2^{\frac{(\varpi(k))^2}{p+kq}}\right|$ može biti proizvoljno velika. Stoga $\lim_{k\to\infty} sup|z_{p+kq}|^{\frac{1}{p+kq}} = \infty$ i

još važi $\lim_{k\to\infty} sup|z_k|^{\frac{1}{k}} = \infty$ iz čega sledi da je radijus konvergencije stepenog reda $\sum_{k=0}^{\infty} z_k x^k$ je nula.
■

Po lemi *5.2.1* algebra χ je konačno generisana, ali sadrži konačno generisanu podalgebru Υ koja po predhodnoj lemi nije FA-predstavljiva. Sa ovim je kompletiran dokaz teoreme *5.3.1*
■

Napomena 5.2.1 U dokazu teoreme *5.3.1* algebra χ ima tačno jednu binarnu operaciju $\circ$. Primetimo da ovo nije korišćeno za konačno generisanje χ ili Υ. Možemo izmeniti χ uklanjanjem operacije $\circ$, i dodavanjem dve nove unarne operacije ϑ i μ da bi dobili novu podalgebru χ' gde je podalgebra Υ' generisana sa g_0 i ima isti domen kao Υ i gde za Υ' možemo da dokažemo da nije FA predstavljiva na isti način. Stoga i klase FA predstavljivih algebri sa samo unarnim operacijama nije zatvorena za formiranje konačno generisanih podalgebri. Prva operacija ϑ šalje svaki element svakog lanca M_i u maksimalan element tog lanca, a na $\{O_s\} \cup G_\top \cup G_\perp$ se ponaša kao identičko preslikavanje. Druga operacija μ šalje svaki element od S u O_s a na $G_\top \cup G_\perp$ se ponaša kao indentičko preslikavanje. Primetimo da je:

$$\wedge(\vartheta, f) = \left\{\left(u, 1^{|u|}\right) : u \in \{0,1\}^*\right\} \cup \{(u,u) : u \in \{z\} \cup \{\top,\perp\}B^*QB^*\},$$

$$\wedge(\mu, f) = \{(u,z) : u \in \{z\} \cup \{0,1\}^*\} \cup \{(u,u) : u \in \{\top,\perp\}B^*QB^*\};$$

obe ove relacije su regularne. Iz tog sledi da je $\chi' = (\mathrm{X}, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \zeta, \vartheta, \mu)$ FA-predstavljiva i ima samo unarne operacije. Da bi dokazali da podalgebra Υ' (generisana sa g_0) nije FA-predstavljiva pratimo dokaz leme *5.3.3* sa sledećim definicijama za Y', K_1 i R_1:

- $Y_1 = \{y \in Y : y\mu = 0_s\}$;
- $K_1 = \{u \in L_1 : ((u,f)\vartheta = f(u) \wedge (f(u) \neq O_s)\}$;
- $R_1 = \{(u,v) : (u \in K_2) \wedge (f(u) = (f(v)\vartheta)\}$.

Primetimo da su ovo definicije prvog reda.

Napomena 5.2.2 Dokaz teoreme *5.2.1* možemo prilagoditi tako da daje primer podalgebre koja nema rešivu teoriju prvog reda (pa ne može biti FA predstavljiva po propoziciji *5.1.1*). Ideja je sledeća: Neka je $K \subseteq \mathbb{N}$ rekurzivno nabrojiv ali nije rekurzivan. Zamenimo Tjuringovu mašinu τ u dokazu teoreme *5.3.1* sa onom koja nabraja K u smislu da ulazi u stanje $q_\square$ kada traka sadrži a^k za neko $k \in K$. Korišćenjem ove modifikovane verzije algebre χ podalgebra Υ sadrži tačno one lance M_k , $k \in \mathbb{N}$. tj. $k \in K$ ako postoji maksimalan lanac (u odnosu na relaciju $\geq$) od k elemenata $y_1 > y_2 > \cdots > y_k$ različitih od O_s u podalgebri Υ. Kako se ovaj uslov može izraziti formulom prvog reda, iz činjenice da K nije rekurzivan sledi da Υ ne može imati rešivu teoriju prvog reda.

Zaključak

Neformalno, FA-prezentacija neke relacijske strukture sastoji se od regularnog jezika koji ima apstraktne predstavnike elemenata te strukture, takve da su relacije te strukture prepoznatljive konačnom automatu. Ovaj rad proučava podalgebre FA-predstavljivih algebri.

Prvo smo definisali osnovne pojmove vezane za formalne jezike i konačne automate. Definisali smo pojam regularnog jezika. Zatim smo dali definiciju regularne relacije, automatske strukture i automatski predstavljive strukture. Ispitali smo osnovne osobine tih struktura i dali par ključnih, detaljno urađenih primera. Nakon ovoga smo se posvetili glavnoj temi našeg rada, podalgebrama FA-predstavljivih algebri. Pokazali smo da je konačno generisana algebra sa jednom unarnom operacijom unarno FA prezentabilna.

U kompjuterskoj nauci, interes za automatske strukture dolazi od problema vezanih za proveru modela. Ideja o proveravanju modela je nastala iz potrebe da se dokaže korektnost kompjuterskih programa. Za proučavanje ove oblasti koriste se beskonačni i konačni automati. Primeri beskonačnih automata podrazumevaju proizvoljan broj procesa, kao i programe koji manipulišu beskonačnim skupovima podataka (kao što su celi ili realni brojevi), pushdown automate, brojčane automate, vremenske automate.

Literatura

1) Blumensath, A., *Automatic Structures,* Diploma Thesis, RWTH Aachen, 1999.

2) Cain Alan and Ruškuc Nik *Subalgebras of FA-presentable algebras*. Springer Basel 2014.

3) Dolinka I. *Kratak uvod u analizu algoritama,* Novi Sad, 2008.

4) Goncharov, S.S. and J.F. Knight, *Computable structure and non-structure theorems*. Algebra and Logic 41, 351-373, 2002.

5) https://en.wikipedia.org/wiki/Entscheidungsproblem.

6) https://sr.wikipedia.org/sr/Алан_Тјуринг

7) https://sladjinamatematika.wordpress.com/2012/04/09/абу-џафар-мухамед-ибн-муса-ал-хорезми/.

8) Khoussainov, B. and A. Nerode. *Automatic presentations of structures.* LNCS, 960, 367-392, 1995.

9) Khoussainov, B. and A. Nerode. *Open Questions in the theory of automatic structures.* European Assoc. for Theoret. Comp. Sci., to appear, 2008.

10) Khoussainov, B., J. Liu, and M. Minnes. *Unary Automatic Structures: An Algorithmic Perspective.* Proc. TAMC ’08, LNCS 4978, 548-559, 2008.

11) Khoussainov, B., and Minnes, M. *Three Lectures on Automatic Structures* Department of Computer Science University of Auckland Auckland, New Zealand.

12) Khoussainov, B., S. Rubin, and F.Stephan. *Definability and regularity in automatic structures.* Proc. STACS LNCS 2996, 440-451, 2004.

13) Kleene S.C. *Representation of events in nerve nets and finite automata* , Rand Corp., 1951.

14) Liu, J. *Automatic Structures* PhD Thesis, Cornell University, 2008.

15) Madarasz Sz. Rozalia, Crvenković Siniša, *Uvod u teoriju automata i formalnih jezika*, Novi Sad, jun, 1995.

16) Madarasz Sz. Rozalia, *Od skupova do univerzalnih algebri*, Novi Sad, septembar, 2006.

17) Rabin, M.O *Computable Algebra*, *General Theory of Computable Fields*. Trans. AMS, 95, 341-360, 1960.

18) Scott, D. Logic with Denumerably Long Formulas and Finite Strings of Quantifiers. *The treory of Models*, 329-341, North-Holland, 1965.

19) Thatcher, J.W. and J.B. Wright. *Generalized finite automata*. Notices AMS, 12,820, 1965.

20) Thomas, W. Automata on Infinite Objects. *Handbook of Theoretical Computer Science*, 133-191, 1990.

Biografija

Sonja Iličić je rođena 13. jula 1987. godine u Novom Sadu. Živi u Novom Bečeju gde je završila osnovnu školu „Miloje Čiplić“ a zatim i gimnaziju u Novom Bečeju. 2014. godine je diplomirala na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu i iste godine upisala master akademske studije na matičnom fakultetu, modul profesor matematike. U junu 2015. godine je položila poslednji ispit na master studijama i time stekla uslov za odbranu ovog master rada.

Novi Sad, septembar 2015 | Sonja Iličić.