UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA
MATEMATIKU I INFORMATIKU

Monika Mariaš

ALGEBARSKA ISPITIVANJA NEKIH KVANTNIH STRUKTURA

-master teza-

Novi Sad, 2018

Sadržaj

Predgovor

Dvadeseti vek je svedok transformacije pristupa fenomenima matematičke fizike. Naime, ranije se smatralo da je za razumevanje dubljeg karaktera neke fizičke teorije potrebno izučavati specifične posledice i primene teorije, a sada je opšte prihvaćen stav da su fizičke teorije najviše karakterisane apstraktnom matematičkom strukturom koja ih opisuje. U ovom master radu ćemo izučavati neke matematičke strukture čiji je razvoj podstaknut kvantnom mehanikom: to su pre svega Hilbertove mreže, odnosno apstraktne ortomodularne mreže, kao i efekt algebre i D-poseti.

Problem matematičkog opisa nekog kvantno-mehaničkog sistema formulisan je u slavnom radu G. Birkhoffa i J. von Neumanna "The Logic of Quantum Mechanics", iz 1936. godine. Fundamentalna teškoća koju je matematički model trebao razrešiti jeste postojanje kvantnih fenomena koji se ne mogu opisati terminima klasične teorije verovatnoće Kolmogorova. Ta okolnost je zahtevala da se umesto Boolove algebre, u kojoj važi zakon distributivnosti između konjukcije i disjunkcije oslabi kao i da se napusti interpretacija negacije iskaza preko komplementa skupa stanja fizičkog sistema.

U von Neumannovom pristupu, kvantno-mehanički sistem S je matematički reprezentovan kao separabilan kompleksan Hilbertov prostor H, tako da opservablama od S odgovaraju samo-adjungovani operatori od H. Logiku kvantnomehaničkog sistema opisuje takozvana Hilbertova mreža $L(H)$, to jest mreža svih zatvorenih podprostora Hilbertovog prostora. Operacije koje odgovaraju logičkim operacijama konjukcije, disjunkcije i negacije su redom presek, zbir odnosno ortokomplement podprostora. U slučaju da je Hilbertov prostor konačnodimenzionalan, dobijena mreža je modularna, što omogućava da se na prirodan način definiše funkcija dimenzije koja može da posluži za definiciju apriori verovatnoće sistema. Ako Hilbertov prostor nije konačno-dimenzionalan, mreža $L(H)$ nije modularna, što stvara izvesne teškoće. Za svaki Hilbertov prostor, mreža $L(H)$ je ortomodularna, što je razlog zašto se ortomodularne mreže smatraju za matematičke strukture koje opisuju osnovne logičko-algebarske aspekte kvantne logike.

Dakle, cilj master rada je da prikaže algebarske i logičke osobine nekih apstraktnih matematičkih struktura koje su nastale prilikom izučavanja kvantne mehanike. U uvodu će se dati motivacija i kratak istorijski pregled najznačajnijih faza u razvoju kvantne mehanike. Pri tome, naglasak će biti na pojavi različitih matematičkih struktura, a nećemo se zadržavati na filozofskim pitanjima interpretacije tih teorija. U drugoj glavi daće se pregled najvažnijih matematičkih pojmova koje ćemo koristiti u radu a koji se odnose na normirane vektorske prostore odnosno mreže. Ovde smo se najviše oslanjali na knjige [9] i [2]. U trećoj glavi ćemo se najpre baviti Hilbertovim mrežama. Posle definicije

Hilbertove mreže kao mreže zatvorenih potprostora prostora H, pokazaćemo vezu sa mrežom projekcija, kao i da je ta mreža ortomodularna i modularna u slučaju konačno-dimenzionalnog prostora H. Posle toga preći ćemo na apstraktnu kvantnu logiku tj. na izučavanje ortomodularnih mreža. Na kraju treće glave ćemo spomenuti von Neumannove odnosno C^* algebre kao alternativne matematičke stukture koje mogu poslužiti za izučavanje fenomena kvantne mehanike. Za ovu glavu smo najviše pratili knjige: [3], [5] i [8]. U četvrtoj glavi izučavaćemo efekt algebre odnosno D-posete. Prikazaćemo najvažnije osobine efekt algebri kao i njihovu vezu sa uređenim Abelovim grupama. Osnova za ovu glavu su poslužili naučni rad [1] i knjiga [4].

Želela bih da se zahvalim osobama čije su ideje i sugestije pomogle poboljšanju ovog master rada. To su član i predsednik komisije za odbranu master rada, dr Milica Žigić i dr Siniša Crvenković. Najveću zahvalnost dugujem mojoj mentorki dr Rozaliji Madarász-Szilágyi na znanju, pomoći i podršci koju mi je pružila prilikom izrade ovog rada. Zahvalila bih se još i svojim roditeljima, kolegama i prijateljima na velikoj podršci koji su mi pružili.

Glava 1

Uvod

Mislim da sa sigurnošću mogu reći
da niko ne razume kvantnu fiziku.

Richard Feynman

Do sredine dvadesetih godina 20. veka način razmišljanja o prirodi fizičkog sveta nije se puno razlikovao od vremena Isaaca Newtona. Pojava moderne kvantne teorije dovela je do preispitivanja našeg razmišljanja o prirodi fizičkog sveta. Ono što se smatralo jasnim i određenim procesom to je postalo maglovito i nestalno ponašanje na subatomskom nivou. Radovi Isaaca Newtona su doveli do prvog vrhunca klasične fizike. To je objavljeno u knjizi Matematički principi prirodne filozofije 1687. godine koji se skraćeno naziva Principia. Nakon ovog rada mehanika se postavlja kao zrela disciplina koja jasnim i determinističkim opisuje kretanje čestica. Ovaj deo fizike se činio tako potpunim i završenim da je krajem 18. veka najznačajniji Newtonovog sledbenik, Pierre-Simon de Laplace izneo svoju tvrdnju: Čovek koji poseduje neograničenu moć računanja i poseduje potpuno znanje o raspodeli svih čestica u nekom vremenskom trenutku, pomoću Newtonovih jednačina može predvideti budućnost celog univerzuma i sa istom sigurnošću bi objasnio i njegovu prošlost.
Klasična fizika opisuje svet koji je određen i jasan. Kvantna fizika opisuje oblast koja je maglovita i nestabilna. U okvirima kvantne fizike možemo dokazati da kvantni princip superpozicije dozvoljava "mešanje" stanja koje je za klasičnu fiziku nemoguće.

Na početku 20. veka se pokazalo da se kretanja izuzetno malih čestica velikih brzina ne mogu adekvatno opisati zakonitostima klasične mehanike. Ove kontradikcije su rešene daljim razvojem i istraživanjem mehanike. Istraživanja su dovela do novih oblasti fizike, kvantne mehanike i teorije relativnosti.
Kvantna mehanika se bavi izučavanjem kretanja mikročestica statističkim metodama. Bohrova teorija nije mogla objasniti puno pojava u atomskoj fizici. Ta teorija je samo aksiomatski zaključila da elektroni u atomu mogu imati samo određenu količinu energije i da postoje samo u ponekim kvantnim stanjima. Ove kvantne uslove de Broglie je objasnio s tom predpostavkom da elektroni imaju talasni karakter. Kasnije su Davisson i Germer eksperimentom to i dokazali. To znači da je elektron i čestica i talas. Kvantna mehanika objašnjava zakonitosti ponašanja ovakvih čestica. Ona, u suprostnosti sa klasičnom fizikom, ne

istražuje jednu po jednu česticu, nego mnoštvo sitnih čestica pod identičnim uslovima, statističkim metodama.
Kvantna mehanika, između ostalog,

- određuje moguće veličine fizičkih veličina - na primer određuje energiju elektrona u atomu vodonika,
- izučava sa kakvom verovatnoćom se mogu pojaviti ove veličine,
- određuje promenu ovih verovatnih veličina.

Za rešavanje ovih zadataka kvantna mehanika uvodi operatore za fizičke veličine. Sopstvene vrednosti operatora su jedino moguće veličine fizičkih količina.

Savremena kvantna mehanika se rodila 1925. godine. Te godine je Heisenberg objavio rad u kom je definisao matričnu mehaniku. Iste godine, teorija svetlosti i njegova analogija sa mehanikom su dovele do Schrödingerove talasne mehanike. Hesienberg je drugim metodama došao do istih zaključaka u matričnoj mehanici kao i Schrödinger. Obe teorije su specijalna objašnjenja kvantne mehanike. Teorijsku matematičku osnovu kvantne mehanike je položio J. von Neumann 1932. godine, to je teorija linearnih operatora Hilbertovog prostora.

Kao ilustraciju navedimo jednu čuvenu pojavu koju dozvoljava kvantna mehanika. To je takozvano tunelovanje kroz potencijalnu barijeru. U kvantnoj mehanici postoji mogućnost "pozajmljivanja" određene dodatne energije, pod uslovom da se ona vrati odgovarajućom brzinom. Ovaj slikovito formulisani argument omogućuje da se nešto dogodi u kvantnoj mehanici, a u klasičnoj fizici bi bio izričito zabranjen: to je tunelovanje čestica kroz potencijalnu barijeru. Prolaz čestica kroz potencijalnu prepreku možemo slikovito objasniti na sledeći način. Oblast "brdo" predstavlja prostor u koji pri ulaženju čestice, ona treba da plati tarifu ekvivalentno potencijalnoj energiji koja je jednaka visini tog "brda". Čestica prilikom svog kretanja nosi energiju, takozvanu kinetičku energiju. U klasičnoj fizici to je jasno definisano. Čestica čija je kinetička energija veća od potencijalne energije tarife "brda" proći će prepreku srazmerno smanjenom brzinom, ali posle prolaska sa druge strane prepreke ubrzava i njena kinetička energija se potpuno obnavlja. Ovo se može slikovito uporediti sa vožnjom automobila na brdo kada dolazi do usporenja, a pri spuštanju s brda auto ubrzava i poveća se kinetička energija. Ako je kinetička energija čestice niža nego što je potrebno za prelazak prepreke ona ne može savladati "brdo" nego se odbija nazad. U klasičnoj fizici ovaj nedostatak kinetičke energije jednoznačno izražava da čestica ne prelazi prepreku. Uprkos tome, u kvantnoj mehanici čestica može proći "brdo" po principu pozajmljivanja energije na određeno vreme, i to pod uslovom da je prolazak dovoljno brz da bi potom vratio nazad dobijenu energiju.

Kvantna teorija je izmenila naša shvatanja. Uticala je i na naša razmišljanja o logičkim operacijama "i" i "ili". Aristotel je formulisao klasičnu logiku, i ona se oslanja na distributivni zakon. Za ilustraciju ćemo dati sledeći primer. Pera ima kratku kosu, i nalazi se ili u kući ili u bioskopu. To znači da kratkokosog Peru ćemo naći u kući ili kratkokosog Peru ćemo naći u bioskopu. Ovo deluje kao trivijalni zaključak, ali to zavisi od Aristotelovog principa isključenja trećeg. To znači da ne postoji nikakav drugi termin između "u bioskopu" i "ne u bioskopu". Tridesetih godina 20. veka ljudi su shvatali da zaključci u kvantnom svetu nisu tako jednoznačni. Elektron može da se nalazi "ovde" i "ne ovde" i u bilo kom broju drugih stanja koje su superpozicije "ovde" i "ne ovde". To dovodi do konstitucije srednjeg termina što Aristotel nije ni predvideo. Iz ovog je protekla posebna logika, kvantna logika, koju su razradili Garrett Birkhoff i J. von Neumann. Ova logika pored vrednosti "istinito" i "lažno" koristi i reč "moguće".

Matematički alat za kvantnu teoriju nalazimo u Hilbertovom prostoru. Do sad smo najviše obraćali pažnju na kretanje. Stanje kretanja može nastati iz posebnog načina pripreme početnog materijala za eksperiment: ispaljivanje elektrona iz elektronskog topa, propuštanje svetlosti kroz složen optički sistem, skretanje čestica pomoću električnih i magnetnih polja, itd. Postavlja se pitanje: ako je stanje predstavljeno vektorom, kako treba predstaviti opservable koje su merljive? Odgovor leži u operatorima koji deluju na Hilbertov prostor. Šema koja povezuje matematički formalizam sa fizikom utvrđuje da vektori odgovaraju stanjima, a operatori opservablama.

Zadatak apstraktne teorije je da osmisli način da se rezultati opažanja (brojevi) povežu sa operatorima. Po osnovnoj ideji to su karakteristični vektori i karakteristične vrednosti. Ako operator O deluje na određeni vektor v pretvarajući ga u višestruko λ samog sebe, da je onda v karakteristični vektor od O sa karakterističnom vrednošću λ. Suština je ta da nam karakteristične vrednosti obezbeđuju matematički način povezivanja brojeva sa konkretnim operatorom i konkretnim stanjem. Među opštim principima kvantne teorije nalazi se zahtev da karakteristični vektor fizički odgovara stanju u kojem merenje posmatrane veličine O s izvesnošću daje rezultat (λ). Mnoge značajne posledice proilaze iz ovog pravila. Pošto postoje mnogi vektori koji nisu karakteristični, postojaće i mnoga stanja u kojima merenje O neće dovesti ni do jednog konkretnog rezultata sa sigurnošću. Merenje O u ovim stanjima daje različite odgovore prilikom svakog merenja. Druga važna posledica se odnosi na pitanje koja merenja mogu biti međusobno kompatibilna. To znači da se mogu izvršiti u isto vreme. Istovremena merenja su moguća za opservable koje odgovaraju međusobno komutativnim operatorima. I obrnuto, nekomutativne opservable neće biti istovremeno merljive. Ovim se dokazuje da se ponovo diže poznata magla kvantne teorije. U klasičnoj fizici uvek možemo meriti šta god i kad god poželimo. U kvantnoj fizici, ono što fizičar posmatra obavijen je maglom.

U klasičnoj fizici verovatnoća se računa na sledeći način: ako su događaji nezavisni, tada se sabiraju verovatnoće. U kvantnom svetu to je drugačije, a i zakoni kombinovanja su drugačiji. Ako je potrebno izračunati broj neprimećenih srednjih vrednosti verovatnoća onda je neophodno sabrati i amplitude verovatnoće, a ne same verovatnoće. U običnom svetu za dobijanje vrednosti verovatnoće krajnjeg ishoda sabiraju se verovatnoće nezavisnih međuverovatnoća. U kvantnom svetu kombinacija međuverovatnoća koji se ne mogu posebno opaziti odvija se na komplikovaniji način. Kvantno računanje uključuje mešovite članove. Mešoviti član je dvostruki član u formuli kvadrata binoma, tj. u formuli $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$, $2AB$ je mešoviti član. Princip po kome se u kvantnoj teoriji izračunava verovatnoća odvija se u okviru takozvanih amplituda verovatnoća. Te amplitude su kompleksni brojevi. Faza talasa se odnosi na to da li su dva talasa u koraku ili raskoraku, ili u bilo kom odnosu između ove dve mogućnosti. S matematičke tačke gledišta kompleksni brojevi pružaju prirodan i pogodan način za izražavanje fazne relacije. Teorija mora da bude obazriva i kako bi osigurala da rezultati opažanja (karakteristične vrednosti) budu oslobođeni štetnih uticaja članova koje uključuje. To znači da operatori moraju biti samo-adjungovani. Izračunavanje verovatnoće iz amplitude vrši se jednom vrstom podizanja na kvadrat (kvadrat modula), što daje pozitivan broj. Tu je i uslov skaliranja (normalizacija) što dovodi do toga da ukupan zbir svih verovatnoća bude 1, tj dovodi do toga da će se sigurno realizovati.

Na kraju uvoda, još jedan citat od Nils Bohra, koji je rekao:
"Ne postoji kvantni svet. Postoji samo apstraktni fizički opis. Pogrešno je smatrati da je zadatak fizike da otkrije kakva priroda jeste. Fizika se bavi onim što mi možemo da kažemo o prirodi."

Glava 2

Vektorski prostori i mreže

2.1 Normirani vektorski prostori

U ovoj glavi ćemo navesti definicije nekoliko matematičkih pojmova koji se koriste u daljem tekstu. Takođe, ćemo navesti tvrđenja (bez dokaza) koja se odnose na te matematičke pojmove.

Definicija 2.1 *Neka je* $\boldsymbol{V} = (V, +)$ *komutativna grupa, a* $\boldsymbol{F} = (F, +, \cdot)$ *polje.* $\boldsymbol{V}$ *je* ***vektorski (ili linearni) prostor*** *nad poljem* $\boldsymbol{F}$*, ako je definisano preslikavanje* $F \times V \to V$*, pri čemu sliku para* (α, a) *označavamo sa* αa*, tako da za svako* $\alpha, \beta \in F$*,* $a, b \in V$ *važi*
(1) $\alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b$*,*
(2) $(\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a$*,*
(3) $(\alpha\beta)a = \alpha(\beta a)$*,*
(4) $1a = a$*,*
gde je sa 1 *označen neutralni elemenat za množenje polja* $\boldsymbol{F}$*.*

Vektorski prostor $\mathbf{V}$ nad poljem $\mathbf{F}$ označavaćemo i sa $V(F)$. Elemente skupa V nazivamo vektorima i označavamo ih malim slovima latinice $a, b, c, ...$, a elemente skupa F nazivamo skalarima i označavamo ih malim grčkim slovima $\alpha, \beta, \gamma, ...$. Vektorski prostor nad poljem realnih (kompleksnih) brojeva nazivamo realni (kompleksni) vektorski prostor.

Tvrđenje 2.2 *Neka je* $V(F)$ *vektorski prostor. Tada važi*
(1) Nula-vektor je jedinstven.
(2) Za svaki vektor suprotni vektor je jedinstven.
(3) $(\forall a \in V) - (-a) = a$*.*
(4) Važi zakon skraćivanja (kancelacije) za sabiranje vektora.
(5) $(\forall \alpha \in F)\ \alpha 0 = 0$*.*
(6) $(\forall a \in V)\ 0a = 0$*.*
(7) $(\alpha \in F)(\forall a \in V)\ (-\alpha)a = -(\alpha a) = \alpha(-a)$*.*
(8) $(\forall \alpha \in F)(\forall a \in V)\ \alpha a = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0 \vee a = 0$*.*

Definicija 2.3 *Neka je* $\boldsymbol{V} = (V, +, \cdot)$ *vektorski prostor nad poljem skalara* $\boldsymbol{F}$*. Tada podskup* $W \subseteq V$ *određuje* ***vektorski potprostor*** W *vektorskog prostora* V *ako važi:*
(1) $W \neq \emptyset$*,*

(2) skup W i restrikcije operacija $+ = +|_W : W^2 \to W$ i $\cdot = \cdot|_W : F \times W \to W$ određuju vektorski prostor $\boldsymbol{W} = (W, +, \cdot)$.

Tvrđenje 2.4 *Neprazan podskup $W \subseteq V$ određuje vektorski potprostor W vektorskog prostora V nad poljem skalara F ako i samo ako važi*

$$(\forall x, y \in W)(\forall \alpha, \beta \in F)\ \alpha x + \beta y \in W.$$

Definicija 2.5 *U vektorskom prostoru $V(F)$, vektor v je **linearna kombinacija** vektora $a_1, a_2, ..., a_n$ ako postoje skalari $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ takvi da je*

$$v = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + ... + \alpha_n a_n.$$

Definicija 2.6 *U vektorskom prostoru $V(F)$ niz vektora $(a_1, a_2, ..., a_n)$ je **linearno zavisan**, ako postoje skalari $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$, od kojih je bar jedan različit od nule, takvi da je*

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + ... + \alpha_n a_n = 0.$$

*Niz vektora koji nije linearno zavisan je **linearno nezavisan**.*

Definicija 2.7 *U vektorskom prostoru $V(F)$ beskonačan niz vektora je **linearno zavisan** ako i samo ako je bar jedan njegov konačan podskup linearno zavisan. U suprotnom je **linearno nezavisan**.*

Definicija 2.8 *Ako je S neprazan podksup vektorskog prostora $V(F)$, onda se skup svih linearnih kombinacija vektora iz S naziva **lineal** skupa S i označava sa $L(S)$. Dakle,*

$$L(S) = \{\alpha_1 a_1 + ... + \alpha_n a_n \mid n \in \mathbb{N},\ \alpha_i \in F,\ a_i \in S\}.$$

Ako je S prazan skup, onda je $L(S) = \{0\}$.
Ako je $(a_1, ..., a_n)$ niz vektora vektroskog prostora $\boldsymbol{V}$, onda umesto $L(\{a_1, ..., a_n\})$ pisaćemo skraćeno $L(a_1, ..., a_n)$.

Tvrđenje 2.9 *Ako je S podskup vektorskog prostora $V(F)$, onda je $L(S)$ potprostor vektorskog prostora V.*

Tvrđenje 2.10 *Ako su S i T podskupovi vektorskog prostora $V(F)$, onda važi:*
(1) $S \subseteq T \Rightarrow L(S) \subseteq L(T)$,
(2) $S \subseteq L(S)$,
(3) $L(S) = L(L(S))$,
(4) $(S \subseteq L(T) \wedge T \subseteq L(S)) \Rightarrow L(S) = L(T)$.

Definicija 2.11 *Ako je S podskup vektorskog prostora $V(F)$, onda kažemo da je potprostor $L(S)$ generisan skupom S, elemente S nazivamo generatorima potprostora $L(S)$.*

Definicija 2.12 *Neka je S podskup (niz vektora) vektorskog prostora $V(F)$. Skup S je **baza** vektorskog prostora $V(F)$ ako je linearno nezavisan i ako generiše vektorski prostor, tj.*

$$L(S) = V.$$

Tvrđenje 2.13 *U vektorskom prostoru $V(F)$ niz vektora je baza ako i samo ako je taj niz maksimalan linearno nezavisan niz.*

Definicija 2.14 *Ako vektorski prostor ima bar jednu bazu koja sadrži konačno mnogo elemenata, tada se prostor naziva* ***konačno-dimenzionalni vektorski prostor****. U suprotnom, zovemo ga* ***beskonačno-dimenzionalni vektorski prostor****.*

Definicija 2.15 *Neka je* ***V*** *vektorski prostor nad poljem skalara* ***F*** *i* $V \neq \{0\}$*. Ako* ***V*** *ima bazu sa* n *elemenata, tada se prirodan broj* n *naziva* ***dimenzija konačno-dimenzionalnog vektorskog prostora****. Koristi se oznaka* $n = dim(V)$*.* ***Dimenzija beskonačno-dimenzionalnog vektorskog prostora*** *je* $dim(V) = \infty$*.*

Tvrđenje 2.16 *Sve baze vektorskog prostora imaju isti broj vektora.*

Definicija 2.17 ***Norma*** *nad* ***V****, gde je* ***V*** *vektorski prostor nad* ***F****,* $\boldsymbol{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$*, je preslikavanje* $\| \; \| : V \to F$*,* $x \mapsto \|x\|$ *za koje važi:*
(1) $\|x\| \geq 0, \; \forall \, x \in V$*,*
(2) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$*,*
(3) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|, \; \forall \lambda \in F, \; \forall x \in V$*,*
(4) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \; \forall x, y \in V$*.*
Normirani vektorski prostor $(\boldsymbol{V}, \| \; \|)$ *je uređeni par vektorskog prostora i norme na njemu.*

Definicija 2.18 *Realan broj* x *je* ***granična vrednost*** *niza realnih brojeva* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *ako za svako* $\varepsilon > 0$ *postoji prirodan broj* n_0 *tako da za svaki prirodan broj* $n \geq n_0$ *važi* $|x_n - x| < \varepsilon$*. Tada pišemo* $\lim_{n \to \infty} x_n = x$*.*
Prema tome,

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)(|x_n - x| < \varepsilon).$$

Ako niz $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *ima graničnu vrednost* x*, onda kažemo da je niz* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ***konvergentan*** *i da* ***konvergira*** *ka* x*.*

Definicija 2.19 *Niz vektora* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *u normiranom prostoru* V ***konvergira po normi*** *ili* ***jako konvergira ka vektoru*** $x_0 \in V$ *ako niz brojeva* $\|x_n - x_0\|$*,* $n \in \mathbb{N}$ *kovergira ka* 0*.*

Definicija 2.20 *Niz vektora* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *u normiranom prostoru* V *je* ***Košijev niz*** *ako*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N})(\forall p, q \geq n_0(\varepsilon))(\|x_p - x_q\| < \varepsilon).$$

Definicija 2.21 *Normirani prostor* V *je* ***kompletan*** *ili* ***Banachov*** *ako je svaki Košijev niz u* V *konvergentan.*

Definicija 2.22 *Neka je* ***V*** *vektorski prostor nad poljem* $\boldsymbol{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ *i neka je definisano preslikavanje* $(\; , \;) : V \times V \to F$*. Preslikavanje* $(\; , \;)$ *se naziva* ***skalarni proizvod*** *a uređen par* $(V, (\; , \;))$ ***pred-Hilbertov prostor (unitaran prostor)*** *ako važe sledeći uslovi:*
(1) $(x, x) \geq 0, \; \forall x \in V$*,*
(2) $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0, \; \forall x \in V$*,*
(3) $(x + y, z) = (x, z) + (y, z), \; \forall x, y, z \in V$*,*
(4) $(\alpha x, y) = \alpha (x, y), \; \forall \alpha \in F, \; \forall x, y \in V$*,*
(5) $(x, y) = \overline{(y, x)}, \; \forall x, y \in V$*.*

Definicija 2.23 *U unitarnom vektorskom prostoru* $\boldsymbol{V}$ *funkcija* $\| \ \| : V \to \mathbb{R}$ *definisana sa*

$$\|x\| = \sqrt{(x,x)}$$

naziva se ***norma indukovana skalarnim proizvodom****. Nenegativan realan broj* $\|x\|$ *naziva se norma vektora* x*.*

Tvrđenje 2.24 *(Cauchy-Schwarzova nejednakost): Neka je* $\boldsymbol{V}$ *unitaran prostor nad poljem skalara* $\boldsymbol{F}$ *i sa skalarnim proizvodom* $(\ , \ ) : V^2 \to F$*. Tada za normu indukovanu skalarnim proizvodom važi:*

$$|(x,y)| \leq \|x\|\|y\|, \forall x,y \in V.$$

Pri tome, jednakost važi ako i samo ako su vektori linearno zavisni.

Nije teško dokazati da preslikavanje $\| \ \|$ ima sledeće osobine:

Tvrđenje 2.25 *Neka je* $\boldsymbol{V}$ *unitaran prostor nad poljem skalara* $\boldsymbol{F}$ *i sa skalarnim proizvodom* $(\ , \ ) : V^2 \to F$ *i neka je* $\| \ \|$ *indukovana norma. Tada važi:*
(1) $\|x\| \geq 0$, $\forall x \in V$,
(2) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$, $\forall x \in V$,
(3) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$, $\forall \alpha \in F$, $\forall x \in V$,
(4) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$, $\forall x,y \in V$.

Dakle, ako je $(V, (\ , \ ))$ unitaran prostor, tada je $(V, \| \ \|)$ **normiran prostor**, gde je $\| \ \|$ norma indukovana skalarnim proizvodom.

Tvrđenje 2.26 *(nejednakost Minkowskog) Neka je* V *unitaran prostor i* $x, y \in V$*, tada je*

$$\sqrt{(x+y,x+y)} \leq \sqrt{(x,x)} + \sqrt{(y,y)}.$$

Definicija 2.27 *Neka je* $(V, (\ , \ ))$ *unitaran prostor i* $x, y \in V$*. Elementi* x *i* y *su* ***ortogonalni*** *ako važi relacija* $(x,y) = 0$*. Ako je* $z \in V$ *tako da je* $\|z\| = 1$*, kažemo da je* z ***normiran*** *element.*

Definicija 2.28 *Kompletan unitaran prostor* $(V, (\ , \ ))$ *nazivamo* ***Hilbertov prostor****.*

U daljem tekstu za Hilbertov prostor se koristi oznaka $\mathcal{H} = (V, (\ , \ ))$, gde je V vektorski prostor i $(\ , \ )$ je skalarni proizvod.

Definicija 2.29 *Neka je* $\mathcal{H} = (V, (\ , \ ))$ *Hilbertov prostor i* $M \subset V$*.* ***Ortogonalni komplement*** *skupa* M*, u oznaci* $M^{\perp}$*, je skup*

$$M^{\perp} = \{y \in V, \ (x,y) = 0, \ \textit{za sve } x \in M\}.$$

Definicija 2.30 *Neka je* $\mathcal{H} = (V, (\ , \ ))$ *Hilbertov prostor. Otvorena lopta je skup* $L(x,r) = \{y, \ y \in V : \ \|x-y\| < r\}$ *sa centrom u tački* $x \in V$ *i poluprečnika* $r > 0$*.*

Definicija 2.31 *Neka je $\mathcal{H} = (V, (\ ,\ ))$ Hilbertov prostor i neka je $M \subset V$. Kažemo da je tačka $x \in V$* ***tačka nagomilavanja skupa M*** *ako važi*

$$L(x, r) \cap (M \backslash \{x\}) \neq \emptyset.$$

Dakle, postoji $y \in L(x, r) \cap M$, $y \neq x$. Skup tačaka nagomilavanja skupa M se označava sa $M^{'}$ i naziva se **izvodni skup** skupa M.

Definicija 2.32 *Neka je $\mathcal{H} = (V, (\ ,\ ))$ Hilbertov prostor i neka je $M \subset V$. Kaže se da je tačka $x \in V$* ***adherentna tačka skupa M*** *ako je $x \in M$ ili je x tačka nagomilavanja za M.*

Dakle, x je adherentna tačka skupa M ako za svaki $r > 0$ važi

$$L(x, r) \cap M \neq \emptyset.$$

Skup svih adherentnih tačaka skupa M naziva se **adherencija skupa** M, u oznaci $\overline{M}$, i kažemo da je $\overline{M}$ zatvaranje od M.

Definicija 2.33 *Neka je $\mathcal{H} = (V, (\ ,\ ))$ Hilbertov prostor i neka je $M \subset V$. Skup M je zatvoren ako i samo ako je $M = \overline{M}$.*

Tvrđenje 2.34 *Neka je $\mathcal{H} = (V, (\ ,\ ))$ Hilbertov prostor i M zatvoren potprostor od V. Tada se svaki element $x \in V$ na jedinstven način može reprezentovati u sledećoj formi:*

$$x = x_1 + x_2,\ x_1 \in M,\ x_2 \in M^{\perp},$$

što označavamo sa $V = M \oplus M^{\perp}$.

Tvrđenje 2.35 *Neka je $\mathcal{H} = (V, (\ ,\ ))$ Hilbertov prostor i M potprostor od V. Tada je*

$$(M^{\perp})^{\perp} = \overline{M}.$$

Definicija 2.36 *Skup vektora $E = \{e_i\ :\ i \in I\}$ u unitarnom prostoru je* ***ortonormiran sistem*** *ako je $\|e_i\| = 1$ za sve $i, j \in I$ i*

$$(e_i, e_j) = \begin{cases} 0 & za\ i \neq j \\ 1 & za\ i = j. \end{cases}$$

Definicija 2.37 ***Potpun ortonormiran sistem*** *je maksimalan ortonormiran sistem, što znači sledeće:*
E je potpun ortonormiran sistem $\Leftrightarrow$ za svaki ortonormiran sistem B, iz $B \supset E$ sledi $B = E$.
Dakle, nema ortonormiranog sistema B koji sadrži E kao pravi podskup.

Definicija 2.38 *Neka je $(V, (\ ,\ ))$ unitaran prostor, $x \in V$ i $E = \{e_\alpha \mid \alpha \in \Lambda\}$ potpun ortonormiran sistem. Brojevi $x_\alpha = (x, e_\alpha)$, $\alpha \in \Lambda$ iz polja* **F** *su* ***Furijeovi koeficijenti*** *od x.*

Tvrđenje 2.39 *Neka je $(V, (\ ,\ ))$ unitaran prostor i $\{x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, ..., x_{\alpha_n}\}$ proizvoljan konačan skup Furijeovih koeficijenata za $x \in V$. Tada je*

$$\sum_{k=1}^{n} |x_{\alpha_k}|^2 \leq \|x\|^2.$$

2.2 Mreže

Definicija 2.40 *Neka je $(P, \leq)$ uređen skup, i $A \subseteq P$. Ako među gornjim ograničenjima skupa A postoji najmanji element, zovemo ga* ***supremum*** *od A, i pišemo $supA$ ili $\bigvee A$. Analogno, ako među donjim ograničenjima postoji najveći element, zovemo ga* ***infimum****, i pišemo $infA$ ili $\bigwedge A$.*

Tvrđenje 2.41 *Neka je P uređen skup i $S, T \subseteq P$. Neka postoje $supS$, $supT$, $infS$ i $infT$ u P. Tada:*
(1) Za sve $s \in S$, $s \leq supS$ i $s \geq infS$.
(2) Za sve $x \in P$ važi

$$x \leq infS \Leftrightarrow (\forall s \in S)\ x \leq s,$$

$$x \geq supS \Leftrightarrow (\forall s \in S)\ x \geq s.$$

(3) Ako $S \subseteq T$ onda

$$supS \leq supT,$$

$$infS \geq infT.$$

Definicija 2.42 *Za uređen skup $(L, \leq)$ kažemo da je* ***mrežno uređen skup*** *ako za svaka dva elementa $a, b \in L$ postoji $sup\{a, b\}$ i $inf\{a, b\}$. Za mrežno uređen skup kažemo da je* ***ograničen*** *ako ima najmanji i najveći element.*

Tvrđenje 2.43 *Neka je L mrežno uređen skup, $S, T \subseteq L$. Pretpostavimo da postoje $supS$, $supT$, $infS$, $infT$. Tada:*

$$sup(S \cup T) = sup\{supS, supT\}$$

$$inf(S \cup T) = inf\{infS, infT\}$$

Posledica 2.44 *Neka je L mrežno uređen skup. Tada za svaki konačan neprazan $F \subseteq L$ postoji $supF$ i $infF$.*

Neka je $n \in \mathbb{N}$. Definišemo n-arnu operaciju kao preslikavanje $f : A^n \to A$, gde je A proizvoljan skup. Binarna operacija je operacija arnosti 2. Ako je A neprazan skup, a $\mathcal{F}$ neki skup operacija na A, tada uređen par $(A, \mathcal{F})$ zovemo **algebra**, gde je A nosač.
U mrežno uređenom skupu $(L, \leq)$ koristićemo sledeće oznake za supremum i infimum:

$$a \wedge b = inf\{a, b\}$$

$$a \vee b = sup\{a, b\}.$$

Definicija 2.45 *Pretpostavimo da je L neprazan skup, $\wedge$ i $\vee$ su dve binarne operacije skupa L. Za algebru $\mathcal{L} = (L, \wedge, \vee)$ kažemo da je* ***mreža*** *ako za sve $x, y, z \in L$ važi:*
(L1) $x \wedge x = x$, $x \vee x = x$ -idempotentnost,
(L2) $x \wedge y = y \wedge x$, $x \vee y = y \vee x$ -komutativnost,
(L3) $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$, $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$ -asocijativnost,
(L4) $x \wedge (y \vee x) = x$, $x \vee (y \wedge x) = x$ -apsorpcija.

Definicija 2.46 *Neka je $\mathcal{L} = (L, \wedge, \vee)$ mreža i $L_1 \neq \emptyset$, $L_1 \subseteq L$. Kažemo da je $\mathcal{L}_1$* ***podmreža*** *od $\mathcal{L}$ ako za sve $x, y \in L_1$ važi da $x \wedge y \in L_1$ i $x \vee y \in L_1$. Skup svih podmreža mreže $\mathcal{L}$ obeležavamo sa $Sub(\mathcal{L})$.*

Tvrđenje 2.47 *(1) Neka je $\mathcal{L} = (L, \leq)$ mrežno uređen skup. Na skupu L definišimo operacije $\wedge$ i $\vee$ na sledeći način:*

$$x \wedge y = inf\{x, y\}$$

$$x \vee y = sup\{x, y\}$$

Tada je algebra $\mathcal{A}(\mathcal{L}) = (L, \wedge, \vee)$ mreža.
(2) Neka je $\mathcal{L} = (L, \wedge, \vee)$ mreža. Definišemo na skupu L binarnu relaciju $\leq$ na sledeći način:

$$x \leq y \Leftrightarrow x \wedge y = x.$$

Tada je $\mathcal{R}(\mathcal{L}) = (L, \leq)$ mrežno uređen skup.
(3) Za sve mreže $\mathcal{L}$ važi $\mathcal{A}(\mathcal{R}(\mathcal{L})) = \mathcal{L}$ i za sve mrežno uređene skupove $\mathcal{L}$ važi $\mathcal{R}(\mathcal{A}(\mathcal{L})) = \mathcal{L}$. Prema tome, pridruživanja $\mathcal{A}$ i $\mathcal{R}$ definisana pod (1) odnosno (2) ove teoreme uzajamno su inverzna.

Definicija 2.48 *Mreža $(L, \wedge, \vee)$ je* ***distributivna*** *ako za sve $x, y, z \in L$ važi*

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z).$$

Tvrđenje 2.49 *U svakoj mreži $(L, \wedge, \vee)$ za sve $a, b, c \in L$ važi:*
(1) $(a \wedge b) \vee (a \wedge c) \leq a \wedge (b \vee c)$,
(2) $(a \vee b) \wedge (a \vee c) \geq a \vee (b \wedge c)$.

Tvrđenje 2.50 *Neka je $(L, \wedge, \vee)$ mreža. Sledeći uslovi su ekvivalentni:*
(D1) $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$, $\forall x, y, z \in L$,
(D2) $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$, $\forall x, y, z \in L$.

Definicija 2.51 *Mreža $(L, \wedge, \vee)$ je* ***modularna*** *ako za sve $x, y, z \in L$ važi:*

$$x \leq y \Rightarrow x \vee (y \wedge z) = y \wedge (x \vee z).$$

Tvrđenje 2.52 *U svakoj mreži $\mathcal{L}$, za sve $x, y, z \in L$ važi:*

$$x \leq y \Rightarrow x \vee (y \wedge z) \leq y \wedge (x \vee z).$$

Tvrđenje 2.53 *Mreža $(L, \wedge, \vee)$ je modularna ako i samo ako za sve $x, y, z \in L$ važi*

$$(x \wedge y) \vee (y \wedge z) = y \wedge ((x \wedge y) \vee z).$$

Definicija 2.54 *Mreža $\mathcal{L}$ je* ***kompletna*** *ako svaki podskup od $\mathcal{L}$ ima infimum i supremum. Mreža $\mathcal{L}$ je σ-mreža ako svaki prebrojiv podskup od $\mathcal{L}$ ima infimum i supremum.*

Primer 2.55 *Neka je X proizvoljan skup. Partitivni skup $P(X)$ je parcijalno uređen skup sa relacijom inkluzije i $P(X)$ je kompletna mreža: supremum $S \subset P(X)$ dobijamo unijom svih članova iz S, a infimum od S dobijamo kao presek svih članova iz S.*

Definicija 2.56 *Element $a \in \mathcal{L}$ je* ***atom*** *u $\mathcal{L}$ ako iz $b \leq a$ sledi $b = a$ ili $b = 0$. Mreža $\mathcal{L}$ je* ***atomična*** *ako za svaki $b \in \mathcal{L}$ postoji atom a, takav da $a \leq b$. Mreža je* ***kompletna atomična*** *ako je svaki element jednak supremumu svih atoma koji su manji od njega, tj. ako za svako $0 \neq a \in \mathcal{L}$ važi $b = \vee_i a_i$, $a_i \leq b$, gde a_i je atom.*

Definicija 2.57 *Preslikavanje $d : \mathcal{L} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ definisano na mreži $\mathcal{L}$, uzimajući nenegativne vrednosti zovemo* ***funkcija dimenzije****, ako važi:*
(1) ako je $A < B$, onda je $d(A) < d(B)$,
(2) $d(A) + d(B) = d(A \vee B) + d(A \wedge B)$.

Tvrđenje 2.58 *Ako postoji funkcija dimenzije d na mreži $\mathcal{L}$, tada je mreža modularna.*

Definicija 2.59 *Neka je $\mathcal{L}$ mreža. Tada je preslikavanje*

$$A \mapsto A^{\perp},\ A \in \mathcal{L},$$

ortokomplementiranje *i $A^{\perp}$ je* ***ortokomplement*** *od A, ako važe sledeće:*
(1) $(A^{\perp})^{\perp} = A$
(2) Ako je $A \leq B$ tada je $B^{\perp} \leq A^{\perp}$
(3) $A \wedge A^{\perp} = 0$
(4) $A \vee A^{\perp} = I$.
Ako je ortokomplementiranje definisano na mreži $\mathcal{L}$, tada je ona ***ortokomplementirana mreža*** *. Ako su A i B elementi ortokomplementirane mreže, tada su oni* ***ortogonalni*** *ako $A \leq B^{\perp}$.*

Primer 2.60 *Neka je X proizvoljan skup i $A \subseteq X$. U mreži $P(X)$, $A^{\perp} \equiv (X \backslash A)$ je ortokomplement i $P(X)$ je ortokomplementirana mreža.*

De Morganovi zakoni važe u ortokomplementiranoj mreži:

$$(\bigvee_n A_n)^{\perp} = \bigwedge_n A_n^{\perp}$$

$$(\bigwedge_n A_n)^{\perp} = \bigvee_n A_n^{\perp}$$

Definicija 2.61 *Za elemente nekog uređenog skupa $x, y \in A$ kažemo da su* ***uporedivi****, ako je $x \leq y$ ili $y \leq x$.*
Ako su svaka dva elementa iz A uporediva, za $(A, \leq)$ kažemo da je ***linearno uređen skup*** *ili da je* ***lanac****. Ako u uređenom skupu nema različitih uporedivih elemenata, uređen skup je* ***antilanac****.*

Definicija 2.62 *Ako je $C \subseteq A$ i $(C, \leq)$ lanac, kažemo da je C lanac u $(A, \leq)$. U slučaju da je $C = \{x_1, x_2, ..., x_n, ...\} \subseteq A$ i važi $x_1 \geq x_2 \geq ... \geq x_n \geq ...$, kažemo da je C* ***opadajući lanac*** *u $(A,\leq)$. Dualno se definiše pojam* ***rastućeg lanca****.*

Definicija 2.63 *Uređen skup $A = (A, \leq)$ zadovoljava* ***uslov prekida opadajućih lanaca*** *ako je svaki opadajući lanac u A je konačan. Dualan uslov se zove* ***uslov prekida rastućih lanaca****.*

Definicija 2.64 *Neka je $S \subseteq A$, gde je A uređen skup.* ***Gornji (donji) segment*** *koji je generisan sa S, u oznaci $S \uparrow$ ($S \downarrow$), je*
$\uparrow S \equiv \{a \in A | (\exists x \in S)\ a \geq x\}$
$\downarrow S \equiv \{a \in A | (\exists x \in S)\ a \leq x\}$.

Definicija 2.65 *Neka je $\mathcal{L} = (L, \wedge, \vee)$ mreža i $I \subseteq L$. Kažemo da je I* ***ideal*** *mreže $\mathcal{L}$ ako je $I \neq \emptyset$ i važi*

- *ako $a, b \in I$ onda $a \vee b \in I$,*
- *ako $a \in L$, $b \in I$ i $a \leq b$, onda $a \in I$.*

Skup svih ideala mreže $\mathcal{L}$ obeležavamo sa $\mathcal{I}(\mathcal{L})$.

Primer 2.66 *Neka je $\mathcal{L} = (L, \wedge, \vee)$ proizvoljna mreža. Tada je L ideal mreže $\mathcal{L}$. Ideal I mreže $\mathcal{L}$ zovemo* ***pravi ideal*** *ako $I \neq L$. Ako mreža $\mathcal{L}$ ima najveći element 1, lako se vidi da je ideal I pravi ako i samo ako 1 nije element I.*

Primer 2.67 *Neka je $\mathcal{L} = (L, \wedge, \vee)$ proizvoljna mreža, $a \in \mathcal{L}$. Tada je*

$$\downarrow a = \{x \in L : x \leq a\}$$

ideal mreže $\mathcal{L}$. Ideale tog oblika zovemo ***glavni ideali.***

Tvrđenje 2.68 *Za proizvoljnu mrežu $\mathcal{L}$, skup $\mathcal{I}(\mathcal{L})$ svih ideala mreže $\mathcal{L}$ jeste mreža u odnosu na $\subseteq$ (zovemo je mreža ideala od $\mathcal{L}$).*

Tvrđenje 2.69 *Neka je $\mathcal{L}$ proizvoljna mreža i $\mathcal{GI}(\mathcal{L})$ skup svih glavnih ideala mreže $\mathcal{L}$. Tada:*
(1) Skup glavnih ideala $\mathcal{GI}(\mathcal{L})$ jeste podmreža mreže ideala $\mathcal{I}(\mathcal{L})$;
(2) Mreža glavnih ideala (u odnosu na $\subseteq$) je izomorfna mreži $\mathcal{L}$;
(3) Svaka konačna mreža je izomorfna mreži svih svojih ideala.

Definicija 2.70 *Neka je $(L, \wedge, \vee)$ mreža i $F \subseteq L$. Kažemo da je F* ***filter*** *mreže $\mathcal{L}$ ako je $F \neq \emptyset$ i važi*

- *ako $a, b \in F$ onda je $a \wedge b \in F$,*
- *ako $a \in L$, $b \in F$ i $a \geq b$ onda je $a \in F$.*
  Skup svih filtera mreže $\mathcal{L}$ obeležavamo sa $\mathcal{F}(\mathcal{L})$.

Primer 2.71 *Neka je $(L, \wedge, \vee)$ proizvoljna mreža. Tada je L filter mreže $\mathcal{L}$. Filter F mreže $\mathcal{L}$ zovemo* ***pravi filter*** *ako $F \neq L$. Ako mreža $\mathcal{L}$ ima najmanji element 0, lako se vidi da je filter F pravi ako i samo ako 0 nije element F.*

Primer 2.72 *Neka je $(L, \wedge, \vee)$ proizvoljna mreža, $a \in L$. Tada je*

$$\uparrow a = \{x \in L :\ x \geq a\}$$

filter mreže $\mathcal{L}$. Filter tog oblika zovemo ***glavni filtri.***

Primer 2.73 *U konačnoj mreži svi filtri su glavni. Zaista, ako je F filter i $a = infF$, onda je $F = \uparrow a$.*

Tvrđenje 2.74 *Za proizvoljnu mrežnu $\mathcal{L}$, skup $\mathcal{F}(\mathcal{L})$ svih filtara mreže $\mathcal{L}$ jeste mreža u odnosu na $\subseteq$.*

Definicija 2.75 *Neka je $\mathcal{L}$ mreža.*
(1) Za pravi ideal J mreže $\mathcal{L}$ kažemo da je ***prost ideal*** *ako za sve $a, b \in L$, iz uslova $a \wedge b \in J$ sledi $a \in J$ ili $b \in J$. Skup svih prostih ideala mreže $\mathcal{L}$ obeležavamo sa $\mathcal{I}_p(\mathcal{L})$.*
(2) Za pravi filter F mreže $\mathcal{L}$ kažemo da je ***prost filter*** *ako za sve $a, b \in L$, iz uslova $a \vee b \in F$ sledi $a \in F$ ili $b \in F$. Skup svih prostih filtara mreže $\mathcal{L}$ obeležavamo sa $\mathcal{F}_p(\mathcal{L})$.*

Tvrđenje 2.76 *Neka je $\mathcal{L}$ mreža i $J \subseteq L$. Tada je J prost ideal od L ako i samo ako je $L \backslash J$ prost filter od L.*

Definicija 2.77 *Neka je $\mathcal{L}$ mreža.*
(1) Za pravi ideal J od L kažemo da je ***maksimalan ideal*** *od L ako ne postoji nijedan pravi ideal, različit od J, koji ga sadrži.*
(2) Neka je F pravi filter od L. Kažemo da je F ***maksimalni filter (ultrafilter)*** *od L ako ne postoji nijedan pravi filter, različit od F, koji ga sadrži.*

Glava 3

Hilbertove i ortomodularne mreže

3.1 Teorija modela klasične iskazne logike

Pre nego što krenemo da razmatramo teoriju modela kvantne logike, podsetimo se osnovnih pojmova logike iskaza. Osnovni pojmovi su: iskaz, istinitosna vrednost iskaza, logički veznici. Iskaz je rečenica koja ima jednu istinitosnu vredost: "tačno" ili "netačno". Iskaze ćemo obeležavati slovima $p, q, r, ...$
Pomoću logičkih veznika možemo dobiti složenije iskaze od polaznih iskaza. Ti veznici koje ćemo razmotriti su: "i", "ili", "ako...onda", "ako i samo ako" (binarni veznici), i "nije" (unarni veznik):

- **konjunkcija** iskaza p i q je iskaz "p i q",
- **disjunkcija** iskaza p i q je iskaz :"p ili q",
- **implikacija** iskaza p i q je iskaz :"ako p onda q",
- **ekvivalencija** iskaza p i q je iskaz :"p ako i samo ako q",
- **negacija** iskaza p je iskaz :"nije p".

Istinitosna vrednost složenog iskaza zavisi samo od onih istinitosnih vrednosti od kojih se taj iskaz sastoji, i to na sledeći način:

- iskaz "p i q" je tačan ako i samo ako su i p i q tačni,
- iskaz "p ili q" je netačan ako i samo ako su i p i q netačni,
- iskaz "ako p onda q" je netačan ako i samo ako je p tačan a q netačan,
- iskaz "p ako i samo ako q" je tačan ako i samo ako iskazi p i q imaju istu istinitosnu vrednost,
- iskaz "nije p" je tačan ako i samo ako je iskaz p netačan.

Osnovni pojam je logička posledica. Neka je Σ neki skup iskaza. Ako je iskaz p tačan svaki put kada su svi iskazi iz skupa Σ tačni, tada kažemo da je iskaz p logička posledica od Σ. U ovom slučaju kažemo da je zaključivanje "iz Σ sledi p" (logički) ispravno.

Definicija 3.1 ***Standardna azbuka iskazne logike*** *L se sastoji od sledećih simbola:*

- *skup iskaznih slova $S = \{p_1, p_2, p_3, ...\}$*
- *simboli logičkih operacija: $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, $\neg$*
- *pomoćni znaci (,)*

Definicija 3.2 *Skup iskaznih formula je najmanji skup reči nad azbukom L koji zadovoljava sledeće uslove:*

- *sva iskazna slova su iskazne formule;*
- *ako su A i B iskazne formula, onda su to i sledeći izrazi:*
  $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \Rightarrow B)$, $(A \Leftrightarrow B)$, $(\neg A)$.

Ovako definisan skup svih iskaznih formula zovemo standardan skup iskaznih formula i obeležavamo sa $Form$.

Definicija 3.3 ***Valuacija*** *u iskaznoj logici je svako preslikavanje $\tau : S \to \{\top, \bot\}$. Ako je $p \in S$, za $\tau(p)$ kažemo da je vrednost tog iskaznog slova u valuaciji τ.* ***Interpretacija*** *iskaznih formula za datu valuaciju τ je preslikavanje $v_\tau : Form \to \{\top, \bot\}$ koje je definisano na sledeći način:*
ako su A i B iskazne formule, onda

- *ako je $p \in S$ iskazno slovo, onda $v_\tau(p) = \tau(p)$,*
- $v_\tau(A \wedge B) = v_\tau(A) \wedge v_\tau(B)$,
- $v_\tau(A \vee B) = v_\tau(A) \vee v_\tau(B)$,
- $v_\tau(A \Rightarrow B) = v_\tau(A) \Rightarrow v_\tau(B)$,
- $v_\tau(A \Leftrightarrow B) = v_\tau(A) \Leftrightarrow v_\tau(B)$,
- $v_\tau(\neg A) = \neg v_\tau(A)$.

Za $v_\tau(A)$ kažemo da je vrednost formule u valuaciji (interpretaciji) τ. Ako je $v_\tau(A) = \top$, kažemo da je formula A u valuaciji τ tačna, a ako je $v_\tau(A) = \bot$, da je netačna.

Definicija 3.4 *Neka je τ neka valuacija i F neka formula. Kažemo da je τ model formule F (ili da formula F važi na τ , ili da τ zadovoljava F), ako je $v_\tau(F) = \top$, odnosno ako je vrednost formule F u valuacji τ tačna. Skup svih modela (tj. skup svih valuacija) obeležavamo sa Mod. Ako je τ model formule F onda pišemo $\tau \models F$.*

Umesto valuacije τ, model ćemo identifikovati sa skupom $\tau_\top$, gde je $\tau_\top = \{p_i \in S \mid \tau(p_i) = \top\}$.

Primer 3.5 *Neka $\{p_1, p_5, p_2\} \models p_2 \wedge p_1 \Rightarrow p_7 \vee p_5$, $\{p_4\} \models \neg p_2$, gde je $\{p_1, p_5, p_2\}$ valuacija u kojima su samo ta tri iskazna slova tačna, a $\{p_4\}$ je valuacija, gde je samo p_4 tačna. Ako je formula A tautologija, ona važi na svakom modelu. Kontradikcija ne važi ni na jednom modelu.*

Tvrđenje 3.6 *Neka je* $\tau \in Mod$, $p \in \mathcal{S}$, $F, G \in Form$. *Tada važi:*

- $\tau \models p$ *ako i samo ako* $p \in \tau_\top$,
- $\tau \models F \wedge G$ *ako i samo ako* $\tau \models F$ *i* $\tau \models G$,
- $\tau \models F \vee G$ *ako i samo ako* $\tau \models F$ *ili* $\tau \models G$,
- $\tau \models F \Rightarrow G$ *ako i samo ako (iz* $\tau \models F$ *sledi* $\tau \models G$*)*,
- $\tau \models F \Leftrightarrow G$ *ako i samo ako (*$\tau \models F$ *ako i samo ako* $\tau \models G$*)*,
- $\tau \models \neg F$ *ako i samo ako nije* $\tau \models F$.

Dokaz. Sledi po definiciji modela. □

Definicija 3.7 *(1) Neka je* $\tau \in Mod$ *i* $\Sigma \subseteq Form$. *Tada kažemo da je* τ ***model skupa formula*** Σ, *i pišemo* $\tau \models \Sigma$, *ako je* τ *model svake formule iz* Σ.
(2) Neka je $K \subseteq Mod$ *i* $F \in Form$. *Tada kažemo da* F ***važi na skupu modela*** K, *i pišemo* $K \models F$, *ako formula* F *važi na svakom modelu iz skupa* K.
(3) Neka je $K \subseteq Mod$ *i* $\Sigma \subseteq Form$. *Kažemo da* ***na klasi*** K ***važi skup formula*** Σ, *i pišemo* $K \models \Sigma$, *ako na* K *važi svaka formula* F *iz* Σ.
(4) Neka je $\Sigma \subseteq Form$. *Tada je* ***klasa modela određena sa*** Σ *skup* $Mod(\Sigma)$ *definisan sa*

$$Mod(\Sigma) = \{\tau \in Mod : \ \tau \models \Sigma\}.$$

(5) Neka je $K \subseteq Mod$. *Tada je* ***teorija klase*** K *skup formula* $Th(K)$ *određen sa*

$$Th(K) = \{F \in Form : K \models F\}.$$

Primer 3.8 *Ako skup formula* Σ *sadrži neku kontradikciju, onda je* $Mod(\Sigma) = \emptyset$. *Obrnuto, ako su sve formule u* Σ *tautologije, onda je* $Mod(\Sigma) = Mod$.

Ako je F neka formula, umesto $Mod(\{F\})$ pišemo $Mod(F)$.
Ako valuaciju τ identifikujemo sa skupom $\tau_\top$, onda je skup svih modela $Mod = \mathcal{P}(S)$.
Primetimo da važi: ako su F i G formule, tada

$$Mod(\neg F) = \mathcal{P}(S) \backslash Mod(F)$$
$$Mod(F \wedge G) = Mod(F) \cap Mod(G)$$
$$Mod(F \vee G) = Mod(F) \cup Mod(G).$$

Drugim rečima, teorija modela iskazne logike se realizuje u Booleovoj algebri $\mathcal{P}(S)$.

Tvrđenje 3.9 *(1) Neka su* Σ_1 *i* Σ_2 *dva skupa formula. Tada ako* $\Sigma_1 \subseteq \Sigma_2$ *onda* $Mod(\Sigma_2) \subseteq Mod(\Sigma_1)$.
(2) Neka su K_1 *i* K_2 *dva skupa modela. Ako je* $K_1 \subseteq K_2$ *onda je* $Th(K_2) \subseteq Th(K_1)$.

Dokaz. Po definiciji preslikavanja Mod odnosno Th. □

Tvrđenje 3.10 *(1) Za sve* $\Sigma \subseteq Form$ *važi* $\Sigma \subseteq Th(Mod(\Sigma))$.
(2) Za sve $K \subseteq Mod$ *važi* $K \subseteq Mod(Th(K))$.

Dokaz. (1) Neka je $F \in \Sigma$, treba dokazati da je $F \in Th(Mod(\Sigma))$, to jest $Mod(\Sigma) \models F$. To znači da za sve $\tau \in Mod(\Sigma)$ treba da važi $\tau \models F$. No, ako je $\tau \in Mod(\Sigma)$ onda $\tau \models \Sigma$, pa kako je $F \in \Sigma$, sledi da $\tau \models F$.
(2) Neka je $\tau \in K$. Treba dokazati $\tau \models Th(K)$, to jest za sve $A \in Th(K)$, treba dokazati $\tau \models A$. No, ako je $A \in Th(K)$, tada $K \models A$.
S druge strane, $\tau \in K$, pa $\tau \models A$. □

Tvrđenje 3.11 *(1) Za sve* $\Sigma \subseteq Form$ *važi* $Mod(\Sigma) = Mod(Th(Mod(\Sigma)))$.
(2) Za sve $K \subseteq Mod$ *važi* $Th(K) = Th(Mod(Th(K)))$.

Dokaz. (1) Prema prethodnoj teoremi imamo da je $\Sigma \subseteq Th(Mod(\Sigma))$, pa prema tvrđenji 3.9. imamo $Mod(\Sigma) \supseteq Mod(Th(Mod(\Sigma)))$.
Obrnuto, ako označimo sa K klasu $Mod(\Sigma)$, onda prema prethodnoj teoremi imamo da je $K \subseteq Mod(Th(K))$, to jest da je $Mod(\Sigma) \subseteq Mod(Th(Mod(\Sigma)))$.
(2) Prema prethodnoj teoremi imamo da je $K \subseteq Mod(Th(K))$, pa prema tvrđenji 3.9., imamo $Th(K) \supseteq Th(Mod(Th(K)))$.
Obrnuto, ako označimo sa Σ klasu $Th(K)$, onda prema prethodnoj teoremi imamo da je $\Sigma \subseteq Th(Mod(\Sigma))$, to jest da je $Th(K) \subseteq Th(Mod(Th(K))$. □

Zadatak logike je izučavanje pojma logičke posledice. To znači kada iz tačnosti pretpostavki sledi tačnost zaključka. To je pojam logičke (semantičke) posledice:

Definicija 3.12 *Neka je* Σ *neki skup formula, i* F *neka formula. Kažemo da je* F ***logička (semantička) posledica*** *skupa hipoteza* Σ *ako je* F *važi u svim modelima skupa* Σ*. U tom slučaju pišemo* $\Sigma \models F$.

Primer 3.13 *Neka su* $p, q, r \in \mathcal{S}$*. Tada* $\{p \Rightarrow q, \neg r, q \Rightarrow r\} \models \neg p$*. Zaista, ako je za neku valuaciju* τ *vrednost formule* $\neg r$ *tačna, onda je zbog* $v_\tau(q \Rightarrow r) = \top$ *sledi da je* $\tau(q) = \bot$*. No, kako je po pretpostavci* $v_\tau(p \Rightarrow q) = \top$*, sledi da je* $\tau(p) = \bot$*, što znači da je* $v_\tau(\neg p) = \top$.

Razmotrimo šta znači ako je neka formula A logička posledica praznog skupa hipoteza. Za svaku valuaciju τ, ako je svaka formula $F \in \emptyset$ tačna u valuaciji τ, onda je i formula A tačna u toj valuaciji τ. Implikacija "ako je $F \in \emptyset$ tada $v_\tau(F) = \top$" je tačna, jer je "$F \in \emptyset$" uvek lažna. Dakle, imamo da je $\emptyset \models A$ ako i samo ako za sve valuacije τ, $v_\tau(A) = \top$, odnosno formula A je tautologija. Oznake su:

- Umesto "$\emptyset \models A$" pišemo samo "$\models A$", dakle "$\models A$" znači da je A tautologija.
- Umesto "$\{A_1, ..., A_n\} \models B$" pišemo samo "$A_1, ..., A_n \models B$". Slično, vitičaste zagrade možemo izostaviti i ako imamo beskonačan skup hipoteza.

Tvrđenje 3.14 *Neka su* $A, B, A_1, ..., A_n$ *neke iskazne formule. Tada važi:*
(1) $A \models B$ *ako i samo ako* $\models A \Rightarrow B$,
(2) $A_1, ..., A_n \models B$ *ako i samo ako* $\models (A_1 \wedge ... \wedge A_n) \Rightarrow B$,
(3) $A_1, ..., A_n \models B$ *ako i samo ako* $A_1, ..., A_{n-1} \models A_n \Rightarrow B$.

Dokaz. Po definiciji logičke posledice. □

Tvrđenje 3.15 *Neka* Σ *neki skup formula,* B *neka formula. Tada nije* $\Sigma \models B$ *ako i samo ako skup formula* $\Sigma \bigcup \{\neg B\}$ *ima model.*

3.2 Semantika kvantne logike - motivacija

Pod "logikom fizičkog sistema" u uskom smislu podrazumevamo algebarsku strukturu koja predstavlja klase ekvivalencije elementarnih rečenica u odnosu na relaciju, "rečenica A je tačna ako i samo ako je rečenica B tačna".
Neka je T teorija koja opisuje fizički sistem S. T nam omogućava da formiramo elementarne rečenice u vezi sistema. Elementarne rečenice su empirijske tvrdnje o vrednostima veličina u S. Tipična elementarna rečenica je

sent(Q,A)="Vrednost posmatrane veličine Q leži u skupu A",

gde je A skup realnih brojeva. Drugi tip elementarnih rečenica je

sent(Q,A,r)="Verovatnoća da vrednost posmatrane veličine Q leži u skupu

A je jednaka r",

gde je r neki realan broj, $r \in [0, 1]$.
Neka K označava skup svih elementarnih rečenica u odnosu na datu fizičku teoriju T. Želimo da definišimo skup $\mathcal{F}$, skup svih smislenih izjava određenih sa T. Ovaj skup $\mathcal{F}$ će biti skup koji sadrži K po definiciji.
Da li vrednost posmatrane veličine Q leži u A, zavisi od toga u kom stanju se sistem nalazi. U nekim stanjima vrednost Q leži u A, u nekim drugim stanjima ne leži. Ovu vezu između elementarnih rečenica i stanja sistema ćemo izraziti funkcijom Mod iz K u skup podskupova stanja prostora Γ. Za svaku elementarnu rečenicu

$$sent(Q, A) \in K$$

dodeljujemo podskup

$$Mod(sent(Q, A)) \subseteq \Gamma$$

stanja koja imaju svojstvo da u tim stanjima vrednost od Q leži u A. Ova činjenica se takođe može izraziti govoreći da stanja u $Mod(sent(Q, A))$ **zadovoljavaju elementarnu rečenicu** $sent(Q, A)$. Uz pomoć Mod možemo dalje definisati semantičke pojmove na sledeći način:
(1) $sent(Q, A)$ je tačno u stanju η ako $\eta \in Mod(sent(Q, A))$;
(2) $sent(Q, A)$ je valjana ako i samo ako je $Mod(sent(Q, A)) = \Gamma$;
(3) $sent(Q, A)$ je semantička posledica od $sent(Q', A')$ ako i samo ako je $Mod(sent(Q', A')) \subseteq Mod(sent(Q, A))$. Ekvivalentno, možemo reći da $sent(Q', A')$ implicira $sent(Q, A)$. Ovo možemo još označiti sa

$$sent(Q', A') \models sent(Q, A).$$

Logički gledano, preslikavanje Mod je definisano kao interpretacija podskupa K formula $\mathcal{F}$ jezika $\mathcal{L}$: interpretacija je data sa stanjem $\varphi \in \Gamma$.
Uređenu četvorku $(\mathcal{L}, \mathcal{F}, \Gamma, Mod)$ zovemo polu-interpretiran jezik određen sa T.
Primetimo sledeće:

1. Nije određeno da li $\mathcal{F}$ sadrži elemente koji nisu elementarne rečenice, to jest ostaje otvoreno da li sadrži skup neelementarnih formula, specijalno da li sadrži formule $\neg k$, $k_1 \wedge k_2$ i $k_1 \vee k_2$, $k_1, k_2 \in K$.
2. Ako $\mathcal{F}$ sadrži elemente koji nisu elementarne formule, šta je uslov istinitosti za ove formule?
3. Uslov važenja (istinitosti) elementarnih rečenica je definisan, ali nije definisano kada su lažne. Naročito, princip da u svakoj interpretaciji svaka elementarna rečenica je istinita ili lažna, nije usvojen.

Posmatramo problem definisanja lažnosti elementarnih rečenica $sent(Q, A)$. Može se uzeti da je $sent(Q, A)$ lažna ako i samo ako rečenica $sent(Q, A)$ nije tačna iz bilo kog razloga. U ovom slučaju pojmovi "lažni" i "nije istinit" se ne razlikuju, i ove vrste negacije nazivamo **ekskluzivna negacija (EX)**. Ovo nije jedina opcija. Negacija se često interpretira kao pozitivna tvrdnja stanja stvari. Ako se tako interpretira, tada ovu vrstu negacije nazivamo **izborna negacija (CH)**. Tako se "lažno" može definisati na dva načina:
EX: $sent(Q, A) \in K$ je lažna u interpretaciji φ ako i samo ako φ ne pripada skupu $Mod(sent(Q, A))$.
CH: $sent(Q, A) \in K$ je lažna u interpretaciji φ ako je $\varphi \in \Gamma_{Q,A}$ za neki skup $\Gamma_{Q,A} \subseteq \Gamma$ stanja, gde skup $\Gamma_{Q,A}$ zavisi samo od Q, A ali

$$\Gamma_{Q,A} \neq \Gamma \backslash Mod(sent(Q, A)).$$

Možemo postaviti pitanje: Pod pretpostavkama da je elementarna rečenica $k \in K$ lažna u EX, da li postoji $k' \in K$ koja je tačna ako i samo ako je k lažna? Drugim rečima, pitamo da li postoji takav $k' \in K$ tako da $Mod(k') = \Gamma \backslash Mod(k)$. Očigledno ne postoji razlog zašto bi postojalo takvo $k' \in K$, pošto je K generisan sa specifičnom fizičkom teorijom T i uopšte nema razloga zašto prema T, mora postojati $Q^{'}$ koja zadovoljava

$$Mod(sent(Q', A')) = \Gamma \backslash Mod(sent(Q, A)) \ (3)$$

za neko $A^{'}$. Ako je $sent(Q', A')$ u K takav za koji važi (3), kažemo da je K zatvorena ili kompletna u odnosu na EX negaciju. Ako potrebno $k^{'}$ ne postoji kao element K, možda se Mod može proširiti iz K u $\mathcal{F}$, tj. može postojati element α od $\mathcal{F}$ takav da

$$Mod(\alpha) = \Gamma \backslash Mod(k).$$

Ako je to slučaj, kažemo da je $\mathcal{F}$ (ili da je jezik α) zatvoren (ili kompletan) u odnosu na EX negaciju. Dakle, odgovor na pitanje da li je određeni jezik zatvoren (kompletan) u odnosu na EX negaciju zavisi delimično od T, i delimično od definisanja skupa (neatomarnih) formula.
Slično možemo definisati zatvorenost (kompletnost) od $\mathcal{F}$ u odnosu na CH.

Neka su $Mod(k_1)$,$Mod(k_2) \subseteq \Gamma$, onda se može formirati presek

$$Mod(k_1) \cap Mod(k_2) \subseteq \Gamma$$

i možemo postaviti pitanje da li za bilo koja dva $k_1, k_2 \in K$ postoji $k \in K$ ili $\alpha \in \mathcal{F}$ takav da

$$Mod(k) = Mod(k_1) \cap Mod(k_2)$$

$$Mod(\alpha) = Mod(k_1) \cap Mod(k_2).$$

Ponovo, odgovor zavisi od T i od $\mathcal{F}$. Ako jeste, kažemo da je K (ili $\mathcal{F}$) zatvoren (ili kompletan) u odnosu na definiciju konjukcije skup-teorijskim presekom. Takođe može se definisati kompletnost od K i od $\mathcal{F}$ u odnosu na disjunkciju

$$Mod(k_1) \cup Mod(k_2) \subseteq \Gamma$$

ili u odnosu na bilo koji drugi semantično definisano logički operator.

Možemo slobodno reći da su srce i duša kvantne mehanike sadržani u Hilbertovom prostoru. Skup vektora Hilbertovog prostora je skup stanja. Veze između stanja i fizičkih veličina, kao i sve što ovo podrazumeva o ponašanju kvantno mehaničkih sistema su utkani u strukture ovih prostora, predstavljeni su relacijama među matematičkim objektima koji ih reprezentuju. Ovo znači da je razumevanje osobina sistema sa tačke gledišta kvantne mehanike, neodvojivo od poznavanja strukture tih prostora.

Za kvantnu mehaniku sa matematičke strane gledišta, ključni pojmovi su samo-adjungovani operator i Hilbertov prostor. Samo-adjungovani operator određuje ortonormiranu bazu Hilbertovog prostora. Ta ortonormirana baza se sastoji od karakterističnih vektora tog operatora i odgovarajućih vrednosti koje su realne. Hilbertov prostor je vektorski prostor u kome je definisan skalarni proizvod i kompletan je tj. u kome svaki Cauchyjev niz vektora konvergira ka nekom vektoru u tom prostoru. Sve informacije što postoje o relacijama između stanja i fizičkih veličina u kvantnoj mehanici su matematičke relacije između vektora i operatora, koji ih reprezentuju.

U kvantnoj teoriji, pomoću samo-adjungovanih operatora možemo opisati opažljive veličine. Pošto su rezultati opservacija uvek realni brojevi, zato postoji način povezivanja brojeva sa operatrima. Za to koristimo karakteristične vektore i karakteristične vrednosti. Ako operator deluje na određeni vektor, tako što ga pretvara u višestruki umnožak samog sebe, onda se taj vektor naziva karakteristični vektor od operatora sa karakterističnom vrednošću. Znači opservable, fizičke veličine koje možemo meriti, su samo-adjungovani operatori. Moguće vrednosti su karakteristične vrednosti tog operatora. Razvoj stanja je zadat pomoću Schrödingerove jednačine. Možemo reći da je nama matematičarima lakše razumeti matematičke strukture koje opisuju kvantno mehanički sistem, a teže nam je razumeti fizičku teoriju. U sledećem poglavlju obradićemo Hilbertov prostor i njegov ortogonalni komplement. Posle toga ćemo se baviti ortokomplementarnom, modularnom, i ortomodularnom mrežom.

3.3 Hilbertove i ortomodularne mreže

U ovom poglavlju su opisana mrežna svojstva skupa zatvorenih vektorskih potprostora (moguće i beskonačno dimenzionalnog) kompleksnog Hilbertovog prostora. Ova mreža je atomarna, kompletna, ortomodularna. Pokazaće se da postoje važne razlike između mreže projekcija konačnog i beskonačno-dimenzionalnog Hilbertovog prostora.

Neka je $\mathcal{H}$ kompleksan Hilbertov prostor. $\mathcal{H}_0 \subset \mathcal{H}$ je **vektorski potprostor** ako je $\mathcal{H}_0$ vektorski prostor. $\mathcal{H}_0$ je **zatvoren vektorski potprostor** ako

je vektorski potprostor i ako je zatvoren u normi u $\mathcal{H}$, tj. ako je a_n Košijev niz u $\mathcal{H}_0$, tada postoji $b \in \mathcal{H}_0$ granica od a_n. U konačno-dimenzionalnom Hilbertovom prostoru svaki vektorski potprostor je zatvoren, ali u beskonačno-dimenzionalnom prostoru ne mora da bude. Zbog toga moramo naglasiti koji prostor posmatramo. Zatvoren vektorski potprostor $\mathcal{H}_0$ je i sam Hilbertov prostor.
Sa $Sub(\mathcal{H})$ označimo skup svih zatvorenih vektorskih potprostora od $\mathcal{H}$. Zatvorene vektorske potprostore obično označavamo sa pisanim slovima $\mathcal{G}$,$\mathcal{F}$, $\mathcal{E}$....

Definicija 3.16 *(Parcijalno uređenje u $Sub(\mathcal{H})$): Neka je $\mathcal{H}$ Hilbertov prostor. Relaciju $\leq$ u skupu $Sub(\mathcal{H})$ definišemo ovako:*

$$\mathcal{H}_1 \leq \mathcal{H}_2 \text{ ako i samo ako je } \mathcal{H}_1 \subseteq \mathcal{H}_2,$$

tj. $\mathcal{H}_1 \leq \mathcal{H}_2$ ako i samo ako je potprostor $\mathcal{H}_1$ sadržan u potprostoru $\mathcal{H}_2$.

Relacija $\leq$ je očigledno refleksivna, antisimetrična i tranzitivna, što znači da je $Sub(\mathcal{H})$ parcijalno uređen skup.

Definicija 3.17 *(Infimum(presek) u $Sub(\mathcal{H})$): Neka je $\mathcal{G}_i$ familija zatvorenih vektorskih potprostora Hilbertovog prostora $\mathcal{H}$. Definišimo **infimum** kao zatvoren vektorski potprostor*

$$\bigwedge_i \mathcal{G}_i \equiv \cap_i \mathcal{G}_i,$$

gde je $\cap$ oznaka za presek skupova.

Definicija 3.18 *(Supremum(zbir) u $Sub(\mathcal{H})$): Neka je $\mathcal{G}_i$ familija zatvorenih vektorskih potprostora u Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$. Suma tih potprostora je vektorski potprostor $\sum_i \mathcal{G}_i$ definisan sa*

$$\sum_i \mathcal{G}_i = \{a \in \mathcal{H} \mid a = \sum_i^n b_i, \text{ gde je } b_i \in \mathcal{G}_i, \ n \in \mathbb{N}\}.$$

Supremum, koji označimo sa $\bigvee_i \mathcal{G}_i$, definisan je kao zatvoren vektorski potprostor generisan sa $\mathcal{G}_i$, tj. $\bigvee_i \mathcal{G}_i$ je zatvaranje od $\sum_i \mathcal{G}_i$ u datoj normi.
Ako $\mathcal{H}$ nije konačno dimenzionalan, tada suma zatvorenih potprostora ne mora biti zatvoren potprostor. Ovo se može videti i u sledećem primeru.

Primer 3.19 *Neka su a_n, b_n, $n \in \mathbb{N}$ beskonačni ortonormirani nizovi u Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$ takvi da*

$$(a_n, b_m) = 0$$

za sve $n, m \in \mathbb{N}$. Neka su $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dva beskonačna niza pozitivnih realnih brojeva za koje važi:

$$\sum y_n^2 < \infty.$$

Skup vektora z_n definišemo

$$z_n \equiv x_n a_n + y_n b_n$$

je ortonormiran, tj. važi

$$1 = \|z_n\|^2 = x_n^2 + y_n^2,$$

znajući da takvi nizovi postoje, na primer $x_n = \cos(\frac{1}{n})$ *i* $y_n = \sin(\frac{1}{n})$. *Tvrdimo da su ova dva zatvorena potprostora*

$$\mathcal{E} = [a_n, n \in \mathbb{N}] \text{ i } \mathcal{G} = [z_n, n \in \mathbb{N}]$$

takva da $\mathcal{E} \vee \mathcal{G}$ *nije jednako sa sumom od* $\mathcal{E}$ *i* $\mathcal{G}$. *Uzimamo* $c = \sum y_n b_n$ *i videćemo* $c \in \mathcal{E} \vee \mathcal{G}$, *ali* $c \neq c^{\mathcal{E}} + c^{\mathcal{G}}$, *gde je c izražen kao zbir dva vektora gde* $c^{\mathcal{E}}$ *koristi elemente baze* $\mathcal{E}$, *a* $c^{\mathcal{G}}$ *koristi elemente baze* $\mathcal{G}$. *Element* b_n *je u* $\mathcal{E} + \mathcal{G}$ *za svako* $n \in \mathbb{N}$, *dok* $y_n \neq 0$ *i možemo pisati*

$$b_n = -\frac{x_n}{y_n} a_n + (\frac{1}{y_n} x_n a_n + \frac{1}{y_n} y_n b_n) = -\frac{x_n}{y_n} a_n + \frac{1}{y_n} z_n.$$

Kako je $\sum y_n^2 < \infty$, *sledi da je* $c \in \mathcal{E} \vee \mathcal{G}$. *Ako bismo mogli napisati* $c = c^{\mathcal{E}} + c^{\mathcal{G}}$ *tada bi sledilo*

$$\begin{aligned} y_n &= (c, b_n) = (c^{\mathcal{E}} + c^{\mathcal{G}}, b_n) \\ &= (c^{\mathcal{G}}, b_n) = (\sum_j (c^{\mathcal{G}}, z_j) z_j, b_n) \\ &= (c^{\mathcal{G}}, z_n) y_n. \end{aligned}$$

Kako je $y_n \neq 0$, *sledilo bi* $(c^{\mathcal{G}}, z_n) = 1$, *za svako* $n \in \mathbb{N}$. *Međutim to nije slučaj, jer* $(c^{\mathcal{G}}, z_n)$ *je Furijerov koeficijent vektora* $c^{\mathcal{G}}$, *u odnosu na* z_n.

Lema 3.20 *(1)*$\bigwedge \mathcal{G}_i$ *je najveće donje ograničenje potprostora* $\mathcal{G}_i$ *sa uređenjem* $\leq$, *tj.* $\bigwedge \mathcal{G}_i \leq \mathcal{G}_i$ *za svako* $i \in \mathbb{N}$, *i ako je* $\mathcal{F} \leq \mathcal{G}_i$ *za svako* $i \in \mathbb{N}$, *tada je* $\mathcal{F} \leq (\bigwedge \mathcal{G}_i)$.
(2)$\bigvee_i \mathcal{G}_i$ *je najmanje gornje ograničenje potprostora* $\mathcal{G}_i$, *tj.* $\bigvee_i \mathcal{G}_i \geq \mathcal{G}_i$, *za svako* $i \in \mathbb{N}$, *i ako je* $\mathcal{F} \geq \mathcal{G}_i$ *za svako* $i \in \mathbb{N}$, *tada je* $\bigvee_i \mathcal{G}_i \leq \mathcal{F}$.

Definicija 3.21 *(Ortokomplementiranje u* $Sub(\mathcal{H})$*): Neka je* $\mathcal{H}$ *Hilbertov prostor. Neka je* $\mathcal{G}$ *zatvoren vektorski potprostor. Definišemo* $\mathcal{G}^{\perp}$ *sa*

$$\mathcal{G}^{\perp} \equiv \{a \in \mathcal{H} \mid (a, b) = 0, \text{ za svako } b \in \mathcal{G}\}.$$

$\mathcal{G}^{\perp}$ *je zatvoren vektorski potprostor i zovemo ga* ***ortogonalni komplement*** *od* $\mathcal{G}$.

Lema 3.22 *Preslikavanje* $\mathcal{G} \mapsto \mathcal{G}^{\perp}$ *definisano kao u prethodnoj definiciji, ima sledeće osobine:*
(1) $(\mathcal{G}^{\perp})^{\perp} = \mathcal{G}$
(2) ako je $\mathcal{G} \leq \mathcal{F}$ *tada je* $\mathcal{F}^{\perp} \leq \mathcal{G}^{\perp}$
(3) $\mathcal{G} \wedge \mathcal{G}^{\perp} = 0$
(4) $\mathcal{G} \vee \mathcal{G}^{\perp} = \mathcal{H}$,
gde je $0 = \{0\}$ *vektorski prostor, a* $\mathcal{H}$ *je ceo Hilbertov prostor.*

Dokaz. (1) Kako je $(\mathcal{G}^{\perp})^{\perp} = \overline{\mathcal{G}}$, i $\mathcal{G}$ je po definiciji zatvoren vektorski potprostor, tada je $\overline{\mathcal{G}} = \mathcal{G}$.
(2) Očigledno.
(3) Jasno da je $\{0\} \subseteq \mathcal{G} \wedge \mathcal{G}^{\perp}$. Treba još dokazati $\mathcal{G} \wedge \mathcal{G}^{\perp} \subseteq \{0\}$. Neka je $x \in \mathcal{G} \wedge \mathcal{G}^{\perp}$. Tada je $x \in \mathcal{G}$ i za svako $y \in \mathcal{G}$ $(y, x) = 0$. Otuda za $y = x$ je $(x, x) = 0$ ako i samo ako je $x = 0$.

(4) Jedan od elementarnih činjenica u teoriji Hilbertovih prostora je da za svako $b \in \mathcal{H}$ postoji jedinstvena projekcija na zatvoren vektorski potprostor $a \in \mathcal{G}$ takav da je $(b-a) \in \mathcal{G}^{\perp}$. Dakle, $b = (b-a) + a \in \mathcal{G}^{\perp} + \mathcal{G}$.

□

Kao posledicu dobijamo:

Tvrđenje 3.23 *Ako je $\mathcal{H}$ Hilbertov prostor, tada je $Sub(\mathcal{H})$ ortokomplementirana mreža.*

Lema 3.24 *Ako je $\mathcal{H}$ konačno-dimenzionalan Hilbertov prostor, tada je $Sub(\mathcal{H})$ modularna mreža.*

Dokaz. Neka su $\mathcal{F}$ i $\mathcal{G}$ zatvoreni vektorski potprostori Hilbertovog prostora $\mathcal{H}$ i neka je $\mathcal{F} \leq \mathcal{G}$. Pokazaćemo da za svako $\mathcal{E} \in Sub(\mathcal{H})$ važi

$$\mathcal{F} \vee (\mathcal{E} \wedge \mathcal{G}) = (\mathcal{F} \vee \mathcal{E}) \wedge \mathcal{G}.$$

Ako su svi ovi potprostori konačno dimenzionalni, tada je

$$a \in \mathcal{F} \vee (\mathcal{E} \wedge \mathcal{G}) \text{ ako i samo ako } a = a^{\mathcal{F}} + a^{\mathcal{E} \wedge \mathcal{G}}.$$

Ali $a^{\mathcal{E} \wedge \mathcal{G}} \in \mathcal{E} \wedge \mathcal{G}$ ako i samo ako

$$a^{\mathcal{E} \wedge \mathcal{G}} \in \mathcal{E} \text{ i } a^{\mathcal{E} \wedge \mathcal{G}} \in \mathcal{G}.$$

Odatle sledi

$$a = a^{\mathcal{F}} + a^{\mathcal{E} \wedge \mathcal{G}} \in \mathcal{F} \vee \mathcal{E},$$

gde je a suma vektora u $\mathcal{F}$ i u $\mathcal{E}$. Ali je a takođe vektor u $\mathcal{G}$, kako je $a^{\mathcal{F}} \in \mathcal{G}$ sa pretpostavkom $\mathcal{F} \leq \mathcal{G}$.
Obrnuto, ako je

$$a \in (\mathcal{F} \vee \mathcal{E}) \wedge \mathcal{G}$$

tada je $a \in \mathcal{G}$ i $a \in \mathcal{F} \vee \mathcal{E}$, pa odatle je $a = a^{\mathcal{F}} + a^{\mathcal{E}}$ što implicira ($a \in \mathcal{G}$,$\mathcal{F} \leq \mathcal{G}$)

$$a^{\mathcal{E}} = a - a^{\mathcal{F}} \in \mathcal{G}$$

i $a^{\mathcal{E}} \in \mathcal{E} \wedge \mathcal{G}$, stoga je a suma dva vektora, jedan leži u $\mathcal{F}$, a drugi u $\mathcal{E} \wedge \mathcal{G}$, tj. $a \in \mathcal{F} \vee (\mathcal{E} \wedge \mathcal{G})$. □

U gornjem dokazu je bilo neophodno da potprostori $\mathcal{E}$,$\mathcal{F}$,$\mathcal{G}$ imaju konačne dimenzije. Ako ovaj uslov nije ispunjen, tada obe strane jednakosti modularnosti mogu sadržati elemente koji ne pripadaju ni jednom potprostoru, a ti elementi se ne mogu dobiti kao sume elemenata u potprostoru, kao što se vidi i u primeru 3.19. Zato gornji dokaz ne prolazi u slučaju da je $\mathcal{H}$ beskonačne dimenzije.

Lema 3.25 *Ako Hilbertov prostor $\mathcal{H}$ nije konačne dimenzije, tada $Sub(\mathcal{H})$ nije modularna mreža.*

Dokaz. Neka je a_n, $n \in \mathbb{N}$ ortonormirana baza u $\mathcal{H}$, i definišemo elemente b_n sa

$$b_n = a_{2n} + \alpha^{-n} a_1 + \alpha^{-2n} a_{2n+1}, \ (\alpha > 1)$$

Posmatramo potprostore $\mathcal{E}$,$\mathcal{F}$,$\mathcal{G}$ definisane na sledeći način:

$$\mathcal{F} \equiv \text{ generisan elementima } b_n, n \in \mathbb{N},$$
$$\mathcal{G} \equiv \text{ generisan elementima } b_n, n \in \mathbb{N} \; i \; a_1$$
$$\mathcal{E} \equiv \text{ generisan elementima } a_{2n}, n \in \mathbb{N}$$

Očigledno
$$\mathcal{F} \wedge \mathcal{E} = 0 \text{ i } \mathcal{E} \wedge \mathcal{G} = 0.$$

Kako važi $\mathcal{F} \leq \mathcal{G}$, svi elementi $\sum_n z_n b_n \in \mathcal{F}$ su takođe i u $\mathcal{G}$. Pošto je $\mathcal{F}$ strogo manje od $\mathcal{G}$ jer

$$b'_n = a_{2n} + \alpha^{-n} a_1 + \alpha^{-2n} a_{2n+1} - \alpha^{-n} a_1 = a_{2n} + \alpha^{-2n} a_{2n+1}$$

što nije element $\mathcal{F}$ za svako $n \in \mathbb{N}$, međutim $b'_n \in \mathcal{G}$ za svako $n \in \mathbb{N}$.
Kako je $\mathcal{F} \leq \mathcal{G}$, važi
$$\mathcal{F} \vee \mathcal{E} \leq \mathcal{G} \vee \mathcal{E}.$$

Treba još dokazati da važi i drugi smer, to jest da važi

$$\mathcal{G} \vee \mathcal{E} \leq \mathcal{F} \vee \mathcal{E}.$$

Za to nam treba da je $\mathcal{G} \leq \mathcal{F} \vee \mathcal{E}$, jer je $\mathcal{E} \leq \mathcal{E}$. Potprostor $\mathcal{G}$ je zatvorenje elemenata vektorskih potprostora

$$\sum_{n=1}^{N} z_n b_n + z a_1$$

i potprostor $\mathcal{E}$ je zatvorenje elemenata vektorskih potprostora

$$\sum_{n=1}^{N} z_n a_{2n}.$$

Zaista, elementi $\sum_{n=1}^{N} z_n b_n + z a_1$ su u $\mathcal{F} \vee \mathcal{E}$, kako je

$$\sum_{n=1}^{N} z_n b_n \in \mathcal{F}$$

i dodatno a_1 je takođe u $\mathcal{F} \vee \mathcal{E}$ jer $a_1 = \lim_n t_n$, gde je

$$t_n \equiv \alpha^n b_n - \alpha^n a_{2n} = a_1 - \alpha^{-n} a_{2n+1}$$

i
$$\alpha^n b_n - \alpha^n a_{2n} \in \mathcal{F} \vee \mathcal{E}.$$

Konačno
$$\mathcal{F} \vee \mathcal{E} = \mathcal{G} \vee \mathcal{E}.$$

Pretpostavljajući jednakost modularnosti

$$\mathcal{F} \vee (\mathcal{E} \wedge \mathcal{G}) = (\mathcal{F} \vee \mathcal{E}) \wedge \mathcal{G}$$

i koristeći $\mathcal{F} \vee \mathcal{E}$= $\mathcal{G} \vee \mathcal{E}$ dobijamo

$$\mathcal{F} = \mathcal{F} \vee 0 = \mathcal{F} \vee (\mathcal{E} \wedge \mathcal{G}) = (\mathcal{F} \vee \mathcal{E}) \wedge \mathcal{G} = (\mathcal{G} \vee \mathcal{E}) \wedge \mathcal{G} = \mathcal{G}$$

To znači da je $\mathcal{F}$=$\mathcal{G}$, što daje kontradikciju sa $\mathcal{F} \neq \mathcal{G}$. $\square$

Definicija 3.26 *Ortokomplementirana mreža je* ***ortomodularna*** *ako važi sledeći uslov:*

$$\text{ako je } A \leq B \text{ i } A^{\perp} \leq C \text{ tada } A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$$

Tvrđenje 3.27 *U ortokomplementiranoj mreži $\mathcal{L}$ sledeći uslovi su ekvivalentni:*
(1) ortomodularnost:
ako $A \leq B$ i $A^{\perp} \leq C$ tada je $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
(2) kratka forma ortomodularnosti:
ako $A \leq B$ tada je $B = A \vee (A^{\perp} \wedge B)$
(2') dualna kratka forma ortomodularnosti:
ako $B \leq A$ tada je $B = A \wedge (A^{\perp} \vee B)$
(3) kvazimodularnost (zovemo još i slaba modularnost):
ako $A \leq B$ i $A^{\perp} \leq C$ tada je $A \vee (B \wedge C) = B$
(3') dualna forma kvazimodularnosti
ako $B \leq A$ i $C \leq A^{\perp}$ tada je $A \wedge (B \vee C) = B$.

Dokaz. Ekvivalencije (2) i (2'), kao ekvivalencije (3) i (3') su posledice ortokomplemenata i De Morganovog zakona.
(3') $\Rightarrow$ (2'): Zamenom $C = A^{\perp}$ u (3') dobijamo (2').
(2') $\Rightarrow$ (3'): Neka važe $B \leq A$ i $C \leq A^{\perp}$, tada

$$B \vee C \leq B \vee A^{\perp} \text{ i } A \wedge (B \vee C) \leq A \wedge (B \vee A^{\perp}).$$

Neka važi (2') pa

$$A \wedge (B \vee C) \leq B \ (*)$$

i kako je $B \leq A$, tada

$$B \leq A \wedge (B \vee C). \ (**)$$

Iz (*) i (**) imamo $A \wedge (B \vee C) = B$.
(1) $\Rightarrow$ (2): Neka važi (1). Zamenom $C = A^{\perp}$ u (1) i ako označimo $A \vee B = B$ to jest $A \leq B$:

$$A \vee (B \wedge A^{\perp}) = (A \vee B) \wedge (A \vee A^{\perp}) = B \wedge I = B.$$

(2) $\Rightarrow$ (1): Pošto važi jednostrani distributivni zakon

$$A \vee (B \wedge C) \leq (A \vee B) \wedge (A \vee C),$$

dovoljno je dokazati da je:

$$A \vee (B \wedge C) \geq (A \vee B) \wedge (A \vee C).$$

Iz $A^{\perp} \leq C$ sledi

$$A^{\perp} \wedge B \leq C \wedge B$$

i

$$A \vee (A^{\perp} \wedge B) \leq A \vee (C \wedge B),$$

to jest

$$A \vee (B \wedge C) \geq B.$$

Kako je $A^\perp \leq C$ onda je $A^\perp \vee A \leq C \vee A$, ali $I = A^\perp \vee A$ pa je onda $I = C \vee A$, pa imamo da je

$$A \vee (A^\perp \wedge B) = (A \vee (A^\perp \wedge B)) \wedge (A \vee C).$$

Na osnovu pretpostavke (2) imamo da je

$$(A \vee (A^\perp \wedge B)) \wedge (A \vee C) = B \wedge (A \vee C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$$

jer je $A \leq B$. Otuda imamo da je

$$A \vee (B \wedge C) \geq (A \vee B) \wedge (A \vee C).$$

□

Tvrđenje 3.28 *Neka je $\mathcal{H}$ Hilbertov prostor. Sub($\mathcal{H}$) je ortomodularna mreža, bez obzira na dimenziju $\mathcal{H}$.*

Dokaz. Neka je $\mathcal{F} \leq \mathcal{G}$. $\mathcal{G}$ je Hilbertov prostor koji ima zatvoren vektorski potprostor $\mathcal{F}$.

$$\mathcal{F} \vee \mathcal{F}^\perp = \mathcal{G}.$$

$\mathcal{G} \wedge \mathcal{F}^\perp$ je ortogonalni komplement od $\mathcal{F}$ u $\mathcal{G}$, pa imamo

$$\mathcal{F} \vee (\mathcal{F}^\perp \wedge \mathcal{G}) = \mathcal{G},$$

to je kratka forma ortomodularnosti, a prema tvrdnji 3.27. ekvivalentan je sa modularnošću.

□

3.4 Operatori Hilbertovih prostora

Definicija 3.29 *Preslikavanje $f : V \to U$ je **linearno preslikavanje** vektorskog prostora $(V, +, \cdot, F)$ u vektorski prostor $(U, \oplus, \odot, F)$ ako važi:*
(1) $f(x + y) = f(x) \oplus f(y)$ $(x, y \in V)$,
(2) $f(\alpha \cdot x) = \alpha \odot f(x)$ $(x, \alpha \in F)$.

Skup svih linearnih preslikavanja iz V u U označimo sa $L(V, U)$.

Linearan operator Q definisan na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$ je **ograničen** ako je

$$\sup_{\|\eta\| \leq 1} \|A\eta\| < \infty.$$

Može se dokazati da je ograničenost linearnog operatora ekvivalentna sa neprekidnošću operatora.

Definicija 3.30 *Neka je $\mathcal{H}$ Hilbertov prostor. Sa $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ označimo sve linearne i ograničene operatore definisane na $\mathcal{H}$.*

$\mathcal{B}(\mathcal{H})$ je vektorski prostor u odnosu na operaciju sabiranja

$$(Q + R)(\eta) \equiv Q\eta + R\eta$$

i množenje skalarom

$$(Q, \lambda) \mapsto \lambda Q.$$

Formula $\|Q\| = \sup_{\|\eta\|\leq 1} \|Q\eta\| < \infty$ definiše normu na $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, tako da $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ postaje Banachov prostor (tj. $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ je kompletan u normi). $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ je takođe algebra ako je proizvod definisan kompozicijom:

$$(Q, R)(\eta) \equiv Q(R(\eta)).$$

$\mathcal{B}(\mathcal{H})$ je Banachova algebra, tj. važi

$$\|QR\| \leq \|Q\|\|R\|$$

(proizvod je neprekidan u normi).

Definicija 3.31 *Neka je $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ algebra svih ograničenih linearnih operatora na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$. Operator $E \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ je **idempotentan** ako važi*

$$E^2 = E.$$

Neka je Q linearni operator u $L(\mathcal{H})$. Operator Q^* je **adjungovani** od Q ako važi

$$(\eta, Q\xi) = (Q^*\eta, \xi), \text{ za svako } \eta, \xi \in \mathcal{H}.$$

Postojanje adjungovanog operatora dobijamo iz sledećih činjenica:
Neka su $(H_1, (.,.)_1)$ i $(H_2, (.,.)_2)$ Hilbertovi prostori nad $F \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ i neka je $A \in L(H_1, H_2)$. Tada je za svako fiksirano $y \in H_2$ relacijom $f(x) = (Ax, y)_2$, $x \in H_1$ definisana neprekidna linearna funkcionela $f \in H_2^{'} = L(H_1, F)$. Na osnovu Risove teoreme o reprezentaciji neprekidne linearne funkcionele, postoji jedinstven elemenat $z(y) \in H_1$ takav da je

$$(Ax, y)_2 = (x, z(y))_1, \ x \in H_1.$$

Dakle, preslikavanje $A^* : y \mapsto z(y)$ je adjungovano preslikavanju A.
Neka je $\mathcal{H}$ neki Hilbertov prostor. Preslikavanje

$$\mathcal{B}(\mathcal{H}) \ni Q \mapsto Q^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$$

ima sledeće osobine:
(1) $(Q^*)^* = Q$
(2) $(QR)^* = R^*Q^*$
(3) $\|Q^*\| = \|Q\|$.

Definicija 3.32 *Banachova algebra u kojoj preslikavanje * ima osobine i)-iii) se naziva involutivna Banachova algebra.*

Sledeća C^*-osobina takođe važi u $\mathcal{B}(\mathcal{H})$:
iv) C*-osobina: $\|Q^*Q\| = \|Q\|^2$, za svako $Q \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Definicija 3.33 *C^*-algebra je involutivna Banachova algebra koja ima C^*-osobinu.*

Dakle, svako zatvaranje od *-podalgebre od $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ u datoj normi je C^*-algebra.

Važna vrsta operatora su unitarni i samo-adjungovani:

Definicija 3.34 *Neka je $\mathcal{H}$ Hilbertov prostor, $T \in L(\mathcal{H})$. Operator T je* ***unitaran*** *ako važi:*

$$TT^* = T^*T = I.$$

Definicija 3.35 *Neka je $\mathcal{H}$ Hilbertov prostor, $T \in L(\mathcal{H})$. Operator T je* ***samo-adjungovani (ermitski)*** *ako važi:*

$$T = T^*.$$

Definicija 3.36 *Neka je* $\boldsymbol{V}$ *vektorski prostor nad poljem* $\boldsymbol{F}$*, i neka je $T : V \to V$ linearni operator. Nenula vektor $x \in V$ je* ***karakteristični vektor*** *za operator T ako postoji $\lambda \in F$ takav da je*

$$Tx = \lambda x.$$

U tom slučaju za $\lambda \in F$ kažemo da je ***karakteristična (sopstvena) vrednost*** *za karakterističan vektor x.*

Tvrđenje 3.37 *Neka je $\mathcal{H}$ Hilbertov prostor i $T \in L(\mathcal{H})$. Tada je T samo-adjungovan operator ako i samo ako je*

$$(Tx, x) \in \mathbb{R} \text{ za svako } x \in \mathcal{H}.$$

Dokaz. Neka je V vektorski prostor. Neka je T samo-adjungovan operator. Tada je

$$(Tx, x) = (x, Tx) = \overline{(Tx, x)}$$

tj. $(Tx, x) \in \mathbb{R}$.
Obrnuto, neka je (Tx, x) realan broj za svaki vektor $x \in V$. Tada za svaki skalar $\alpha \in \mathbb{C}$ i za proizvoljne vektore $x, y \in V$ važi

$$(T(\alpha x + y), \alpha x + y) = |\alpha|^2(Tx, x) + (Ty, y) + \alpha(Tx, y) + \overline{\alpha}(Ty, x).$$

Po pretpostavci on je realan broj, pa je onda i $\alpha(Tx, y) + \overline{\alpha}\overline{(x, Ty)}$ realan broj.
Za $\alpha = 1$ imamo $(Tx, y) + \overline{(x, Ty)} \in \mathbb{R}$. Tada je $Im(Tx, y) = Im(x, Ty)$.
Za $\alpha = i$, imamo

$$i((Tx, y) - \overline{(x, Ty)}) \in \mathbb{R},$$

pa je

$$Re(Tx, y) = Re(x, Ty).$$

Dakle, $(Tx, y) = (x, Ty)$. □

Tvrđenje 3.38 *Ako je $T \in L(\mathcal{H})$ samo-adjungovan operator i ako je λ karakteristična vrednost za T tada je $\lambda \in \mathbb{R}$. Karakteristični vektori koji odgovaraju različitim karakterističnim vrednostima su ortogonalni.*

Dokaz. Neka je λ karakteristična vrednost za operator T i neka je x nenula odgovarajući karakteristični vektor za λ, tj. imamo $Tx = \lambda x$. Tada je

$$\lambda(x, x) = (\lambda x, x) = (Tx, x).$$

Kako je T samo-adjungovan operator, tada je ovo dalje jednako sa

$$(x, Tx) = (x, \lambda x) = \overline{\lambda}(x, x).$$

Dakle, $\lambda(x, x) = \overline{\lambda}(x, x)$, pa je $\lambda = \overline{\lambda}$.
Neka je $\eta \neq \lambda$ karakteristična vrednost za operator T, a y je odgovarajući karakteristični vektor za η. Tada je

$$\lambda(x, y) = (\lambda x, y) = (Tx, y) = (x, Ty) = (x, \eta y) = \eta(x, y).$$

Kako je $\eta \neq \lambda$, onda je $(x, y) = 0$, što znači da su karakteristični vektori x i y ortogonalni. $\square$

Dakle, sve karakteristične vrednosti samo-adjungovanih operatora su realni brojevi.

Definicija 3.39 *Linearan operator A definisan na $\mathcal{H}$ je* ***projekcija*** *ako je samo-adjungovan i idempotentan.*

Projekcije su neprekidni (u normi) operatori, norma projekcije je jednaka 1 (osim 0 projekcije). Specijalne projekcije su 0 i identičan operator I.
Postoji jedan na jedan korespondencija između projekcija definisanih na $\mathcal{H}$ i zatvorenih vektorskih potprostora na $\mathcal{H}$. Ako je E projekcija, može se identifikovati sa skupom slika od E: $range(E)$ je vektorski potprostor definisan

$$range(E) = \{a | Eb = a\}.$$

$range(E)$ je zatvoren vektorski potprostor u $\mathcal{H}$. Obrnuto, ako je $\mathcal{G} \subset \mathcal{H}$ zatvoren vektorski potprostor, tada za svako $a \in \mathcal{H}$ možemo pisati $a_1 + a_2 = a$, gde je $a_1 \in \mathcal{G}$, $a_2 \in \mathcal{G}^{\perp}$. Operator G definisan sa $Ga \equiv a_1$ je projekcija na $\mathcal{G}$.
U daljem tekstu ćemo identifikovati zatvorene vektorske potprostore sa projekcijama, označavajući $Sub(\mathcal{H})$ i skup svih projekcija i skup svih zatvorenih vektorskih potprostora. Bitno je razjasniti da li se element u $Sub(\mathcal{H})$ posmatra kao potprostor ili projekcija. Za potprostore određene projekcijama E, F, G koristićemo pisana slova $\mathcal{E}$,$\mathcal{F}$,$\mathcal{G}$.
Pošto je $Sub(\mathcal{H})$ podskup algebre $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ svih ograničenih operatora definisanih na $\mathcal{H}$, imamo parcijalnu algebru operatora:
Ako $A, B \in Sub(\mathcal{H})$, $A + B$, AB, i aA su svi definisani kao linearni operatori, koji međutim nisu projekcije.

Definicija 3.40 *Projekcija F* ***je manja*** *od projekcije G, u oznaci $F \prec G$ ako i samo ako $(Fa, a) \leq (Ga, a)$, za svako $a \in \mathcal{H}$.*

Sledeća lema nam pokazuje da se relacija $\prec$ poklapa sa parcijalnim uređenjem definisanim između dva potprostora.

Lema 3.41 *$\mathcal{F} \leq \mathcal{G}$ ako i samo ako je $F \prec G$.*

Dokaz. Neka je $\mathcal{F} \leq \mathcal{G}$. Posmatramo ortogonalnu dekompoziciju $a = a^{\mathcal{F}} + a^{\mathcal{F}^{\perp}}$. Neka je $Fa = a^{\mathcal{F}}$. Tada imamo

$$(a, Fa) = (a, F^2 a) = (Fa, Fa) = \|a^{\mathcal{F}}\|^2.$$

Kako važi $Ga^{\mathcal{F}} = a^{\mathcal{F}}$ tada je

$$(a, Ga) = (a, G^2(a^{\mathcal{F}} + a^{\mathcal{F}^{\perp}})) = \|a^{\mathcal{F}} + Ga^{\mathcal{F}^{\perp}}\|^2 \geq \|a^{\mathcal{F}}\|^2.$$

Obrnuto, ako je $F \prec G$, tada za svako $a \in \mathcal{H}$

$$\|Fa\|^2 \leq \|Ga\|^2.$$

Ako je $a \in \mathcal{F}$, tada je

$$\|a\| = \|Fa\| \leq \|Ga\| \leq \|a\|$$

pa je $\|Ga\| = \|a\|$, stoga je $a \in \mathcal{G}$. □

Lema 3.42 *Neka su A i B projekcije.*

$$A \leq B \text{ ako i samo ako je } AB = BA = A.$$

Dokaz. $A \leq B$ ako i samo ako je $BAa = Aa$, za svako $a \in \mathcal{H}$. Ali tada je $BA = A^*B^* = (BA)^* = A^* = A$. □

Definicija 3.43 *Neka je $\mathcal{H}$ Hilbertov prostor i $T \in L(\mathcal{H})$. Kažemo da je T* ***pozitivan operator*** *ako je $(Tx, x) \geq 0$ za svako $x \in \mathcal{H}$, i tada pišemo da je $T \geq 0$.*

Kako su karakteristične vrednosti samo-adjungovanih operatora realni brojevi i prema definiciji pozitivnog operatora dobijamo sledeću posledicu:

Posledica 3.44 *Svaki pozitivan operator je samo-adjungovan.*

Tvrđenje 3.45 *Ako je $\mathcal{H}$ Hilbertov prostor i $T \in L(\mathcal{H})$, tada je T^*T pozitivan operator.*

Dokaz. Za $x \in \mathcal{H}$ imamo

$$(T^*Tx, x) = (Tx, Tx) = \|Tx\|^2 \geq 0.$$

□

Definicija 3.46 *Neka je $\mathcal{H}$ Hilbertov prostor, i neka su A i B samo-adjungovani operatori iz $L(\mathcal{H})$. Ako je $A - B \geq 0$, tada pišemo $A \geq B$ ili $B \leq A$.*

Sve ove osobine Hilbertovih prostora nas motivišu da uvedemo apstraktne algebarske strukture kao što su efekt algebre odnosno D-poseti.

Glava 4

Efekt algebre i D-poseti

4.1 Efekt algebra

Ako je kvantno-mehanički sistem φ predstavljen na uobičajeni način kao Hilbertov prostor $\mathcal{H}$, tada samo-adjungovani operator A u $\mathcal{H}$ takav da $0 \leq A \leq 1$, (gde je 1 oznaka za identički operator) odgovara specijalnim opservablama koje zovemo "efekti". Efekti su značajni jer igraju važnu ulogu u stohastičkoj kvantnoj mehanici.

Definicija 4.1 *Neka je $(L, \oplus, 0, 1)$ sistem koji se sastoji od skupa L sa dva specijalna elemenata $0, 1 \in L$ na kom je definisana parcijalna binarna operacija $\oplus$ tako da važi:*
(1) Ako je $p \oplus q$ definisano onda je definisano i $q \oplus p$ i važi $p \oplus q = q \oplus p$ - zakon komutativnosti.
(2) Ako su $q \oplus r$ i $p \oplus (q \oplus r)$ definisani tada su i $p \oplus q$, $(p \oplus q) \oplus r$ definisani i važi $p \oplus (q \oplus r) = (p \oplus q) \oplus r$ - zakon asocijativnosti.
(3) Za svako $p \in L$ postoji jedinstven $q \in L$ takav da $p \oplus q$ je definisan i $p \oplus q = 1$ - zakon ortosuplementacija.
(4) Ako je $1 \oplus p$ definisano, tada je $p = 0$ - zakon jedan-nula.
(5) Ako su $p \oplus q$, $p \oplus r$ i $q \oplus r$ definisani, tada je $(p \oplus q) \oplus r$ defisano - zakon koherencije.
(6) Za svako $p, q \in L$ postoje $a, b, c \in L$ takvi da su $b \oplus c$ i $a \oplus (b \oplus c)$ definisani, i važi $p = a \oplus c$ i $q = b \oplus c$ -zakon kompatibilnost.
Sistem $(L, \oplus, 0, 1)$ koji zadovoljava uslove (1)-(4) zovemo ***efekt algebrom****.*

Ako nema opasnosti od konfuzije, kažemo da je L efekt algebra kada je $(L, \oplus, 0, 1)$ efekt algebra. Ako pišemo $p \oplus r = q$ u efekt algebri, tada podrazumevamo da je: $p \oplus r$ je definisano i $p \oplus r = q$. U nastavku ćemo pretpostaviti da je L efekt algebra.

Za skup svih efekata Hilbertovog prostora $\mathcal{H}$ važe osobine (1)-(4) iz definicije 4.1. ako parcijalnu operaciju $\oplus$ definišemo na sledeći način:

$$A \oplus B = A + B \text{ ako i samo ako } A + B \leq 1.$$

Definicija 4.2 *Neka je L efekt algebra i neka su $p, q \in L$.*
(1) Kažemo da je p ortogonalno na q, i pišemo $p \perp q$, ako i samo ako je $p \oplus q$

definisano. Ako je $0 \neq p$ *i* $p \perp p$ *tada* p *zovemo* ***izotropni element*** *od* L.
(2) Kažemo da je p ***manje ili jednako*** *od* q*, i pišemo* $p \leq q$*, ako i samo ako postoji element* $r \in L$ *tako da* $p \perp r$ *i* $p \oplus r = q$.
(3) Jedinstven element q *takav da* $p \perp q$ *i* $p \oplus q = 1$*, obeležavamo sa* p' *i zovemo ga* ***ortosuplement*** *od* p.

Lema 4.3 *Neka je* L *efekt algebra, i neka su* $p, q \in L$*. Tada važi:*
(1) $p \perp q \Rightarrow q \perp p$,
(2) $p'' = p$,
(3) $1' = 0$ *i* $0' = 1$,
(4) $p \oplus p' = 1$,
(5) $p \perp 0$ *i* $p \oplus 0 = p$,
(6) $p \perp 1 \Leftrightarrow p = 0$,
(7) $p \oplus q = 0 \Rightarrow p = q = 0$.

Dokaz. (1)-(4) su očigledni. Dokažimo ostale osobine.
(5) $1 = 1 \oplus 1 = (p' \oplus p) \oplus 0 = p' \oplus (p \oplus 0)$, stoga $p \oplus 0 = p'' = p$.
(6) $p \perp 1 \Rightarrow p = 0$ na osnovu zakona jedan-nula, a drugi smer sledi iz (5).
(7) Ako $p \oplus q = 0$, tada $1 = 1 \oplus 0 = 1 \oplus (p \oplus q) = (1 \oplus p) \oplus q$, tada $1 \perp p$ i odatle sledi $p = 0$. Analogno se dobija da je $q = 0$. $\square$

Tvrđenje 4.4 *Neka je* L *efekt algebra, i neka su* $p, q \in L$*. Tada važi:*
(1) $p \perp q \Rightarrow p \perp (p \oplus q)'$ *i* $p \oplus (p \oplus q)' = q'$,
(2) $p \perp q \Leftrightarrow p \leq q'$,
(3) $p \leq q \Rightarrow q' \leq p'$,
(4) $p \leq q \Rightarrow p \perp (p \oplus q')'$ *i* $p \oplus (p \oplus q')' = q$ *(ortomodularnost).*

Dokaz. (1) Neka je $r := (p \oplus q)'$. Tada $1 = (p \oplus q) \oplus r = q \oplus (p \oplus r)$, pa $q' = p \oplus r$.
(2) Ako je $p \perp q$ tada $p \leq q'$ sledi iz (1).
Obrnuto, ako je $p \leq q'$ tada postoji $r \in L$ sa osobinom $p \oplus r = q'$, pa stoga $1 = (p \oplus r) \oplus q = r \oplus (p \oplus q)$ pa onda je $p \perp q$.
(3) Iz (2) imamo $p \leq q \Rightarrow p \leq (q')' \Rightarrow p \perp q' \Rightarrow q' \perp p \Rightarrow q' \leq p'$.
(4) Zamenjujući u (1) q sa q' i korišćenjem (2) dobijamo tvrđenje. $\square$

Tvrđenje 4.5 *(zakon kancelativnosti): Neka je* L *efekt algebra i neka su* $p, q, r \in L$ *sa osobinom* $p, q \perp r$*. Tada važi:*
(1) $p \oplus r = q \oplus r \Rightarrow p = q$,
(2) $p \oplus r \leq q \oplus r \Rightarrow p \leq q$.

Dokaz. (1) Pretpostavimo $p \oplus r = q \oplus r$ i neka je $s := (p \oplus r)' = (q \oplus r)'$. Tada $(p \oplus r) \oplus s = 1 = (q \oplus r) \oplus s$, pa $p \oplus (r \oplus s) = q \oplus (r \oplus s) = 1$ i odatle je $p = (r \oplus s)' = q$.
(2) Pretpostavimo $p \oplus r \leq q \oplus r$. Tada postoji $s \in L$ sa osobinom $(p \oplus s) \oplus r = q \oplus r$, pa je $p \oplus s = q$, pa $p \leq q$. $\square$

Definicija 4.6 *Neka je* L *efekt algebra. Kažemo da je podskup* $A \subseteq L$ ***pod-efekt algebra*** *od* L *ako i samo ako* $0, 1 \in A$*,* A *je zatvoreno za* $p \mapsto p'$ *i za svako* $p, q \in A$*,* $p \perp q \Rightarrow p \oplus q \in A$.

Tvrđenje 4.7 *Efekt algebra* L *je parcijalno uređena sa relacijom* $\leq$ *i* $0 \leq p \leq 1$ *za svako* $p \in L$.

Dokaz. Refleksivnost i tranzitivnost su očigledne. Dokažimo antisimetričnost. Neka su $a, b \in L$ takve da važe $a \leq b$ i $b \leq a$. Tada postoje $p, q \in L$ takve da $a \oplus p = b$ i $b \oplus q = a$. Stoga, $a \oplus 0 = a = b \oplus q = (a \oplus p) \oplus q = a \oplus (p \oplus q)$ pa $p \oplus q = 0$ po kancelativnosti. Tada je iz leme 4.3 (7) imamo da je $p = q = 0$ pa odatle sledi da je $a = b$. $\square$

Ako je $(P, \leq)$ parcijalno uređen skup (poset), $a, b \in P$, $a \leq b$, neka je $P[a, b] := \{p \in P \mid a \leq p \leq b\}$.

Definicija 4.8 *Linearno uređenu efekt algebru zovemo* ***scale algebra****.*

Definicija 4.9 *Neka je $(G, \cdot)$ grupa i neka je $\leq$ parcijalno uređenje na G. Kažemo da je $(G, \cdot, \leq)$* ***parcijalno uređena grupa sa desne strane*** *ako*

$$\forall f, g, h \in G,\ f \leq g \Rightarrow f \cdot h \leq g \cdot h.$$

Neka je $(G, \cdot)$ grupa i neka je $\leq$ parcijalno uređenje na G. Kažemo da je $(G, \cdot, \leq)$ ***parcijalno uređena grupa sa leve strane*** *ako*

$$\forall f, g, h \in G,\ f \leq g \Rightarrow h \cdot f \leq h \cdot g.$$

Kažemo da je $(G, \cdot, \leq)$ ***parcijalno uređena grupa****, ako je parcijalno uređena grupa i sa leve i sa desne strane.*

Definicija 4.10 *Kažemo da je $(G, +, \leq)$* ***parcijalno uređena Abelova grupa****, ako je ona parcijalno uređena grupa i ako je $(G, +)$ Abelova grupa, to jest važi:*

$$a + b = b + a,\ \textit{za svako}\ a, b \in G.$$

Neka je G parcijalno uređena Abelova grupa. Skup

$$G^+ = \{x \in G \mid 0 \leq x\}$$

zovemo **pozitivan konus** grupe G.

Tvrđenje 4.11 *Neka je G parcijalno uređena Abelova grupa, $0 \neq u \in G^+$, i neka je $L := G^+[0, u] = \{g \in G \mid 0 \leq g \leq u\}$. Tada je $(L, 0, u, \oplus)$ efekt algebra, ako parcijalnu operaciju $\oplus$ na L definišemo na sledeći način:*

$$p \oplus q\ \textit{je definisano ako i samo ako je}\ p + q \in L.$$

U efekt algebri L imamo $p' = u - p$ i parcijalno uređenje na L se poklapa sa restrikcijom parcijalnog uređenja sa G na L.

Dokaz. Dokažimo osobine efekt algebri (1)-(4) iz definicije 4.1.
(1) Neka postoji $p \oplus q$. Tada je $p + q \in L$, ali pošto je $+$ komutativna operacija, imamo da je i $q + p \in L$, tj. $q \oplus p$. Odatle je $p \oplus q = q \oplus p$.
(2) Neka su $q \oplus r$ i $p \oplus (q \oplus r)$ definisani. Odatle imamo da $q + r \in L$ i $p + (q + r) \in L$. Kako je $+$ asocijativna operacija tada je $p + (q + r) = (p + q) + r \in L$, to jest $p \oplus (q \oplus r) = (p \oplus q) \oplus r$.
(3) Za svako p, $p \oplus (u - p) = u$. Pretpostavimo da $p \oplus q$ postoji i jednak je sa u. Tada je $p + q = u \in L$, pa je zbog komutativnosti operacija $+$ imamo da je $q + p = u \in L$, što implicira $q = u - p$. Odatle je q takav da $p \oplus q = u$ postoji i jedinstven je.
(4) Neka je $u \oplus p$ definisano, i neka je $u \oplus p = q$. Tada je $u + p = q \in L$, pa je $p = q - u \in L$. Kako je u najveći element iz L, onda $q = u$ i $p = 0$. $\square$

Definicija 4.12 *Efekt algebru $G^+[0,u]$ iz prethodne teoreme zovemo **interval efekt algebrom** ili skraćeno, **interval algebrom**.*

Ako je G bilo koja totalno uređena Abelova grupa sa pozitivnim konusom G^+ i $0 \neq u \in G^+$ tada je interval efekt algebra $G^+[0,u]$ scale algebra.

Definicija 4.13 *Ako $\mathbb{R}$ posmatramo kao aditivnu totalnu uređenu Abelovu grupu sa uobičajenim pozitivnim konusom $\mathbb{R}^+$, tada interval algebru $\mathbb{R}^+[0,u]$ zovemo **standardna scale algebra**.*

Definicija 4.14 *Neka je L efekt algebra. Neka je $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ konačan niz u L. Ako je $n = 1$, kažemo da postoji $\oplus(a_1)$ u L i definišemo ga sa $\oplus(a_1) := a_1$. Analogno, kažemo da postoji **ortogonalna suma** $\oplus(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$ u L ako i samo ako postoje $\oplus(a_1, a_2, a_3, ..., a_{n-1})$ i $\oplus(a_1, a_2, a_3, ..., a_{n-1}) \oplus a_n$ u L, gde je $\oplus(a_1, a_2, a_3, ..., a_n) := \oplus(a_1, a_2, a_3, ..., a_{n-1}) \oplus a_n$.*

Ako postoji ortogonalna suma $\oplus(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$ u L, kažemo de je $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ **ortogonalni niz** u L. Napomenimo, da a i b čine ortogonalni niz u L ako i samo ako $a \perp b$, gde je $\oplus(a,b) = a \oplus b$. Analogno, $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ je ortogonalni niz u L, definišemo ga sa $a_1 \oplus a_2 \oplus a_3 \oplus ... \oplus a_n := \oplus(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$. Ortogonalnu sumu označimo sa $\oplus_{i=1}^n a_i$ ili jednostavnije $\oplus_i a_i$ i podrazumeva se $i = 1, 2, 3, ..., n$.

Tvrđenje 4.15 *Neka je L efekt algebra. Pretpostavimo da je $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ jedna ortogonalna suma u L. Tada:*
(1) Ako je σ permutacija od $\{1, 2, 3, ..., n\}$ tada je $a_{\sigma 1}, a_{\sigma 2}, a_{\sigma 3}, ..., a_{\sigma n}$ ortogonalni niz u L i $\oplus(a_1, a_2, a_3, ..., a_n) = \oplus(a_{\sigma 1}, a_{\sigma 2}, a_{\sigma 3}, ..., a_{\sigma n})$.
(2) Ako je $1 \leq k \leq n-1$ tada su $a_1, a_2, ..., a_k$ i $a_{k+1}, a_{k+2}, ..., a_n$ ortogonalni nizovi u L i $\oplus(a_1, a_2, ..., a_n) = \oplus(a_1, a_2, ..., a_k) \oplus (a_{k+1}, a_{k+2}, ..., a_n)$.
(3) Ako je $b_1, b_2, ..., b_m$ ortogonalni niz u L, tada je $a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_m$ ortogonalni niz ako i samo ako $\oplus(a_1, a_2, ..., a_n) \perp \oplus(b_1, b_2, ..., b_m)$.
(4) Ako je $b_k \in L$, $b_k \leq a_k$ za $k = 1, 2, ..., n$ tada je $b_1, b_2, ..., b_n$ ortogonalni niz u L i $\oplus(b_1, b_2, ..., b_n) \leq \oplus(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$

Definicija 4.16 *Neka je L efekt algebra. Neka je n nenegativan ceo broj i neka je $a \in L$. Za $n = 0$ definišemo $na := 0$ i za $n = 1$ definišemo $na := a$. Za $n > 1$, neka je $a_i := a$ za $i = 1, 2, ..., n$. Kažemo da je element na definisan ako i samo ako je $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ ortogonalni niz, i tada je $na := \oplus(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$.*

Lema 4.17 *Neka je L efekt algebra. Neka je $a \in L$, neka su n, h, k nenegativni celi brojevi i pretpostavimo da je na definisano. Tada važi:*
(1) ka je definisano za svako $k \leq n$.
(2) Ako je $h + k \leq n$, tada je $(h+k)a = ha + ka$.
(3) Ako je $n > 0$, tada $na = 0 \Leftrightarrow a = 0$.
(4) Ako su ha i ka definisani i $a \neq 0$, tada $ha \leq ka \Leftrightarrow h \leq k$.

Dokaz. Koristeći prethodnu definiciju i (2) deo iz prethodne teoreme (indukcijom), zakon kancelativnosti i $p \oplus q = 0 \Rightarrow p = q = 0$. □

Ako je $0 \neq p \in L$, tada je p izotropni ako i samo ako je $2p$ definisano u L. Ako su $a_1, a_2, a_3, ..., a_k \in L$, $n_1, n_2, n_3, ..., n_k \in \mathbb{Z}^+$ i $p \in L$, tada pišemo $p = \oplus_{i=1}^k n_i a_i = n_1 a_1 \oplus n_2 a_2 \oplus ... \oplus n_k a_k$ što znači da su $n_1 a_1, n_2 a_2, ..., n_k a_k$

definisane u L, $n_1a_1, n_2a_2, ..., n_ka_k$ je jedan ortogonalni niz u L, i $p = \oplus_i n_i a_i$. Ako su oni celi brojevi, tj. $n_1, n_2, n_3, ..., n_k \in \mathbb{Z}^+$ tada je $p = \oplus_i n_i a_i$, kažemo da je p **(konačna) ortokombinacija** elemenata $a_1, a_2, a_3, ..., a_k$ sa koeficijentima $n_1, n_2, n_3, ..., n_k$.

Definicija 4.18 *Neka je L efekt algebra. Za podskup X od L kažemo da generiše L ako i samo ako je svaki element efekt algebre L konačna ortokombinacija elemenata iz X.*

Ortoalgebra je efekt algebra gde je zakon jedan-nula zamenjen sa zakonom konzistentnosti:

$$p \perp p \Rightarrow p = 0.$$

Otuda, svaka ortoalgebra je efekt algebra. Očigledno, efekt algebra je ortoalgebra ako i samo ako ne sadrži izotropne elemente. U standardnoj scale algebri $\mathbb{R}^+[0,1]$, svaki nenula element u intervalu $\mathbb{R}^+[0, \frac{1}{2}]$ je izotropni, dakle $\mathbb{R}^+[0,1]$ je efekt algebra, ali nije ortoalgebra.

Tvrđenje 4.19 *Za efekt algebru L, sledeći uslovi su međusobno ekvivalentni:*
(1) L je ortoalgebra,
(2) $p, q \in L$, $p \perp q \Rightarrow p \oplus q$ je minimalno gornje ograničenje za p i q u L,
(3) $p \in L \Rightarrow p \wedge p' = 0$,
(4) L je ortokomplementirana sa preslikavanjem $p \mapsto p'$.

Dokaz. (1)⇒(2): Videti u radu D. J. Foulis, R. J. Greechie, and G. T. Riittimann:"Filters and supports in orthoalgebras".
(2)⇒(3): Neka važi (2), i neka je $r \in L$, $r \leq p, p'$. Tada $p, p' \leq r' \leq 1 = p \oplus p'$, pa $r' = 1$, $r = 0$.
(3)⇒(4): Koristeći činjenice:

$$p \perp q \Leftrightarrow p \leq q', p \leq q \Rightarrow q' \leq p',$$

$p \mapsto p'$ je involucija ograničenog operatora na ograničenom posetu L, stoga De Morganov zakon je efektivan. Kako je $p \wedge p' = 0$ za svako $p \in L$, odatle sledi da je $p \vee p' = 0' = 1$, za svako $p \in L$.
(4)⇒(1): Neka je L ortokomplementiranje sa $p \mapsto p'$ i neka je $q \in L$ takav da je $q \perp q$. Tada je $q \leq q'$, pa je $0 = q \wedge q' = q$. □

Lema 4.20 *Jedina scale algebra koja je takođe ortoalgebra je Booleova algebra* $2 := \{0, 1\}$.

Dokaz. Neka je L scale algebra i ortoalgebra i neka je $a \in L$. Tada bilo koje $a \leq a'$, za koje važi $a \perp a$ tako da je $a = 0$ ili $a' \leq a$, za koje važi $a' \perp a'$, tako da je $a' = 0$ i $a = 1$. □

Ortomodularni poset (OMP) možemo smatrati ortoalgebru L koja zadovoljava zakon koherencije za $p, q, r \in L$: $p \perp q, p \perp r, q \perp r \Rightarrow p, q, r$ je ortogonalni niz za koji važi zakon koherencije tj. ako su definisane $p \oplus q$, $p \oplus r$ i $q \oplus r$, tada je $(p \oplus q) \oplus r$ definisano.

Tvrđenje 4.21 *Efekt algebra L je OMP ako i samo ako zadovoljava zakon koherencije.*

Dokaz. Treba dokazati da ako L zadovoljava zakon koherencije, tada je L ortoalgebra. Pretpostavimo zakon koherencije, i neka je $q \in L$, $q \perp q$. Tada sa $p := q$ i $r := q'$ imamo $p \perp q$, $p \perp r$, $q \perp r$ i tada (q, q, q') je ortogonalni niz. Tada je $q \perp (q \oplus q') = 1$ pa je $q = 0$. □

4.2 Poseti sa razlikom i D-poseti

Podsetimo se pojmova parcijalno uređenog skupa i mreže. $(P, \leq)$ je parcijalno uređen skup ako je relacija $\leq$ refleksivna, antisimetrična i tranzitivna. Za parcijalno uređen skup $(P, \leq)$ kažemo da je **mreža** ako svaka dva elementa iz P imaju najmanje gornje ograničenje (supremum) i najveće donje ograničenje (infimum).

Definicija 4.22 **Poset sa razlikom** *je sistem* $(P; \leq, \ominus)$ *koji se sastoji od parcijalno uređenog skupa* P *definisanog sa parcijalnom binarnom operacijom* $\ominus$ *koja zadovoljava sledeće uslove za sve* $a, b, c \in P$*:*
(D1) $b \ominus a$ *je definisano ako i samo ako je* $a \leq b$*.*
(D2) Ako je $a \leq b$ *tada je* $b \ominus a \leq b$ *i* $b \ominus (b \ominus a) = a$*.*
(D3) Ako je $a \leq b \leq c$ *tada je* $c \ominus b \leq c \ominus a$ *i* $(c \ominus a) \ominus (c \ominus b) = b \ominus a$*.*

Ako je P mreža tada za P kažemo da je **mreža sa razlikom**.
Uočimo da razlika nije definisana za proizvoljan par elemenata od P, nego samo za parove (a, b) gde je $a \leq b$. Zato kažemo da je ta razlika parcijalna binarna operacija. Na primer, u skupu nenegativnih brojeva rezultat oduzimanja $b - a$ je opet nenegativan broj ako i samo ako je uslov $a \leq b$ zadovoljen.
Napomenimo da je binarna operacija koja je definisana za bilo koji par elemenata je **totalna**. Na primer, oduzimanje na skupu realnih brojeva je totalna binarna operacija.
Posmatraćemo neke primere poseta sa razlikom.

- Prsten skupova koji su parcijalno uređeni inkluzijom sa operacijom razlika skupova je mreža sa razlikom.
- Neka je $(R; +, \cdot, \leq)$ parcijalno uređen prsten, neka je $R^+ = \{a \in R : a \geq 0\}$. Parcijalna binarna operacija $\ominus$ na R^+ definisana je na sledeći način:

  $$b \ominus a \text{ je definisano ako i samo ako je } a \leq b, \text{i tada je } b \ominus a := b + (-a),$$

  gde je $-a$ inverzni element od a u odnosu na operaciju $+$. Tada je R^+ poset sa razlikom.
  Na primer $\mathbb{R}^+$ (skup svih nenegativnih realnih brojeva) sa uobičajenom razlikom realnih brojeva je mreža sa razlikom.
- Neka je $(G, +, \vee, \wedge)$ Abelova ℓ-grupa (mrežno uređena grupa) i $G^+ = \{a \in G : a \leq 0\}$. Na G^+ definišemo parcijalnu binarnu operaciju $\ominus$ na isti način kao u prethodnom slučaju. Tada je G^+ mreža sa razlikom.
- Neka je $S = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_n, ...\}$ prebrojiv lanac $x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_n < ...\,, n \in \mathbb{N}$. Stavimo za $x_k \ominus x_j := x_{k-j}$, $k, j \in \{0, 1, 2, ...\}$, $k \geq j$. Tada je S mreža sa razlikom.
- n-dimenzionalan realan vektorski prostor $\mathbb{R}^n$ sa parcijalnim uređenjem po koordinatama i sa uobičajenom razlikom vektora je mreža sa razlikom.

Dokažimo sada da svaka efekt algebra u sebi sadrži strukturu poseta sa razlikom.

Definicija 4.23 *Neka je* L *efekt algebra. Ako su* $p, q \in L$*, takvi da je* $p \leq q$*, definišemo razliku* $q - p$ *kao jedinstven element u* L *koji zadovoljava* $p \oplus (q - p) = q$*.*

Lema 4.24 *Neka je L efekt algebra. Ako je $p \in L$, tada je $p = p - 0$, $0 = p - p$ i $p^{'} = 1 - p$.*

Lema 4.25 *Neka je L efekt algebra. Ako su $p, q \in L$, $p \leq q$, tada važi:*
(1) $p = q \Leftrightarrow q - p = 0$,
(2) $p = 0 \Leftrightarrow q - p = q$,
(3) $q - p \leq q$ i $p = q - (q - p)$,
(4) $r \leq q - p \Rightarrow p \leq q - r$ i $(q - p) - r = (q - r) - p$,
(5) $q - p = (p \oplus q^{'})^{'}$,
(6) $p \oplus q^{'} = (q - p)^{'}$.

Lema 4.26 *Neka je L efekt algebra. Ako su $p, q, r \in L$ i $p \leq q \leq r$ tada je $r = p \oplus (q - p) \oplus (r - q)$.*

Kao posledicu prethodne leme možemo zaključiti sledeće:

$$r - p = (q - p) \oplus (r - q),$$

$$(r - p) - (r - q) = q - p,$$

$$r - (q - p) = p \oplus (r - q).$$

Dakle, svaka efekt algebra u sebi sadrži strukturu poseta sa razlikom. Zaista, za sve elemente p, q, r neke efekt algebre

$$q - p \leq q, \ p = q - (q - p), \ (r - p) - (r - q) = q - p.$$

Tvrđenje 4.27 *Neka je L efekt algebra. Ako L zadovoljava uslov prekida rastućih ili opadajućih lanaca, tada je L generisana skupom svih atoma u L.*

Dokaz. Na osnovu uslova prekida opadajućih lanaca, L je atomarna.
Pretpostavimo da je $0 \neq p \in L$ i da se p ne može napisati kao konačna linearna kombinacija atoma u L. Izaberimo jedan atom $a_1 \leq p$, takav da je $p - a_1 \neq 0$. Izaberimo još jedan atom $a_2 \leq p - a_1$, takav da je $(p - a_1) - a_2 \neq 0$. Nastavljajući ovaj postupak, dobijamo beskonačan niz (ne obavezno različitih) atoma $a_1, a_2, a_3, ...$ u L takav da je $(a_1, a_2, ...a_n)$ ortogonalni niz za svako $n \geq 1$. Neka je $p_n := \oplus(a_1, a_2, ...a_n)$ za $n = 1, 2, ...$ Tada je $p_1 < p_2 < ... < p_n < ...$ čime dobijamo kontradikciju sa uslovom prekida rastućih lanaca. □

4.3 Osobine poseta sa razlikom i D-poseti

Lema 4.28 *Neka je $(P; \leq, \ominus)$ poset sa razlikom i $a, b, c, d \in P$.*
(1) Ako je $a \leq b \leq c$ tada $b \ominus a \leq c \ominus a$ i $(c \ominus a) \ominus (b \ominus a) = c \ominus b$.
(2) Ako je $b \leq c$ i $a \leq c \ominus b$, tada je $b \leq c \ominus a$ i $(c \ominus b) \ominus a = (c \ominus a) \ominus b$.
(3) Ako je $a \leq b \leq c$, tada je $a \leq c \ominus (b \ominus a)$ i $(c \ominus (b \ominus a)) \ominus a = c \ominus b$.
(4) Ako je $a \leq c$ i $b \leq c$ tada $c \ominus a = c \ominus b$ ako i samo ako je $a = b$.
(5) Ako je $d \in P$, $d \leq a, b$ i $a, b \leq c$ tada $c \ominus a = b \ominus d$ ako i samo ako $c \ominus b = a \ominus d$.

Dokaz. (1) Iz (D3) i (D1) imamo da je $(c \ominus a) \ominus (c \ominus b) = b \ominus a \leq c \ominus a$ a iz osobine (D2) imamo da je

$$(c \ominus a) \ominus (b \ominus a) = (c \ominus a) \ominus ((c \ominus a) \ominus (c \ominus b)) = c \ominus b.$$

(2) Na osnovu hipoteze imamo da je $a \leq c \ominus b \leq c$, i iz (D3) dobijamo

$$c \ominus (c \ominus b) \leq c \ominus a \text{ to jest } b \leq c \ominus a$$

Na osnovu (1), $(c \ominus b) \ominus a \leq c \ominus a$ pa je $(c \ominus a) \ominus ((c \ominus b) \ominus a) = c \ominus (c \ominus b) = b$, pa je stoga

$$(c \ominus a) \ominus b = (c \ominus a) \ominus ((c \ominus a) \ominus ((c \ominus b) \ominus a)) = (c \ominus b) \ominus a.$$

(3) U skladu sa (1) imamo $b \ominus a \leq c \ominus a \leq c$ i sa (D3) dobijamo

$$c \ominus (c \ominus a) \leq c \ominus (b \ominus a) \text{ pa je } a \leq c \ominus (b \ominus a) \leq c.$$

Koristeći (2) i (1) imamo

$$(c \ominus (b \ominus a)) \ominus a = (c \ominus a) \ominus (b \ominus a) = c \ominus b.$$

(4) Ako je $c \ominus a = c \ominus b$ tada je $b = c \ominus (c \ominus b) = c \ominus (c \ominus a) = a$.
Obrnuto je očigledno.
(5) Ako je $c \ominus a = b \ominus d$ tada iz (1) i (D3) dobijamo

$$c \ominus b = (c \ominus d) \ominus (b \ominus d) = (c \ominus d) \ominus (c \ominus a) = a \ominus d.$$

Obrnuto se dokazuje analogno. □

U definiciji poseta sa razlikom, postojanje najmanjeg i najvećeg elementa nije potrebno. Ako posmatramo $a \leq b$ tada je $a \ominus a = b \ominus b$. Zaista, iz $a \leq a \leq b$ imamo $b \ominus a = (b \ominus a) \ominus (a \ominus a)$ i iz $a \leq b \leq b$ imamo $b \ominus a = (b \ominus a) \ominus (b \ominus b)$. Zbog toga (4) u prethodnoj lemi daje željeni rezultat.
Koristeći tranzitivno zatvaranje binarne relacije $\sim_z$ gde je $a \sim_z b$ ako i samo ako $a \leq b$ ili $b \leq a$, primetimo da se svaki poset sa razlikom može napisati kao skup-teorijskih unija poseta sa razlikom, od kojih svaki ima najmanji element. Konkretno, ako postoji najveći element, obično se označava sa 1. Tada je $1 \ominus 1$ najmanji element, i obično se značava sa 0.

Definicija 4.29 *Poset sa razlikom koji sadrži najveći element* 1 *i najmanji element* 0*, zove se* **D-poset**.

Za svaki element a u D-posetu, element $1 \ominus a$ se zove **ortosuplement** od a i označavamo ga sa $a^{'}$.
Unarnu operaciju $^{'} : P \mapsto P$ na posetu P sa 0 i 1, koja zadovoljava uslove:
(1) $a^{''} = a$, za sve $a \in P$ (involucija)
(2) $a \leq b \Rightarrow b^{'} \leq a^{'}$
(3) $a \vee a^{'} = 1$ i $a \wedge a^{'} = 0$
zovemo **ortokomplementiranje**. Poset P sa ortokomplementiranjem je **ortoposet**.
Operacija $a \mapsto a^{'}$ na D-posetu zadovoljava sledeće uslove: $a \leq b \Rightarrow b^{'} \leq a^{'}$, $a^{''} = a$, ali nemamo uvek $a \wedge a^{'} = 0$. Stoga D-poset nije uvek ortoposet.
Primetimo da sledeći uslov ne mora da bude zadovoljen u posetu sa razlikom (P;≤,⊖).
Zakon kancelativnosti: Ako je $a \leq b, c$ i $b \ominus a = c \ominus a$ tada je $b = c$.

Definicija 4.30 *Neka je P poset sa razlikom. P nazivamo* **generalizovanim posetom sa razlikom** *ako P sadrži najmanji element 0 i zadovoljava zakon kancelativnosti.*

Parcijalno uređen skup P je **na gore usmeren** ako za svako $a, b \in P$ postoji $d \in P$ takav da $a \leq d$, $b \leq d$.

Lema 4.31 *Ako je P na gore usmeren poset sa razlikom, tada važi zakon kancelativnosti. U svakom D-posetu zakon kancelativnosti je zadovoljen.*

Dokaz. Neka je $b \ominus a = c \ominus a$, $a, b, c \in P$. Kako je P na gore usmeren, tada postoji element d takav da je $b, c \leq d$. Koristeći prethodnu lemu imamo

$$d \ominus b = (d \ominus a) \ominus (b \ominus a) = (d \ominus a) \ominus (c \ominus a) = d \ominus c,$$

pa je $b = d \ominus (d \ominus b) = d \ominus (d \ominus c) = c$. □

4.4 Veza D-poseta i efekt algebri

U svakom generalizovanom D-posetu, možemo definisati dualnu operaciju $\oplus$ za operaciju $\ominus$ na sledeći način:

$$a \oplus b \text{ postoji i jednak je sa } c \Leftrightarrow c \ominus b = a. \ (*)$$

Lema 4.32 *Neka je P D-poset i $a, b, c \in P$. Tada:*
(1) $a \oplus b$ postoji u P ako i samo ako $a \leq b'$, i $a \leq b'$ implicira da $a \leq a \oplus b$ i $(a \oplus b) \ominus a = b$.
(2) $a \leq b'$ i $a \oplus b \leq c$ implicira da $c \ominus (a \oplus b) = (c \ominus a) \ominus b = (c \ominus b) \ominus a$.
(3) $a \leq b \leq c'$ implicira $a \oplus c \leq b \oplus c$ i $(b \oplus c) \ominus (a \oplus c) = b \ominus a$.
(4) $a \leq b \leq c$ implicira $a \oplus (c \ominus b) = c \ominus (b \ominus a)$ i $(c \ominus b) \oplus (b \ominus a) = c \ominus a$.
(5) $a \leq b$ implicira $b = a \oplus (b \ominus a)$.
(6) ($a \leq b'$ i $a \leq c'$ implicira $a \oplus b = a \oplus c$) ako i samo ako $b = c$.
(7) ($a \leq b \leq c'$ i $c \leq d \leq a'$ implicira $a \oplus d = b \oplus c$) ako i samo ako $b \ominus a = d \ominus c$.
(8) $a \leq b' \leq c'$ implicira $a \oplus (b \ominus c) = (a \oplus b) \ominus c$.
(9) $c \leq a \leq b'$ i $c \leq b$ implicira $(a \ominus c) \oplus (b \ominus c) = ((a \oplus b) \ominus c) \ominus c$.

Dokaz. Za dokaz ove leme treba iskoristiti aksiome i osobine razlike $\ominus$. □

Lema 4.33 *Neka skup P ima specijalni element 0 i parcijalnu binarnu operaciju $\ominus$.*
Neka je $\leq$ binarna relacija na P data sa

$$a \leq b \text{ ako i samo ako je } b \ominus a \text{ definisano.}$$

Tada je $(P; \leq, \ominus, 0)$ generalizovani D-poset ako i samo ako su sledeći uslovi zadovoljeni za svako $a, b, c \in P$:
(d1) $a \ominus 0$ je definisano i $a \ominus 0 = a$.
(d2) $a \ominus a$ je definisano.
(d3) Ako su $b \ominus a$ i $c \ominus b$ definisani, tada su i $c \ominus a$ i $(c \ominus a) \ominus (c \ominus b)$ definisani i $(c \ominus a) \ominus (c \ominus b) = b \ominus a$.
(d4) Ako je $0 \ominus a$ definisano tada je $a = 0$.
(d5) Ako je $b \ominus a$ definisan i $c \ominus a$ je definisan i $c \ominus a = b \ominus a$ tada je $b = c$.
P je D-poseta ako i samo ako sadrži element 1 koji zadovoljava sledeći uslov:
(d5') Za bilo koji $a \in P$, $1 \ominus a$ je definisano.

Dokaz. Jasno je da svaki generalizovan D-poset zadovoljava uslove (d1)-(d5) i da D-poset zadovoljava (d5').
Da bismo dokazali obrnutu implikaciju posmatrajmo (d1)-(d4). Možemo zaključiti da važe:
(1) ako je $b \ominus a$ definisano, tada je $b \ominus (b \ominus a)$ definisano i $b \ominus (b \ominus a) = a$,
(2) ako je $a \ominus b = a \ominus c$ tada je $b = c$,
(3) $a \ominus a = 0$ za svako $a \in P$.
Zaista, iz (d1) i (d3) možemo zaključiti da je $b \ominus a$ definisano, pa je tada $(b \ominus 0) \ominus (b \ominus a) = a \ominus 0 = a$, što dokazuje (1). Iz (1) imamo da je $b = a \ominus (a \ominus b) = = a \ominus (a \ominus c) = c$ što dokazuje (2). Kako $a \ominus 0$ i $a \ominus a$ postoje u P, iz (d3) dobijamo $(a \ominus 0) \ominus (a \ominus a) = a \ominus 0$, pa je $a \ominus (a \ominus a) = a \ominus 0$ što sa (2) daje $a \ominus a = 0$, pa važi (3).
Neka definišemo uređenje $\leq$ na P: $a \leq b$ ako i samo ako je $b \ominus a$ definisano. Iz (d2) imamo $a \leq a$, i iz (d3) imamo tranzitivnost relacije $\leq$. Za dokaz antisimetričnosti pretpostavimo $a \leq b$ i $b \leq a$. Tada $b \ominus a$ i $a \ominus b$ postoje u P, i sa (d3) zaključujemo $(a \ominus a) \ominus (a \ominus b) = b \ominus a$, pa je $0 \ominus (a \ominus b)$ definisano i sa (d4) podrazumevamo da je $a \ominus b = 0$, i simetrično $b \ominus a = 0$. Stoga iz (1) $a = b \ominus (b \ominus a) = b \ominus 0 = b$. Time smo dokazali da je $\ominus$ razlika. Dokazaćemo da iz (d5) sledi zakon kancelativnosti pa je $(P; \leq, \ominus)$ generalizovani D-poset. Pretpostavimo da važi (d5'). Iz uslove (d1)-(d4) i (d5') sledi da $0 \leq a \leq 1$ za proizvoljan $a \in P$. Tako smo dokazali da je $(P; \leq, \ominus, 0)$ $((P; \leq, \ominus, 0, 1))$ je generalizovan D-poset (D-poset). Koristeći lemu 4.31. iz (d5') sledi (d5), pa u ovom slučaju (d5) nije potreban. □

Definicija 4.34 Generalizovana efekt algebra *je sistem* $(L, \oplus, 0)$, *gde je* $\oplus$ *parcijalna binarna operacija koja zadovoljava:*

- *zakon komutativnosti;*
- *zakon asocijativnosti;*
- *zakon kancelativnosti: ako je* $a \oplus b = a \oplus c$ *tada je* $b = c$;
- *zakon pozitivnosti: ako je* $a \oplus b = 0$ *tada je* $a = b = 0$;
- $a \oplus 0 = a$, $a \in L$.

U svakoj generalizovanoj efekt algebri, dualnu operaciju $\ominus$ za operaciju $\oplus$ definišemo na sledeći način:

$a \ominus c$ postoji i jednak je sa b ako i samo ako $b \oplus c$ postoji i jednak je sa a $(**)$

U generalizovanoj efekt algebri binarne relacije $\leq$ i $\perp$ definišemo isto kao i u efekt algebri.

Lema 4.35 *Neka je* L *generalizovana efekt algebra. Binarna relacija* $\leq$ *je parcijalno uređenje na* L *definisano na sledeći način:*

$$\text{ako za neko } c \in L, c \oplus a = b, \text{ tada je } a \leq b.$$

Osim toga, 0 *je najmanji element od* L.

Dokaz. Refleksivnost sledi iz $a \oplus 0 = a$.
Antisimetričnost: Neka je $a \leq b$ i $b \leq a$. Po definiciji postoje elementi u, v tako da $b = a \oplus u$, $a = b \oplus v$. Tada je $b = (b \oplus v) \oplus u$, pa prema zakona asocijativnosti i kancelativnosti je $v \oplus u = 0$, pa odatle prema pozitivnosti $u = v = 0$. Odatle je $a = b$.
Tranzitivnost: Neka je $a \leq b$ i $b \leq c$. Tada po definiciji postoje x, y tako da $a \oplus x = b$, $b \oplus y = c$. Odatle je $(a \oplus x) \oplus y = c = a \oplus (x \oplus y)$, pa je $a \leq c$.
Iz $a \oplus 0 = a$ za proizvoljno $a \in L$, sledi da je 0 najmanji element. □

Tvrđenje 4.36 *Neka je $(L; \oplus, 0)$ generalizovana efekt algebra. L je efekt algebra ako i samo ako ima najveći element* 1.

Dokaz. Neka je $(L; \oplus, 0, 1)$ efekt algebra. Treba dokazati kancelativnost i zakon pozitivnosti. Neka je $a \oplus b = a \oplus c$. Na osnovu zakona ortosuplementacije, imamo jedinstven element u takav $a \oplus b \oplus u = a \oplus c \oplus u = 1$. Odatle, prema jedinstvenosti ortosuplemenata sledi da $(a \oplus u)^{'} = b = c$. Za dokaz zakona pozitivnosti, pretpostavimo da je $a \oplus b = 0$. Odatle je $a^{'} = a^{'} \oplus a \oplus b = 1 \oplus b$, pa iz zakona jedan-nula $b = 0$. Jasno je da iz zakona ortosuplementacije, 1 je najveći element iz L.
Obrnuto, pretpostavimo da je L generalizovana efekt algebra sa najvećim elementom 1. Treba dokazati zakon ortosuplementacije i zakon jedan-nula. Kako je $a \leq 1$ za sve $a \in L$, sledi da postoji $b \in L$ takav da je $a \oplus b = 1$. Zbog kancelativnosti b je jedinstven. Tako je dokazan zakon ortosuplementacije. Za dokaz zakon jedan-nula, definisaćemo $a \oplus 1 := v$. Tada $1 \leq v$, pa $1 = v$, gde $a \oplus 1 = 1$ pa iz kancelativnosti sledi da je $a = 0$. □

Lema 4.37 *Neka je $(L; \oplus, 0, 1)$ efekt algebra. Tada:*
(1) $a \perp b$ ako i samo ako $a \leq b^{'}$,
(2) $(a \oplus b)^{'} = a^{'} \ominus b = b^{'} \ominus a$.

Dokaz. (1) Pretpostavimo $a \perp b$,tj. $a \oplus b$ je definisano. Imamo $a \oplus b \oplus (a \oplus b)^{'} = 1$ pa iz zakona ortosuplementacije $a \oplus (a \oplus b)^{'} = b^{'}$ pa iz toga $a \leq b^{'}$.
Obrnuto, ako je $a \leq b^{'}$, tada je $c \in L$ pa je $a \oplus c = b^{'}$. Stoga, $(a \oplus c) \oplus b = 1$. Iz asocijativnosti imamo da $a \oplus b$ postoji.
(2) Koristeći (**), pišemo $a^{'} = 1 \ominus a$. Iz zakona ortosuplementacije, imamo $1 \ominus (a \oplus b) = (1 \ominus a) \ominus b$. Sve ostalo sledi analogno. □

Definicija 4.38 *Neka su P, Q neki D-poseti. Preslikavanje $v : P \to Q$ je morfizam (D-poseta) ako su zadovoljeni sledeći uslovi:*
(DM1) $v(1_P) = 1_Q$.
(DM2) Ako su $a, b \in P$, $a \leq b$, tada je $v(a) \leq v(b)$ i $v(b \ominus a) = v(b) \ominus v(a)$.
Morfizam $v : P \to Q$ zovemo σ-morfizam ako važi sledeći uslov:
(DM3) Ako je $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq P$, $a_n \uparrow a$ ($a_n \leq a_{n+1}$ za bilo koji $n \in \mathbb{N}$ i $a = \bigvee_{n=1}^{\infty} a_n$), tada je $v(a_n) \uparrow v(a)$.

Definicija 4.39 *Neka su E, F efekt algebre. Preslikavanje $\omega : E \to F$ je morfizam (efekt algebre) ako su zadovoljeni sledeći uslovi:*
(EM1) $\omega(1_E) = 1_F$.
(EM2) Ako su $a, b \in E$, $a \perp b$ tada je $\omega(a) \perp \omega(b)$ i $\omega(b \oplus a) = \omega(b) \oplus \omega(a)$.
Morfizam $\omega : P \to Q$ se zove σ-morfizam ako važi sledeći uslov:
(EM3) Ako je $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq P$, $a_n \uparrow a$ ($a_n \leq a_{n+1}$ za bilo koji $n \in \mathbb{N}$ i $a = \bigvee_{n=1}^{\infty} a_n$), tada je $\omega(a_n) \uparrow \omega(a)$.

Morfizam h D-poseta ili efekt algebri zovemo $\wedge$**-morfizam** ako je

$$h(a \wedge b) = h(a) \wedge h(b)$$

ako $a \wedge b$ postoji.

Tvrđenje 4.40 *(1) Neka je $(P; \leq, \ominus, 0, 1)$ D-poset. Definišemo parcijalnu binarnu operaciju $\oplus$ na P kao i malopre sa (*). Tada je $E(P) := (P; \oplus, 0, 1)$ efekt algebra i parcijalno uređenje indukovano sa $\oplus$ poklapa se sa parcijalnim uređenjem na P. Svaki morfizam D-poseta h iz P u D-poset Q je jedinstven morfizam $g : E(P) \to E(Q)$ takav da je $h(x) = g(x)$ za svako $x \in P$.*
(2) Neka je $(E; \oplus, 0, 1)$ efekt algebra. Definišemo parcijalnu binarnu operaciju $\ominus$ na E sa (**). Tada je $D(E) := (E; \leq, \ominus, 0, 1)$ D-poset, gde se $\leq$ parcijalno uređenje na E poklapa se sa uređenom efekt algebrom. Svaki morfizam efekt algebre h iz E u efekt algebru F je jedinstven morfizam D-poseta $g : D(E) \to D(F)$ takav da je $h(x) = g(x)$ za bilo koji $x \in E$.

Dokaz. (1) Proverimo aksiome efekt algebre:

- zakon komutativnosti: Neka $a \oplus b$ postoji, $a \oplus b = c$. Iz uslova (*), $c \ominus b = a$. Odatle sledi da je $a \leq c$ i $c \ominus a = c \ominus (c \ominus b) = b$. Iz uslova (*), $b \oplus a$ postoji, $b \oplus a = c$.

- zakon asocijativnosti: Pretpostavimo $u := a \oplus b$ i $v := (a \oplus b) \oplus c$ postoje. Iz (*) $a = u \ominus b$ i $a \oplus b = u = v \ominus c$. Odatle, $a \leq u \leq v$, pa je $v \ominus a = (v \ominus u) \oplus (u \ominus a)$. Na osnovu zakona komutativnosti $u \ominus a = b$ pa je $v \ominus a = c \oplus b$. Iz (*), $v = a \oplus (c \oplus b) = a \oplus (b \oplus c)$.

- zakon ortosuplementacije: Za svako a, $a \oplus (1 \ominus a) = 1$. Pretpostavimo da je $a \oplus b = 1$. Na osnovu zakona komutativnosti, $b \oplus a = 1$ i iz (*), $b = 1 \ominus a$. Odatle ja b takav da $a \oplus b = 1$ postoji i jedinstven je.

- zakon jedan-nula: Pretpostavimo da $a \oplus 1$ postoji. Iz (*) sledi da postoji u, $a = u \ominus 1$. Kako je 1 najveći element, $u = 1$ pa je $a = 0$.

(2) Analogno. $\square$

Literatura

[1] D. J. Foulis, M. K. Bennett, *Effect Algebras and Unsharp Quantum Logics*, Foundation of Physics, Vol. 24, No. 10, 1994, 1331-1352.

[2] Madarász Sz. Rozália, *Od skupova do univerzalnih algebri*, Univerzitet u Novom Sadu, Novi Sad, 2006.

[3] Madarász Sz. Rozália, *Matematička logika*, skripte, Univerzitet u Novom Sadu, Novi Sad, 2012.

[4] Anatolij Dvurečenskij, Sylvia Pulmannová *New Trends in Quantum Structures*, Akademija Kluwer, Bratislava, 2000.

[5] Miklós Rédei, *Quantum Logic in Algebraic Approach*, Kluwer Academic Publishers, 1998.

[6] C. A. Cooker, *The logico-algebraic approach to quantum mechanics, Volume I*, Univerzitet Western Ontario, Ontario, 1974.

[7] Edward N. Zalta, *The Standard Encyclopedia of Philosophy, Quantum Mechanics*, 2017.

[8] O.Hadžić, S. Pilipović, *Uvod u funkcionalnu analizu*, Univerzitet u Novom Sadu, Novi Sad, 1996.

[9] Zoran Stojaković, Ivica Bošnjak, *Elementi linearne algebre*, Prirodno-matematički fakultet, Novi Sad, 2010.

[10] *Új Magyar Lexikon D-F*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1960.

[11] *Új Magyar Lexikon K-Me*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1962.

[12] Zoran Stojaković, Dragoslav Herceg, *Linearna algebra i analitička geometrija*, Symbol, 2005.

[13] Maja Tivković, *Spektralna teorija ograničenih linearnih operatora*, Univerzitet u Nišu, Niš, 2013.

[14] Marija Delić, *Dimenzija vektorskog prostora, master rad*, Univerzitet u Novom Sadu, Novi Sad, 2011.

[15] Džon Poukinghorn, *Kvantna teorija*, Laguna, Beograd, 2017.

.

Biografija

Monika Mariaš rođena je 26. decembra 1993. godine u Novom Sadu. Osnovnu školu "Petefi Šandor" završila je 2008. godine. Godine 2012. završava gimnaziju u Bečeju i iste godine upisuje osnovne studije na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu, smer diplomirani profesor matematike (M0), koji je završila 2016. godine. Godine 2016. upisala je master studije na istom fakultetu, smer master profesor (MP). Položila je sve ispite predviđene nastavnim planom i programom i time stekla pravo na odbranu ovog rada.

u Novom Sadu, dana 6. jun 2018. Monika Mariaš

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:
RBR
Identifikacioni broj:
IBR
Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija
TD
Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal
TZ
Vrsta rada: Master rad
VR
Autor: Monika Mariaš
AU
Mentor: dr Rozália Madarász-Szilágyi
MN
Naslov rada: Algebarska ispitivanja nekih kvantnih struktura
NR
Jezik publikacije: srpski (latinica)
JP
Jezik izvoda: srpski i engleski
JI
Zemlja publikovanja: Srbija
ZP
Uže geografsko područje: Vojvodina
UGP
Godina: 2018.
GO
Izdavač: Autorski reprint
IZ
Mesto i adresa: Novi Sad, Departman za matematiku i informatiku, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, Trg Dositeja Obradovića 4
MA
Fizički opis rada: 4 glava/49 strana/15 referenci/0 tabela/0 slika/0 grafika/ 0 priloga
FO
Naučna oblast: Matematika
NO
Naučna disciplina: Algebra i Matematička Logika

ND
Predmetna odrednica/ ključne reči: infimum, supremum, kvantna logika, Hilbertov prostor, Hilbertova mreža, efekt algebra, D-poset, poset sa razlikom
PO
UDK:
Čuva se: Biblioteka Departmana za matematiku i informatiku Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta u Novom Sadu
ČU
Važna napomena:
VN

Izvod: U ovom master radu bavimo se Hilbertovim mrežama, efekt algebrom i D-posetima. Cilj ovog rada je da prikaže algebarske i logičke osobine matematičkih struktura koje su nastale prilikom izučavanja kvantne mehanike. Ovaj rad se sastoji iz četiri poglavlja. Prvo poglavlje nam daje kratak istorijski pregled najznačajnijih faza u razvoju kvantne mehanike. U drugom poglavlju su navedeni najznačajniji matematički pojmovi koji se koriste u radu. Ti pojmovi se odnose na normirane vektorske prostore i mreže. Treće poglavlje se prvo bavi sa klasičnom iskaznom logikom i semantikom kvantne logike. Zatim izučavamo Hilbertove, modularne, ortomodularne i ortokomplementirane mreže. Na kraju ovog poglavlja upoznajemo se sa operatorima Hilbertovih prostora. U poslednjem poglavlju izučavamo efekt algebre i D-posete, i prikazujemo njihove najvažnije osobine.
IZ

Datum prihvatanja teme od strane NN veća: 25.08.2017.
DP
Datum odbrane:
DO
Članovi komisije:
KO
Predsednik: dr Siniša Crvenković, redovni profesor u penziji, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu
Član: dr Rozália Madarász-Szilágyi, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu
Član: dr Milica Žigić, docent, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCES
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:
ANO
Identification number:
INO
Ducument type: Monograph type
DT
Type of record: Printed text
TR
Contents code: Master's thesis
CC
Author: Monika Mariaš
AU
Mentor: Rozália Madarász-Szilágyi, Ph.D.
MN
Title: Algebraic study of some quantum structures
TI
Language of text: Serbian (latin)
LT
Language of abstract: Serbian and English
LA
Country of publication: Republic of Serbia
CP
Locality of publication: Vojvodina
LP
Publication year: 2018.
PY
Publisher: Author's reprint
PB
Publication place: Novi Sad, Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science, University of Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4
PP
Physical description: 4 chapters/49 pages/15 references/0 tables/0 pictures/ 0 graphs/0 appendixes
PD
Scientific field: Mathematics
SF
Scientific discipline: Algebra and Mathematical Logic

SD
Subject/ Key words: infimum, supremum, quantum logic, Hilbert space, Hilbert lattice, effect algebra, D-poset, poset with difference
S/KW
UC:
Holding data: The Library of the Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Sciences, University of Novi Sad
HD
Note:
N

Abstract: In this Master's thesis we deal with Hilbert lattice, effect algebra and D-posets. The aim of this thesis is to show algebraic and logical properties of mathematical structures that have arisen during the study of quantum mechanics. This thesis consists of four chapters. The first chapter gives us a brief historical overview of the most significant stages in the development of quantum mechanics. The second chapter lists the most important mathematical concepts used in this work. These terms refer to normed vector spaces and lattice. The third chapter deals primarily with classical propositional logic and semantics of quantum logic. Then we study Hilbert, modular, orthomodular and orthocomplemented lattice. At the end of this chapter we meet operators on Hilbert space. In the fourth chapter, we study the effect algebras and D-posets and show their most important properties.
AB

Accepted by the Scientific Board on: 25/08/2017
ASB
Defended on:
DE
Defend board:
DB
Chair: Siniša Crvenković, Ph.D., Retired Full Professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad
Member: Rozália Madarász-Szilágyi, Ph.D., Full Professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad
Member: Milica Žigić, Ph.D., Assistant Professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad