UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA
MATEMATIKU I INFORMATIKU

Irena Miščević

ISKAZNE LOGIKE ZASNOVANE NA BL-ALGEBRAMA

- MASTER RAD -

Mentor:
dr Rozália Sz. Madarász

Novi Sad, 2018.

Predgovor

Matematičari su uspešno primenjivali klasičnu (dvovrednosnu) logiku hiljadama godina unazad za probleme koji su se razvijali u "rigoroznom" svetu matematike. Primena dvovrednosne logike izvan matematike stvara anomalije koje ne možemo prihvatiti jer su u suprotnosti sa našim svakodnevnim iskustvima. Svet oko nas, naša percepcija, komunikacija i razmišljanja nisu crno-beli. Retko šta je isključivo apsolutno tačno ili apsolutno netačno. Zato je opravdano zapitati se da li postoje logički sistemi sa više od dve istinitosne vrednosti, kako ih konstruisati i koje bi algebarske strukture odgovarale takvim sistemima.

U ovom radu bavimo se viševrednosnim iskaznim logikama zasnovanim na BL-algebrama. Rad se sastoji od četiri glave.

Prva glava je uvodna i u njoj je dat pregled istorijskog razvoja ideje o logikama sa više istinitosnih vrednosti.

U drugoj glavi dat je pregled najvažnijih pojmova koji opisuju sintaksu i semantiku logičkih sistema generalno. Podsećanja radi, navedene su i karakteristike klasične logike.

U trećoj glavi predstavljene su karakteristične osobine najvažnijih iskaznih veznika. Iskazni veznik konjunkcije dovodimo u vezu sa pojmom t-normi, a disjunkcije sa pojmom t-konormi. Razmatramo najvažnije osobine unarnog veznika negacije, kao i binarnog veznika implikacije.

U četvrtoj glavi uvodimo pojam BL-algebri i BL-logike. Prvo definišemo familiju iskaznih računa $PC(*)$, gde je $*$ odabrana neprekidna t-norma, koja interpretira veznik konjunkcije. Interpretacija se vrši u obogaćenoj mreži $\mathcal{L}(*)$. Izdvajanjem najvažnijih osobina algebarske strukture $\mathcal{L}(*)$ dolazimo do pojma reziduirane mreže, odnosno BL-algebre kao specijalne reziduirane mreže. BL-algebre će se pokazati kao adekvatna algebraizacija BL-logike, koju ćemo definisati kao specijalni deduktivni sistem sa sedam aksioma i jednim pravilom izvođenja. Na kraju rada dokazaćemo da je BL-logika kompletna u odnosu na BL-algebre.

* * *

Veliku zahvalnost dugujem svom mentoru, dr Rozáliji Sz. Madarász, za nesebičnu pomoć pri izboru teme i pisanju rada, kao i za preneto znanje tokom studiranja. Takođe, zahvaljujem se članovima komisije, dr Ivici Bošnjaku i dr Borisu Šobotu na konstruktivnim savetima prilikom pisanja rada.

Zahvaljujem se svojim roditeljima, Svjetlani i Bori, bratu Milanu i dragom Srđanu na neizmernoj podršci i razumevanju.

Sadržaj

Glava 1

Uvod

1.1 Koreni viševrednosne logike

Poreklo viševrednosne logike datira još od vremena Aristotela[1]. U tim drevnim vremenima postavljalo se pitanje da li iskaz nužno mora imati jednu od dve istinitosne vrednosti, tačno ili netačno, kao i da li postoji neka druga istinitosna vrednost.

Aristotel se prvi usprotivio bivalentnosti iskaza i prihvatanju *zakona o isključenju trećeg*[2], koji se smatrao neospornim u klasičnoj logici. U delu *De Interpretatione*[3], u devetom poglavlju, iznosi *Problem of future contigents*[4]. Reč je o problemu dodeljivanja istinitosne vrednosti iskazima koji govore o događajima u budućnosti. Klasifikacija nekog budućeg događaja kao "mogućeg" ili "neodređenog" daje osnovu za prihvatanje *treće* istinitosne vrednosti. Aristotel je uveo pojam *kontigencije*, kao vrednost tvrdnji koje nisu ni tačne ni netačne. *Problem of future contigents* bio je povod mnogih diskusija tokom srednjeg veka, bez značajnih rezultata.

U proučavanju antičke grčke filozofije nailazimo na sporove epikurejaca i stoika. Stoici kao pristalice determinizma - zakona čvrste nužnosti, zalažu se za strogu bivalentnost u logici. Sa druge strane, epikurejci koji odbijaju apsolutni determinizam, odbacuju princip bivalentnosti.

Do ponovnog razmatranja principa bivalentnosti dolazi u drugoj polovini 19. veka. Isti je odbijen od strane H. MacColla[5] i Ch. S. Peircea[6].

[1] Aristotel (384. p.n.e - 322. p.n.e) - grčki filozof
[2] lat. Tertium non datur
[3] tekst iz kolekcije *Organon*
[4] Aristotel je ovaj problem predstavio koristeći primer o bitki na moru.
[5] Hugh MacColl - škotski matematičar i logičar
[6] Charles Sanders Peirce - američki matematičar, filozof i logičar

1.2 Razvoj viševrednosne logike

Viševrednosna logika kao posebna grana logike kreirana je od strane J. Łukasiewicza i E. Posta, nezavisno, 1920-tih godina.

Problem of future contigents podstakao je Jan Łukasiewicza, poljskog logičara i filozofa, da modifikuje iskazni račun kako bi postigao sintezu determinizma i indeterminizma. To je dovelo do konstrukcije trovalentne logike koja je istorijski gledano prva viševrednosna logika osmišljena kao formalni sistem. Treća istinitosna vrednost koju uvodi Łukasiewicz je *neodređeno.* Trovalentna logika predstavljena je u radu objavljenom 1920. godine i postala je osnova za konstrukciju konačnovrednosne, kao i beskonačnovrednosne logike.

Nezavisno od Łukasiewicza, 1921. godine američki matematičar i logičar Emil Leon Post, predstavio je svoj viševrednosni logički sistem. Razvio je n-vrednosnu logiku, sa n različitih istinitosnih vrednosti, koja predstavlja generalizaciju klasične dvovalentne logike. Njegova analiza bila je formalna, filozofski aspekti nisu imali značaja za njegovo razmatranje. Za razliku od Łukasiewiczevog sistema, Postov viševrednosni sistem je funkcionalno kompletan. Logički sistem nazivamo funkcionalno kompletnim ukoliko se svaki veznik može dobiti kompozicijom veznika tog sistema.

Oslanjajući se na aksiome pretpostavljene od strane Łukasiewicza, poljski matematičar i logičar M. Wajsberg 1935. godine dokazao je da je beskonačno vrednosna iskazna logika kompletna. Aksiomatizovao je Łukasiewiczev trovalentni sistem L_3.

Dve decenije kasnije, C.C. Chang uvodi pojam MV-algebri, pomoću kojih je dokazao teoremu kompletnosti za viševrednosnu Łukasiewiczevu logiku.

Osnovne teorijske rezultate za viševrednosne logičke sisteme, koji su pratili poljski pristup viševrednosnoj logici, dali su:

- J. Słupecki[7] proširio je trovalentni Łukasiewiczev sistem L_3 do funkcionalno kompletnog i aksiomatizovao ga.
- D.A. Bochvar[8] primenio je sistem trovalentne logike na probleme logičkih kontradikcija, pri čemu je kao treću istinitosnu vrednost koristio *besmisleno.*
- S. Kleene[9] primenio je trovalentnu logiku na probleme parcijalnih funkcija. Kao treću istinitosnu vrednost koristio je *nedefinisano.*
- J.B. Rosser[10] i A.R. Turquette tokom 1940-tih godina generalizovali su osnovne pristupe viševrednosnoj logici, suštinske rezultate su dokazali. Pored Łukasiewiczevih, njihovi radovi su značajna referenca godinama.
- J. Pavelka[11] je 1979. godine objavio rad pod naslovom *On fuzzy logic* u kojem je generalizovao Łukasiewiczevu logiku.

[7] Jerzy Słupecki - poljski logičar
[8] Dmitri Anotolevich Bochvar - ruski matematičar i logičar
[9] Stephen Kleene - američki matematičar
[10] John Barkley Rosser - američki logičar
[11] Jan Pavelka - Čeh

Glava 2

Sintaksa i semantika logičkih sistema

2.1 Logički sistemi

Suština svakog logičkog sistema jeste da formalizuje pojam logičke posledice. Označimo sa Σ neki skup iskaza. Iskaz p je logička posledica od Σ, ako je iskaz p nužno tačan kad god su svi iskazi iz skupa Σ tačni. Tako dolazimo do zaključivanja "iz Σ sledi p" za koje kažemo da je logički ispravno - iz tačnosti pretpostavki nužno sledi tačnost zaključivanja.

Logički sistem može biti zadat na dva suštinski različita načina:

1) semantički - baziran na pojmu istinitosti;

2) sintaktički - baziran na pojmu dokazivosti.

Semantički određen logički sistem podrazumeva pojam interpretacije ili modela. Naime, za svaku interpretaciju, svaka dobro definisana formula ima neku istinitosnu vrednost ili predstavlja funkciju u skupu istinitosnih vrednosti. Sledi da imamo pojam zadovoljenja za dobro definisane formule i na osnovu toga relaciju logičke posledice $\models$ (čitamo: "semantička rampa") između skupa dobro definisanih formula i pojedinačnih formula.

Sintaktički određen logički sistem podrazumeva pojam dokaza i dokazive formule, tj. formalne teoreme kao i pojam izvođenja iz skupa premisa.

Nakon što smo apsolvirali da logički sistem može biti zasnovan na pojmu dokaza i pojmu istine, osnovano je postaviti pitanje pouzdanosti (da li dokazivost implicira istinu?) i kompletnosti (da li istina implicira dokazivost?) logičkog sistema.

Sa filozofske, tj. epistemološke tačke gledišta, semantički aspekt klasične logike je bazičniji od sintaktičkog. Uglavnom su semantičke ideje te koje određuju odgovarajuće sintaktičke verzije logičkog sistema.

Osnovne pretpostavke klasične (dvovalentne) logike su:

- princip bivalentnosti - tvrdi da je iskaz ili tačan ili netačan u bilo kojoj interpretaciji, odnosno uzima isključivo jednu istinitosnu vrednost, $\top$ ili $\perp$ (numerički 1 ili 0);
- princip kompozicionalnosti - pretpostavlja da je istinitosna vrednost svake složene formule funkcija istinitosnih vrednosti njenih potformula.

Već smo napomenuli da se viševrednosne logike razlikuju od klasične upravo u principu bivalentnosti, ne zadovoljavaju ga. Međutim, većina viševrednosnih logika zadovoljava princip kompozicionalnosti, tj. kažemo da su istinito funkcionalne.

U ovom radu bavićemo se jednim logičkim sistemom koji predstavlja zajedničku osnovu za mnoge viševrednosne logike (kao što su Łukasiewiczeva, Gödelova, Product logika) i u kojem se semantički definisani pojmovi tautologije odnosno logičke posledice u potpunosti slažu sa sintaktički definisanim pojmovima teoreme odnosno formalne izvodivosti formule iz datog skupa formula.

2.2 Jezik logičkog sistema

Azbuka (alfabet) je skup simbola, tj. znakova koji su nedeljivi. Reč nad datom azbukom je svaki konačan niz simbola te azbuke. Definisati jezik bilo kog logičkog sistema, znači odrediti odgovarajuću azbuku i izdvojiti skup onih reči koje ćemo smatrati "dobro formiranim izrazima" (tzv. iskazne formule).

Definicija 2.1 ***Azbuka iskazne logike*** *sastoji se od sledećih simbola:*

- *prebrojiv* ***skup iskaznih slova X****;*
- *konačan* ***skup iskaznih veznika*** Ω*;*
- ***pomoćni znaci****:* (,).

Smatraćemo da je $X = \{p_1, p_2, ..., p_n, ...\}$. Skup Ω je unija disjunktnih podskupova, tj. $\Omega = \Omega_0 \cup \Omega_1 \cup ... \cup \Omega_m$; Ω_j je skup iskaznih veznika arnosti[1] j.

Definicija 2.2 ***Skup iskaznih formula*** *je najmanji skup reči nad azbukom, koji zadovoljava sledeće uslove:*

1) *svako iskazno slovo je iskazna formula;*
2) *ako su $A_1, A_2, ..., A_j$ iskazne formule i $w \in \Omega_j$, onda je to i izraz $(w(A_1, A_2, ..., A_j))$;*
3) *iskazne formule nastaju isključivo konačnom primenom pravila* 1) *i* 2)*.*

Skup svih iskaznih formula obeležavamo sa Form.

[1] Arnost (dužina) predstavlja broj argumenata (operanada) na koje iskazni veznik "utiče".

Napomena: U prethodnoj definiciji koristili smo tzv. poljsku (prefiksnu) notaciju. U toj notaciji iskazni veznici pišu se ispred, a ne između iskaznih slova "na koje utiču". Međutim ukoliko su iskazni veznici arnosti 0, 1 ili 2, u daljem radu koristićemo infiksnu notaciju. Npr. pisaćemo $p \wedge q$, ako je iskazni veznik $\wedge$ arnosti 2.

Primer 2.3 *Azbuka klasične iskazne logike pored prebrojivog skupa iskaznih slova i pomoćnih znakova, sadrži iskaznih veznika, tj.* $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$*, gde je* $\Omega_1 = \{\neg\}$*,* $\Omega_2 = \{\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$*.*

Često je usvojena konvencija koja konstantne logičke vrednosti tretira kao iskazne veznike arnosti 0, npr. $\Omega_0 = \{\top, \bot\}$.

2.3 Semantika logičkog sistema

Za definiciju semantike logičkih sistema, odabrali smo algebarski pristup, po kome se iskazne formule interpretiraju u nekoj konkretnoj algebri (ili konkretnoj klasi algebri).

Definicija 2.4 ***Iskazna algebra*** *je algebra* $\mathcal{M} = (M, f_1, f_2, ..., f_n)$*, gde je nosač* M *odabrani skup istinitosnih vrednosti,* $f_1, f_2, ..., f_n$ *su istinitosne funkcije, tj. operacije skupa* M *(*$f_i : M^{n_i} \to M$*, gde je* n_i *arnost operacije* f_i*).*

Skup istinitosnih vrednosti predstavlja skup vrednosti koje iskazne formule mogu imati u algebri $\mathcal{M}$. Uobičajeno je da se za standardni nosač M smatra onaj koji ispunjava uslove: $\{0, 1\} \subseteq M$ i $M \subseteq [0, 1] \subseteq \mathbb{R}$. U slučaju beskonačno mnogo istinitosnih vrednosti uglavnom se razmatraju sledeći prebrojiv i neprebrojiv skup:

$$M_0 =_{def} \{x \in \mathbb{Q} \mid 0 \leq x \leq 1\} \text{ i } M_\infty =_{def} \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}.$$

Kada se radi o konačnom broju istinitosnih vrednosti, često se razmatra skup:

$$M_n =_{def} \{\tfrac{k}{n-1} \mid 0 \leq k \leq n-1\}, \text{ za konkretan ceo broj } n \geq 2.$$

Budući da pretpostavljamo da skup M sadrži 0 i 1, možemo smatrati da te vrednosti odgovaraju, respektivno, vrednostima "totalno lažno" i "totalno tačno". Sa druge strane, možemo posmatrati opštije i izdvojiti skup D, $D \subseteq M$ takozvanih istaknutih stepena istinitosti. Pretpostavljamo da $1 \in D$ i da $0 \notin D$.

Neka je $\Omega = \{w_1, w_2, ..., w_n\}$ neki skup iskaznih veznika. Svaki iskazni veznik w_i interpretiramo u konkretnoj algebri $\mathcal{M}$ kao funkciju f_i; koristi se i zapis $f_i = {w_i}^{\mathcal{M}}$. Arnost funkcije f_i jednaka je arnosti od w_i. Uglavnom su iskazni veznici arnosti 0, 1, 2; npr. ako je $ar(w_i) = 2$, onda $f_i : M^2 \to M$. Dakle, funkcije f_i interpretiraju iskazne veznike w_i u algebri $\mathcal{M}$.

Primer 2.5 *Iskazna algebra klasične logike je* $\mathcal{I} = (\{\top, \bot\}, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \neg)$*. Istinitosne funkcije, obeležene isto kao i iskazni veznici, definisane su svojim Cayleyevim tablicama:*

$\wedge$	$\top$	$\bot$
$\top$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\bot$

$\vee$	$\top$	$\bot$
$\top$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\bot$

$\Rightarrow$	$\top$	$\bot$
$\top$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\top$

$\Leftrightarrow$	$\top$	$\bot$
$\top$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\top$

p	$\neg p$
$\top$	$\bot$
$\bot$	$\top$

U definicijama koje slede, smatraćemo da skup istaknutih stepena istinitosti sadrži samo 1, $D = \{1\}$.

Definicija 2.6 ***Valuacija*** *je svako preslikavanje τ iz skupa iskaznih slova u nosač algebre $\mathcal{M}$, tj. $\tau : X \to M$. Ako je $p \in X$, za $\tau(p)$ kažemo da je* ***vrednost*** *iskaznog slova p u valuaciji τ.*

Definicija 2.7 ***Interpretacija*** *iskazne formule u algebri $\mathcal{M}$, za datu valuaciju τ jeste preslikavanje $v_\tau : Form \to M$ koje je definisano na sledeći način:*

- *ako je $p \in X$ iskazno slovo, onda je $v_\tau(p) = \tau(p)$,*
- *ako je w_i iskazni veznik arnosti k i $A_1, A_2, ..., A_k$ su iskazne formule, onda je $v_\tau(w_i(A_1, A_2, ..., A_k)) = w_i{}^{\mathcal{M}}(v_\tau(A_1), v_\tau(A_2), ..., v_\tau(A_k))$.*

Za $v_\tau(A)$ kažemo da je ***vrednost formule*** *A u valuaciji τ (ili u interpretaciji v_τ).*

Definicija 2.8 *Formulu A nazivamo* ***zadovoljivom*** *u valuaciji τ u algebri $\mathcal{M}$ ako je vrednost formule u toj valuaciji 1 ($v_\tau(A) = 1$), pišemo $\mathcal{M} \models_\tau A$.*

Napomena: Kada je jasno o kojoj algebri je reč nećemo pisati $\mathcal{M} \models_\tau A$, nego samo $\tau \models A$.

Definicija 2.9 *Formula A je* ***$\mathcal{M}$-tautologija*** *ako za sve valuacije $\tau : X \to M$ važi $v_\tau(A) = 1$. Pišemo $\mathcal{M} \models A$ (ili samo $\models A$).*

Definicija 2.10 *Neka je $\tau : X \to M$ neka valuacija i A formula. Kažemo da je τ* ***model formule*** *A (ili da formula A važi na τ, ili da τ zadovoljava A) ako je vrednost formule A u toj valuaciji 1, tj. ako je $v_\tau(A) = 1$. Skup svih modela (tj. skup svih valuacija) obeležavamo sa Mod.*

$Mod(A) =_{def} \{\tau \in Mod \mid \tau \models A\}-$ skup svih modela formule A.

Definicija 2.11 *Neka je $\tau \in Mod$ i $\Sigma \subseteq Form$. Kažemo da je τ* ***model skupa formula*** *Σ, ako je τ model svake formule iz Σ. Pišemo $\tau \models \Sigma$.*

Definicija 2.12 *Neka je Σ neki skup formula i A neka formula. Kažemo da je A* ***logička (semantička) posledica*** *skupa hipoteza Σ ako A važi u svim modelima skupa Σ, pišemo $\Sigma \models A$.*

U viševrednosnim logikama, pojam modela je još više generalizovan; o tome govori sledeća definicija.

Definicija 2.13 *Neka je α proizvoljna istinitosna vrednost iz skupa M i A neka formula. Valuaciju $\tau : X \to M$ nazivamo $\alpha-$**modelom formule** A ako je vrednost formule A u interpretaciji v_τ jednaka α (ili ako je veća ili jednaka od α).*

U slučaju da je $v_\tau(A) \geq \alpha$, koristićemo oznaku $(\geq \alpha)-$model za valuaciju τ.

Posle ove generalizacije uvodi se i pojam $\alpha-$modela skupa formula.

Definicija 2.14 *Valuaciju τ nazivamo $(\geq \alpha)-$**modelom skupa formula** Σ ako je τ $(\geq \alpha)-$model svake formule $A \in \Sigma$.*

Analogno, možemo uopštiti i pojam logičke posledice.

Definicija 2.15 *Formulu A nazivamo logičkom posledicom skupa formula Σ ako je svaki $(\geq \alpha)-$model skupa Σ ujedno i $(\geq \alpha)-$model formule A.*

Kod iskaznih sistema viševrednosnih logika, kod kojih je skup istinitosnih vrednosti konačan, možemo proveriti da li je formula zadovoljiva isto kao u klasičnoj logici, određujući kompletne tablice istinitosnih vrednosti. Naime, važi sledeće.

Teorema 2.16 *Za svaki konačan viševrednosni sistem iskazne logike osobina zadovoljivosti formule je odlučiva. Osobina logičke posledice konačnog skupa formula je takođe odlučiva.*

Na kraju, naglasimo da ne postoji (za sada) nijedna klasa algebarskih struktura, kao što je Bulova algebra za klasičnu logiku, koja je karakteristična za viševrednosne logike. Različiti pristupi viševrednosnoj logici oslanjaju se na različite algebarske strukture.

2.4 Aksiomatizacija logičkog sistema

Logički sistem možemo definisati kao deduktivni sistem. Postoji mnogo različitih pristupa pojmu deduktivnih sistema. Suštinski, to su sistemi u kojima se do pojma dokaza odnosno teoreme stiže preko preciznih, sintaktički definisanih pravila izvođenja. Može se krenuti od malog broja aksioma i velikog broja pravila, ili od mnogo aksioma, a samo nekoliko pravila izvođenja. Dokaz može da vodi ka teoremi, ili u nekim deduktivnim sistemima dokaz kreće od teoreme. Mi ćemo koristiti Hilbertovske[2] deduktivne sisteme.

Definicija 2.17 ***Deduktivni sistem** (ili **formalna teorija**) je uređena četvorka $\mathcal{D} = (X, Form, Ax, R)$, gde je:*

- *X neprazan skup simbola, tzv. **azbuka**,*
- *Form je neprazan skup nekih reči nad X, tzv. **skup formula**,*
- *Ax je neprazan podskup skupa Form, tzv. **aksiome**,*
- *R je neprazan skup tzv. **pravila izvođenja**, oblika $\rho = \frac{A_1, A_2, ..., A_n}{B}$, gde su $A_1, A_2, ..., A_n, B$ neke formule. U tom slučaju kažemo da formula B sledi iz $A_1, A_2, ..., A_n$ na osnovu pravila ρ.*

[2]David Hilbert (1862-1943) - nemački matematičar

Za $\mathcal{D}$ kažemo da je ***aksiomatska formalna teorija*** *(ili* ***aksiomatski (deduktivni) sistem****) ako postoji algoritam za odlučivanje koja formula jeste, a koja nije aksioma.*

Primer 2.18 *Neka je $X = \{\blacklozenge, \bigstar\}$, skup formula $Form$ neka bude skup svih nepraznih reči nad X, $Ax = \{\blacklozenge\bigstar\blacklozenge\}$, i $R = \{\rho_1, \rho_2\}$, gde je*

$$\rho_1 : \frac{\blacklozenge F}{F} \quad \rho_2 : \frac{\blacklozenge F}{\bigstar F},$$

$F \in Form$. Tada je $\mathcal{D} = (X, Form, Ax, R)$ jedan deduktivni sistem.

Definicija 2.19 *Neka je $\mathcal{D} = (X, Form, Ax, R)$ neki deduktivni sistem.* ***Dokaz (u $\mathcal{D}$)*** *je konačan niz formula $A_1, A_2, ..., A_n$ takav da je u tom nizu svaka formula aksioma ili sledi iz ranijih formula u nizu na osnovu nekog pravila izvođenja iz R. U tom slučaju kažemo da je $A_1, A_2, ..., A_n$* ***dokazni niz za*** *A_n (ili samo* ***dokaz za*** *A_n). Formula B je* ***teorema u*** *$\mathcal{D}$ ako postoji dokaz za B. U tom slučaju pišemo $\vdash_{\mathcal{D}} B$ ili samo $\vdash B$. Sa $\mathrm{Th}(\mathcal{D})$ obeležavamo skup svih teorema deduktivnog sistema $\mathcal{D}$.*

Primer 2.20 *Neka je $\mathcal{D} = (X, Form, Ax, R)$ deduktivni sistem iz Primera 2.18. Tada je $\blacklozenge\bigstar\blacklozenge$, $\bigstar\blacklozenge$, $\bigstar\bigstar\blacklozenge$ dokazni niz. Svaka formula u tom dokaznom nizu je teorema tog deduktivnog sistema. Nije teško videti da te teoreme predstavljaju zapravo skup svih teorema sistema $\mathcal{D}$: $\mathrm{Th}(\mathcal{D}) = \{\blacklozenge\bigstar\blacklozenge, \bigstar\blacklozenge, \bigstar\bigstar\blacklozenge\}$.*

Definicija 2.21 *Za deduktivni sistem $\mathcal{D}$ kažemo da je* ***odlučiv*** *ako postoji algoritam za odlučivanje koja formula jeste, a koja nije teorema te teorije.*

Definicija 2.22 *Neka je $\mathcal{D} = (X, Form, Ax, R)$ deduktivni sistem, $\Sigma \subseteq Form$, $A \in Form$. Kažemo da je A* ***sintaktička posledica od*** *Σ (ili da Σ* ***dokazuje*** *A) ako postoji konačan niz formula $A_1, A_2, ..., A_n$ u kojem je $A_n = A$, tako da je svaka formula u tom nizu aksioma, ili iz Σ ili sledi iz ranijih formula u tom nizu po nekom pravilu izvođenja iz R. U tom slučaju kažemo da je taj niz* ***dokazni niz za*** *A* ***iz*** *Σ i pišemo $\Sigma \vdash_{\mathcal{D}} A$ ili samo $\Sigma \vdash A$. Formule iz skupa Σ zovemo* ***hipoteze****, a za A kažemo da je* ***zaključak****. Sa $\mathrm{Cons}(\Sigma)$ obeležavamo skup svih sintaktičkih posledica od Σ. Za skup formula Σ kažemo da je* ***deduktivno zatvoren skup*** *ako je $\mathrm{Cons}(\Sigma) = \Sigma$.*

Primer 2.23 *Neka je $\mathcal{D} = (X, Form, Ax, R)$ deduktivni sistem iz Primera 2.18 i $\Sigma = \{\blacklozenge\blacklozenge\}$. Tada je $\mathrm{Cons}(\Sigma) = \mathrm{Th}(\mathcal{D}) \cup \{\blacklozenge\blacklozenge, \blacklozenge, \bigstar\blacklozenge\}$.*

Teorema 2.24 *Neka je $\mathcal{D} = (X, Form, Ax, R)$ neki deduktivni sistem. Tada za sve $\Sigma, \Sigma_1, \Sigma_2 \subseteq Form$ važi:*

1) $\Sigma \subseteq \mathrm{Cons}(\Sigma)$;

2) *ako je* $\Sigma_1 \subseteq \Sigma_2$ *onda* $\mathrm{Cons}(\Sigma_1) \subseteq \mathrm{Cons}(\Sigma_2)$;

3) $\mathrm{Cons}(\mathrm{Cons}(\Sigma)) = \mathrm{Cons}(\Sigma)$.

Teorema 2.25 (Teorema kompaktnosti) *Neka je $\mathcal{D} = (X, Form, Ax, R)$ neki deduktivni sistem. Tada za sve $\Sigma \subseteq Form$ i sve $A \in Form$ važi:*

$$\Sigma \vdash A \text{ akko postoji konačan } \Sigma_0 \subseteq \Sigma \text{ tako da je } \Sigma_0 \vdash A.$$

Cilj ka kojem težimo je da deduktivni sistem $\mathcal{D}$ opisuje naš logički sistem na adekvatan način. U idealnom slučaju, deduktivni sistem u potpunosti opisuje semantički pojam tautologije odnosno logičke posledice, tj. ima sledeće osobine:

- pouzdanost - svaka teorema je tautologija i ako je A sintaktička posledica skupa formula Σ ($\Sigma \vdash A$), onda je A i logička posledica od Σ ($\Sigma \models A$);
- kompletnost - svaka tautologija je teorema deduktivnog sistema, odnosno ako je A logička posledica skupa formula Σ, onda je i izvediva iz skupa Σ unutar deduktivnog sistema.

Deduktivni sistem klasične logike je "idealan". Pouzdan je, kompletan i odlučiv. Definiše se na sledeći način.

Definicija 2.26 ***Iskazni račun klasične logike*** *je deduktivni sistem* $\mathcal{H} = (X, Form, Ax, R)$*, gde je:*

- $X = S \cup \{\Rightarrow, \neg, (,)\}$, $S = \{p_1, p_2, ..., p_n, ...\}$,
- *Form je skup iskaznih formula definisan nad skupom iskaznih veznika* $\{\Rightarrow, \neg\}$,
- $Ax = Ax_1 \cup Ax_2 \cup Ax_3$*, gde su* Ax_1, Ax_2, Ax_3 *skupovi formula definisani pomoću tzv. šema aksioma* ($A, B, C \in Form$)*:*
  $Ax_1 : A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$
  $Ax_2 : (A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$
  $Ax_3 : (\neg A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow (B \Rightarrow A)$
- $R = \{MP\}$*, tzv.* ***modus ponens****,* $MP : \dfrac{A, A \Rightarrow B}{B}$.

Glava 3

Karakteristične osobine iskaznih veznika

Pre nego što pređemo na konkretne interpretacije logičkih veznika, zadržimo se neko vreme na analizi karakterističnih osobina iskaznih veznika. Zapitajmo se koje opšte osobine smatramo da su najvažnije za iskazne veznike konjunkcije, disjunkcije, negacije i implikacije. Koliku slobodu imamo prilikom odabira istinitosnih funkcija koje će interpretirati te iskazne veznike?

Moramo početi sa razmatranjem tipičnih, tj. karakterističnih primera interpretacija iskaznih veznika. Polazeći od takvih primera i od ideja o običnoj upotrebi odgovarajućih reči u svakodnevnoj komunikaciji, uočavamo tipična svojstva različitih veznika.

Jedan od osnovnih zahteva za istinitosne funkcije koje interpretiraju konjunkciju, disjunkciju, negaciju i implikaciju jeste uslov normalnosti. Tražimo da se novouvedene interpretacije "slažu" na skupu $\{0, 1\}$ sa klasičnim interpretacijama.

3.1 Iskazni veznik konjunkcije i t-norme

Najosnovniji primer istinitosne funkcije veznika konjunkcije javlja se u ranim radovima Łukasiewicza, kasnije je koristi i Gödel[1]. Reč je o binarnoj funkciji et_1 definisanoj na sledeći način:

$$\mathrm{et}_1(u, v) =_{def} \min(u, v). \tag{3.1}$$

Još jedan primer, koji se takođe javlja u početnim radovima Łukasiewicza ima komplikovaniju definiciju:

$$\mathrm{et}_2(u, v) =_{def} \max(0, u + v - 1). \tag{3.2}$$

[1]Kurt Gödel - austrijsko-američki logičar, matematičar i filozof

Poslednja istinitosna funkcija poznata je kao *Łukasiewiczeva (aritmetička) konjunkcija* ili *bounded product*, naziva se i *bold (face) konjunkcija.*

Ove dve funkcije mogu se definisati na bilo kom skupu $M \subseteq [0,1]$.

Napomena: U slučaju konačnog broja istinitosnih vrednosti, preferira se tabelarno predstavljanje funkcije, umesto analitičkih formula (3.1) i (3.2).

Primer 3.1 *Za 5-vrednosni sistem, funkcije (3.1) i (3.2) date su tabelama:*

et_1	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1
0	0	0	0	0	0
$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{3}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$
1	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1

et_2	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1
0	0	0	0	0	0
$\frac{1}{4}$	0	0	0	0	$\frac{1}{4}$
$\frac{1}{2}$	0	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{3}{4}$	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$
1	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1

Istinitosna funkcija za veznik konjunkcije, koja se može koristiti samo za odgovarajuće skupove istinitosnih vrednosti je:

$$\mathrm{et}_3(u,v) =_{def} u \cdot v. \tag{3.3}$$

Ova funkcija razmatrana je tek u skorije vreme jer je između ostalog zatvorena na M_0, M_∞, a od konačnih skupova samo na M_2. U ranijem periodu viševrednosne logike postojale su tendencije da se preferiraju istinitosne funkcije koje se jednako dobro mogu uzeti u obzir i u konačnim i u beskonačnim viševrednosnim sistemima.

Navedene tri istinitosne funkcije nisu jedine pogodne za interpretaciju konjunkcije. Međutim, umesto da proširujemo listu primera, bolje je razmotriti koje osobine generalno treba da zadovolji interpretacija konjunkcije. Prirodno je pretpostaviti da su to komutativnost, asocijativnost, odgovarajuća monotonost kao i postojanje neutralnog elementa. Naredna familija funkcija zadovoljava navedene osobine.

Definicija 3.2 *Binarna operacija* $\boldsymbol{t} : [0,1]^2 \to [0,1]$ *je* ***t-norma*** *ako i samo ako je:*

(T1) asocijativna i komutativna, tj. za $u, v, w \in [0,1]$ *važi:*

$$\boldsymbol{t}(u,v) = \boldsymbol{t}(v,u),$$
$$\boldsymbol{t}(\boldsymbol{t}(u,v),w) = \boldsymbol{t}(u,\boldsymbol{t}(v,w));$$

(T2) neopadajuća po oba argumenta, tj. za $u, v, u_1, u_2, v_1, v_2 \in [0,1]$ *važi:*

$$\textit{ako } u_1 \leq u_2 \textit{ onda } \boldsymbol{t}(u_1,v) \leq \boldsymbol{t}(u_2,v),$$
$$\textit{ako } v_1 \leq v_2 \textit{ onda } \boldsymbol{t}(u,v_1) \leq \boldsymbol{t}(u,v_2);$$

(T3) 1 je neutralni element, tj. $\boldsymbol{t}(u,1) = u$ *za svako* $u \in [0,1]$.

Direktna posledica definicije je da je 0 nula-element za svaku t-normu $\boldsymbol{t}$. Odnosno, $\boldsymbol{t}(u,0) = 0$ za svako $u \in [0,1]$, jer važi $\boldsymbol{t}(u,0) = \boldsymbol{t}(0,u) \leq t(0,1) = 0$.

Pojam t-normi pojavio se u kontekstu verovatnosnih metričkih prostora, koji su se do 1964. godine zvali statistički metrički prostori. Menger je 1942. godine, u radu "Statistical Metrics", uveo metričke prostore verovatnoće (videti [9]). U tom radu pojavljuju se postulati slični (T1)-(T3) t-normi. Schweiger i Sklar uveli su pojam t-normi 1960. godine u [10].

Klasa svih t-normi je jako velika, zbog toga je pogodno izdvajati podklase po različitim kriterijumima. Navedimo neke značajne podklase:

1. t-norme koje zadovoljavaju osobinu neprekidnosti (ili samo levu neprekidnost).

2. Arhimedove t-norme:

   t-norma $\boldsymbol{t}$ je Arhimedova akko za svako $u, v \in (0,1)$ postoji $n \in \mathbb{N}$ tako da $u_t^{(n)} < v$.

   $$u_t^{(n)} =_{def} \begin{cases} u, & \text{ako je } n = 1 \\ \boldsymbol{t}\overbrace{(u,u,...,u)}^{\text{n puta}}, & \text{ako je } n > 1, \end{cases}$$

   pri čemu je $\boldsymbol{t}\overbrace{(u,u,...,u)}^{\text{n puta}} = \boldsymbol{t}(\boldsymbol{t}\overbrace{(u,u,...,u)}^{\text{n-1 puta}}, u)$, za svako $n > 2$.

3. Strogo monotone t-norme:

   t-norma $\boldsymbol{t}$ je strogo monotona akko za svako $u, v \in (0,1)$, ako je $u < v$ sledi da je $\boldsymbol{t}(u,w) < \boldsymbol{t}(v,w)$.

   Mogu se definisati i na drugi način:

   t-norma $\boldsymbol{t}$ je strogo monotona akko zadovoljava zakon kancelacije, tj. akko $\boldsymbol{t}(u,w) = \boldsymbol{t}(v,w)$ za svako $w > 0$ implicira da je $u = v$.

4. Stroge t-norme, tj. t-norme koje su neprekidne i strogo monotone.

Tvrđenje 3.3 *Neprekidna t-norma* $\boldsymbol{t}$ *je Arhimedova akko je* $\boldsymbol{t}(u,v) < u$ *za svako* $u \in (0,1)$.

Napomena: Gore navedene istinitosne funkcije et_1, et_2 i et_3 su neprekidne t-norme. Arhimedove su et_2 i et_3, dok et_1 nije. Jedina stroga t-norma među njima je et_3.

Dve interesante t-norme su tzv. *drastic product* $\boldsymbol{t}_0$ i *nilpotent minimum* $\boldsymbol{t}_1$, definisane na sledeći način:

$$\boldsymbol{t}_0(u,v) =_{def} \begin{cases} \min(u,v), & \text{ako je } \max(u,v) = 1 \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

$$\boldsymbol{t}_1(u,v) =_{def} \begin{cases} \min(u,v), & \text{ako je } u + v > 1 \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Drastic product $\boldsymbol{t}_0$ je Arhimedova t-norma, ali nije neprekidna. *Nilpotent minimum* $\boldsymbol{t}_1$ nije ni Arhimedova ni neprekidna t-norma, ali jeste levo neprekidna.

Za svaku t-normu $\boldsymbol{t}$ važi nejednakost:

$$\boldsymbol{t}_0 \leq \boldsymbol{t} \leq \mathrm{et}_1 = \min .$$

Dalji primeri t-normi dati su kao različite, obično jedno-parametarske familije. Hamacher, npr. razmatra jedno-parametarsku familiju $\boldsymbol{t}_{H,\gamma}$ sa parametrom $\gamma \geq 0$ definisanu kao:

$$\boldsymbol{t}_{H,\gamma}(u,v) =_{def} \frac{uv}{\gamma + (1-\gamma)(u+v-uv)}.$$

Za $\gamma = 1$ to je t-norma et_3, a kad $\gamma \to \infty$, *drastic product* $\boldsymbol{t}_0$.

3.2 Iskazni veznik negacije

Krenimo opet od istorijskog porekla. U radovima Łukasiewicza i Posta javljaju se istinitosne funkcije za veznik negacije.

Łukasiewicz je za sve skupove istinitosnih vrednosti koristio funkciju

$$\mathrm{non}_1(u) =_{def} 1 - u.$$

Post je razmatrao samo konačne istinitosne skupove M_n i na njima istinitosnu funkciju

$$\mathrm{non}_2(u) =_{def} \begin{cases} 1, & \text{ako je } u = 0 \\ u - \frac{1}{n-1}, & \text{ako je } u \neq 0. \end{cases}$$

U kasnijim radovima Gödel dodaje još jednu interpretaciju veznika negacije, funkciju

$$\mathrm{non}_0(u) =_{def} \begin{cases} 1, & \text{ako je } u = 0 \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Danas se smatra da je Postova operacija non_2 nestandardna i "egzotična", zato postoji tendencija da se isključi iz opšteg razmatranja. Shodno tome, naredna definicija je preovlađujuća.

Definicija 3.4 *Funkcija* $\boldsymbol{n} : [0,1] \to [0,1]$ *naziva se* ***funkcija negacije*** *akko je nerastuća i zadovoljava* $\boldsymbol{n}(0) = 1$ *i* $\boldsymbol{n}(1) = 0$. *Funkcija negacije* $\boldsymbol{n}$ *naziva se:*

1. ***stroga*** *akko je strogo opadajuća i neprekidna;*

2. ***jaka*** *akko je stroga i involutivna, tj. važi* $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}(u)) = u$ *za svako* $u \in [0,1]$.

Napomena: Inverzna funkcija $\boldsymbol{n}^{-1}$ svake stroge funkcije negacije $\boldsymbol{n}$ je stroga negacija. Jaka funkcija negacije poklapa se sa svojom inverznom funkcijom.

Iz prethodne definicije sledi da non_2 nije funkcija negacije (za svako $m > 2$), non_0 jeste, a non_1 je jaka funkcija negacije.

Još jedan primer funkcije negacije koja nije stroga i predstavlja dual od non_0 data je jednačinom:

$$\mathrm{non}^*(u) =_{def} \begin{cases} 1, & \text{ako je } u < 1 \\ 0, & \text{ako je } u = 1. \end{cases}$$

Funkcije negacije non_0 i non^* su ekstremi, u smislu da za svaku funkciju negacije $\boldsymbol{n}$ važi:

$$\mathrm{non}_0 \leq \boldsymbol{n} \leq \mathrm{non}^*.$$

Primer stroge funkcije negacije, koja nije jaka je $\mathrm{non}_3(u) =_{def} 1 - u^2$.

Sve funkcije iz familije:

$$\boldsymbol{n}_{S,\lambda}(u) =_{def} \frac{1-u}{1+\lambda u}$$

sa parametrom $\lambda > -1$ su jake funkcije negacije. M. Sugeno [12] ih je nazvao λ-komplement.

Za naredne reprezentativne teoreme potreban nam je pojam *automorfizma* jediničnog intervala. Pod tim pojmom podrazumevamo neprekidno, strogo rastuće, sirjektivno preslikavanje intervala $[0,1]$ na $[0,1]$, tj. automorfizam mreže[2] $([0,1], \min, \max, 0, 1)$.

Teorema 3.5 *1. Funkcija $\boldsymbol{n} : [0,1] \to [0,1]$ je jaka funkcija negacije akko postoji automorfizam φ jediničnog intervala tako da*

$$\boldsymbol{n}(u) = \varphi^{-1}(1 - \varphi(u)) \text{ za svako } u \in [0,1].$$

2. Funkcija $\boldsymbol{n} : [0,1] \to [0,1]$ je stroga funkcija negacije akko postoje automorfizmi φ i ψ jediničnog intervala tako da

$$\boldsymbol{n}(u) = \psi(1 - \varphi(u)) \text{ za svako } u \in [0,1].$$

Teorema 3.6 *Neka je $\boldsymbol{t}$ neprekidna t-norma i $\boldsymbol{n}$ stroga funkcija negacije. Tada*

$$\boldsymbol{t}(u, \boldsymbol{n}(u)) = 0 \text{ za svako } u \in [0,1]$$

akko postoji automorfizam φ jediničnog intervala tako da za svako $u, v \in [0,1]$ važi

$$\boldsymbol{t}(u,v) = \varphi^{-1}(et_2(\varphi(u), \varphi(v))) \text{ i } \boldsymbol{n}(u) \leq \varphi^{-1}(1 - \varphi(u)).$$

Dakle, par et_2 i non_1 predstavlja "karakterističan spoj" neprekidne t-norme i stroge funkcije negacije, zadovoljavaju neku vrstu generalizovanog "zakona kontradikcije".

[2]Pojam *mreže* definisaćemo u narednoj glavi.

3.3 Iskazni veznik disjunkcije i t-konorme

Postoje dva pristupa interpretaciji disjunkcije. Jedan podrazumeva da odredimo koje osobine treba da ispunjava istinitosna funkcija disjunkcije. Drugi pristup do istinitosne funkcije disjunkcije dolazi povezujući istinitosne funkcije konjunkcije i negacije, uz zahtev da su ispunjeni de Morganovi zakoni. Ne postoje jasni razlozi zbog kojih bi izdvojili jedan od ta dva pristupa, zato razmatramo oba.

Opšte osobine koje treba da zadovolji interpretacija disjunkcije, dovode do klase t-konormi. Dakle, t-konorme mogu biti istinitosne funkcije za veznik disjunkcije. Definišimo ih.

Definicija 3.7 *Binarna operacija* $\boldsymbol{s} : [0,1]^2 \to [0,1]$ *je* ***t-konorma*** *ako i samo ako je:*

(S1) asocijativna i komutativna, tj. za $u, v, w \in [0,1]$ *važi:*

$$\boldsymbol{s}(u,v) = \boldsymbol{s}(v,u),$$
$$\boldsymbol{s}(\boldsymbol{s}(u,v),w) = \boldsymbol{s}(u,\boldsymbol{s}(v,w));$$

(S2) neopadajuća po oba argumenta, tj. za $u, v, u_1, u_2, v_1, v_2 \in [0,1]$ *važi:*

$$\textit{ako } u_1 \leq u_2 \textit{ onda } \boldsymbol{s}(u_1,v) \leq \boldsymbol{s}(u_2,v),$$
$$\textit{ako } v_1 \leq v_2 \textit{ onda } \boldsymbol{s}(u,v_1) \leq \boldsymbol{s}(u,v_2);$$

(S3) 0 je neutralni element, tj. $\boldsymbol{s}(u,0) = u$ *za svako* $u \in [0,1]$.

Posledica definicije je da za svaku t-konormu $\boldsymbol{s}$ važi:

$$\boldsymbol{s}(u,1) = 1 \text{ za svako } u \in [0,1],$$

jer je $\boldsymbol{s}(u,1) = \boldsymbol{s}(1,u) \geq \boldsymbol{s}(1,0) = 1$.

Drugi pristup, preko de Morganove veze podrazumeva uvođenje funkcije $\boldsymbol{s} : [0,1]^2 \to [0,1]$. Funkciju $\boldsymbol{s}$ definišemo preko proizvoljne funkcije negacije $\boldsymbol{n}$ i neke istinitosne funkcije $\boldsymbol{t}$ konjunkcije, npr. neka je $\boldsymbol{t}$ t-norma:

$$\boldsymbol{s}(u,v) =_{def} \boldsymbol{n}(\boldsymbol{t}(\boldsymbol{n}(u),\boldsymbol{n}(v))) \text{ za svako } u,v \in [0,1],$$

ili

$$\boldsymbol{s}(u,v) =_{def} \boldsymbol{n}^{-1}(\boldsymbol{t}(\boldsymbol{n}(u),\boldsymbol{n}(v))) \text{ za svako } u,v \in [0,1].$$

Podudaranje navedenih pristupa pokazuje naredna teorema.

Teorema 3.8 *Neka je* $\boldsymbol{n}$ *jaka funkcija negacije i neka su* $\boldsymbol{t}$ *i* $\boldsymbol{s}$ *dve binarne operacije nad* $[0,1]$ *takve da važi*

$$\boldsymbol{s}(u,v) =_{def} \boldsymbol{n}(\boldsymbol{t}(\boldsymbol{n}(u),\boldsymbol{n}(v))) \textit{ za svako } u,v \in [0,1].$$

Tada, $\boldsymbol{t}$ *je t-norma akko je* $\boldsymbol{s}$ *t-konorma.*

Uobičajeno je za jaku funkciju negacije, koja povezuje t-norme i t-konorme uzeti non_1. Polazeći od t-norme $\boldsymbol{t}$, funkcije non_1, dobijamo t-konormu:

$$\boldsymbol{s_t}(u,v) =_{def} 1 - \boldsymbol{t}(1-u, 1-v). \tag{3.4}$$

Najpopularniji primeri istinitosnih funkcija disjunkcije su:

$$\begin{aligned}
\mathrm{vel}_1(u,v) &=_{def} \max(u,v),\\
\mathrm{vel}_2(u,v) &=_{def} \min(1, u+v),\\
\mathrm{vel}_3(u,v) &=_{def} u+v-u\cdot v,
\end{aligned}$$

koje su izabrane tako da je vel_i povezano sa et_i preko (3.4) za svako $i = 1, 2, 3$.

Povučena je paralela između naziva istinitosnih funkcija disjunkcije i konjunkcije, pa je:

- vel_2 Łukasiewiczeva disjunkcija ili *bounded sum*;

- vel_3 *algebraic sum*.

Sa *drastic productom* $\boldsymbol{t}_0$ i *nilpotent minimumom* $\boldsymbol{t}_1$ analogno su povezane t-konorme:

$$\boldsymbol{s}_0(u,v) =_{def} \begin{cases} \max(u,v), & \text{ako je } \min(u,v) = 0\\ 1, & \text{inače}\end{cases}$$

$$\boldsymbol{s}_1(u,v) =_{def} \begin{cases} \max(u,v), & \text{ako je } u+v<1\\ 1, & \text{inače,}\end{cases}$$

odgovarajući nazivi su *drastic sum* i *nilpotent maximum*, respektivno.

3.4 Iskazni veznik implikacije

Poslednja vrsta istinitosnih funkcija koje treba posebno razmotriti su istinitosne funkcije implikacije. Ekvivalenciju, veznik koji se često uzima kao bazični, posmatramo kao konjunkciju implikacija.

Istorijski, prvi primer istinitosne funkcije implikacije dao je Łukasiewicz. U pitanju je funkcija seq_2, definisana na sledeći način:

$$\mathrm{seq}_2(u,v) =_{def} \min(1, 1-u+v).$$

Ova istinitosna funkcija, kao i njen odgovarajući veznik poznati su kao *Łukasiewiczeva implikacija.*

Drugi primer istinitosne funkcije implikacije, seq_1 uveo je Gödel:

$$\mathrm{seq}_1(u,v) =_{def} \begin{cases} 1, & \text{ako je } u \le v\\ v, & \text{inače.}\end{cases}$$

Opravdano, istinitosna funkcija i odgovarajući veznik nazivaju se *Gödelova implikacija.*

Ponovo, kao kod disjunkcije, imamo dva pristupa istinitosnim funkcijama implikacije. Možemo tražiti vezu između interpretacija implikacije i drugih veznika, taj pristup ćemo izložiti u poglavlju 4.1. Drugi pristup podrazumeva izdvajanje osobina koje istinitosna funkcija implikacije mora da zadovolji.

Nažalost, za operaciju implikacije $\boldsymbol{i}$ ne postoji opšte prihvaćena lista osnovnih osobina koje treba da zadovolji. Ipak, Smets i Margez u [11] predložili su listu koja je proširena od strane raznih autora (videti [5]). Kolekcija osobina, koju s razlogom možemo smatrati kompletnom, obuhvata devet osobina:

1. *leva antitonost*: $\boldsymbol{i}$ je nerastuća po prvom argumentu, tj. za $u_1, u_2, v \in [0,1]$
$$\text{ako } u_1 \leq u_2 \text{ onda } \boldsymbol{i}(u_1, v) \geq \boldsymbol{i}(u_2, v);$$
2. *desna izotonost*: $\boldsymbol{i}$ je neopadajuća po drugom argumentu, odnosno za $u, v_1, v_2 \in [0,1]$,
$$\text{ako } v_1 \leq v_2 \text{ onda } \boldsymbol{i}(u, v_1) \leq \boldsymbol{i}(u, v_2);$$
3. *levi granični uslov*: $\boldsymbol{i}(0, v) = 1$ za svako $v \in [0,1]$;
4. *desni granični uslov*: $\boldsymbol{i}(u, 1) = 1$ za svako $u \in [0,1]$;
5. *uslov normalnosti*: $\boldsymbol{i}(1, 0) = 0$;
6. *rangiranje stepena*: $\boldsymbol{i}(u, v) = 1$ akko $u \leq v$ za svako $u, v \in [0,1]$;
7. *leva neutralnost*: $\boldsymbol{i}(1, v) = v$ za svako $v \in [0,1]$;
8. *princip zamene*: $\boldsymbol{i}(u, \boldsymbol{i}(v, w)) = \boldsymbol{i}(v, \boldsymbol{i}(u, w))$ za svako $u, v, w \in [0,1]$;
9. *zakon kontrapozicije*: $\boldsymbol{i}(u, v) = \boldsymbol{i}(\boldsymbol{n}(v), \boldsymbol{n}(u))$ za svako $u, v \in [0,1]$ i neku strogu funkciju negacije $\boldsymbol{n}$.

Za neke matematičare prvih pet uslova predstavljaju minimalan zahtev koji istinitosna funkcija implikacije mora da zadovolji.

Definicija 3.9 (Fodor, Roubens, 1994) *Funkcija $\boldsymbol{i} : [0,1]^2 \to [0,1]$ je **funkcija implikacije** ako i samo ako zadovoljava levu antitonost, desnu izotonost, levi i desni granični uslov kao i uslov normalnosti.*

Naravno, nisu sva navedena svojstva (njih devet) nezavisna. Jedan zanimljiv rezultat u tom kontekstu je sledeći:

Tvrđenje 3.10 *Svaka funkcija $\boldsymbol{i} : [0,1]^2 \to [0,1]$ koja zadovoljava princip zamene, uslov rangiranja stepena i uslov desne izotonosti je funkcija implikacije koja zadovoljava uslov leve neutralnosti.*

Glava 4

BL-algebre i BL-logika

4.1 Iskazni račun $PC(*)$

U ovom delu želimo da definišemo iskazni račun $PC(*)$. Polazimo od sledećih pretpostavki:

1) radimo sa iskaznim algebrama;

2) skup istinitosnih vrednosti je realan interval $[0,1]$, 0 kao apsolutno lažno, 1 kao apsolutno tačno;

3) u odnosu na relaciju $\leq$ skup $[0,1]$ je linearno uređen, gust i kompletan (za svaki neprazan podskup skupa [0,1] postoje supremum i infimum);

4) zahtevamo istinitosnu funkcionalnost (princip kompozicionalnosti);

5) pri izboru istinitosnih funkcija za veznike, striktno zahtevamo da viševrednosna logika mora biti generalizacija klasične dvovrednosne logike. Npr. ako veznik & nazovemo konjunkcijom, njegova interpretacija $*$ mora zadovoljavati jednakosti $1*1=1,\ 1*0=0,\ 0*1=0,\ 0*0=0$.

Počinjemo sa odabirom interpretacije za konjunkciju, jer ćemo pokazati da dobar izbor semantike konjunkcije određuje semantiku celog jezika. Kao istinitosnu funkciju konjunkcije uzećemo t-normu iz Definicije 3.2. U pitanju je binarna operacija koju smo u poglavlju 3.1. obeležavali sa $\boldsymbol{t}$. Nadalje ćemo za t-normu koristiti oznaku $*$, umesto $\boldsymbol{t}(x,y)$ pisaćemo $x*y$. Posebno će nam biti značajne neprekidne t-norme. Podsetimo se, operacija $*$ je neprekidna t-norma ako je t-norma i neprekidna je (u smislu neprekidnosti funkcije dve promenljive).

Primer 4.1 *Najvažnije neprekidne t-norme su:*

1. *Łukasiewiczeva t-norma:* $x*y=\max(0,x+y-1)$;
2. *Gödelova t-norma:* $x*y=\min(x,y)$;
3. *Product t-norma:* $x*y=x\cdot y$ *($\cdot$ je proizvod realnih brojeva).*

Razmotrimo sada implikaciju. U klasičnoj dvovalentnoj logici, implikacija $A \to B$ je istinita ako i samo ako je istinitosna vrednost od A manja ili jednaka istinitosnoj vrednosti od B. Ako sa $\Rightarrow$ označimo interpretaciju veznika $\to$, sa x i y istinitosne vrednosti formula A i B, možemo generalizovati prethodno svojstvo: velika istinitosna vrednost od $x \Rightarrow y$ znači da vrednost x nije mnogo veća od vrednosti y. Sledi da interpretacija $x \Rightarrow y$ treba biti nerastuća po x i neopadajuća po y.

Dalje, zahtevamo važenje *fuzzy modus ponensa*: iz stepena istinitosti[1] (ili donje granice) x od A i stepena istinitosti (ili donje granice) $x \Rightarrow y$ od $A \to B$ trebalo bi da možemo odrediti donju granicu za stepen istinitosti y od B.

Funkcija koja daje donju granicu za y očito treba biti neopadajuća po oba argumenta (što je istinitiji antecedent, to je istinitiji konsekvent). Ako je jedan argument 0, jedini uslov na (donju granicu od) y je $0 \leq y$, pa je 0 nula-element funkcije o kojoj govorimo. Ako je $x \Rightarrow y$ jednako 1, tada tražimo da je $x \leq y$, a ako je $x = 1$ tada hoćemo da $(x \Rightarrow y) \leq y$, što znači da je 1 neutralni element naše funkcije.

Uprkos tome što je teško obrazložiti komutativnost i asocijativnost, za našu funkciju korisno nam je uzeti t-normu $*$ (tj. istinitosnu funkciju konjunkcije), što daje:

$$\text{ako } a \leq x \text{ i } b \leq (x \Rightarrow y) \text{ tada } a * b \leq y.$$

Za $a = x$ i supstituciju $z = b$ dobijamo:

$$\text{ako } z \leq (x \Rightarrow y) \text{ tada } x * z \leq y.$$

Sa druge strane, hteli bismo da $x \Rightarrow y$ bude što veće (da što bolje definišemo). Kada je $x * z \leq y$, tada je z kandidat za $x \Rightarrow y$ (u smislu da zadovoljava ranije navedene uslove), pa možemo zahtevati:

$$\text{ako } x * z \leq y \text{ tada } z \leq (x \Rightarrow y),$$

odakle sledi

$$x * z \leq y \text{ ako i samo ako } z \leq (x \Rightarrow y).$$

Sledi da je $x \Rightarrow y$ maksimalan z koji zadovoljava $x * z \leq y$.

Tvrđenje 4.2 *Neka je $*$ neprekidna t-norma. Postoji jedinstvena funkcija $x \Rightarrow y$, takva da je $(x * z) \leq y$ ako i samo ako $z \leq (x \Rightarrow y)$, za sve $x, y, z \in [0, 1]$. $x \Rightarrow y =_{def} \max\{z \mid x * z \leq y\}$.*

Dokaz. Za svako $x, y \in [0, 1]$, neka je $(x \Rightarrow y) = \sup\{z \mid x * z \leq y\}$. Neka je za fiksirano z, $f(x) = x * z$; f je neprekidna, neopadajuća i komutira sa sup. Dakle,

$$x * (x \Rightarrow y) = x * \sup\{z \mid x * z \leq y\} = \sup\{x * z \mid x * z \leq y\} \leq y.$$

Otuda, $x \Rightarrow y = \max\{z \mid x * z \leq y\}$. Jedinstvenost je očigledna. Napomenimo da je dovoljno pretpostaviti da je $*$ levo neprekidna, ali mi ćemo raditi sa neprekidnim normama.

□

[1] Stepen istinitosti, istinitosna vrednost (vrednost) su sinonimi.

Definicija 4.3 *Funkciju $x \Rightarrow y$ iz prethodnog tvrđenja nazivamo* ***reziduumom t-norme*** $*$.

Tvrđenje 4.4 *Za svaku neprekidnu t-normu $*$ i za njen reziduum $\Rightarrow$ važi:*

1) $x \leq y$ ako i samo ako $(x \Rightarrow y) = 1$;

2) $(1 \Rightarrow x) = x$.

Dokaz.

1) Neka je $x \leq y$. Iz definicije reziduuma $x \Rightarrow y = \max\{z \mid x * z \leq y\}$, sledi da je $(x \Rightarrow y) = 1$. Obratno, ako je $(x \Rightarrow y) = 1$, tada važi $x * 1 \leq y$, tj. $x \leq y$.

2) $(1 \Rightarrow x) = \max\{z \mid 1 * z \leq x\} = \max\{z \mid z \leq x\} = x$.

□

Tvrđenje 4.5 *1) Ako je $x \leq y$, onda je $x = y * (y \Rightarrow x)$.*

2) Ako je $x \leq u \leq y$ i u je idempotentan $(u * u = u)$, onda je $x * y = x$.

Dokaz.

1) Neka je $f(z) = z * y$; f je neprekidna na $[0,1]$, $f(0) = 0$ i $f(1) = y$. Zbog neprekidnosti postoji $z \in [0,1]$ takvo da važi $f(z) = x$. Za maksimalno z takvo da je $x = z * y$ imamo $z = (y \Rightarrow x)$. Dakle, $x = y * (y \Rightarrow x)$.

2) Prvo pretpostavimo da je $u = y$. Iz 1) sledi $x = u * (u \Rightarrow x)$, $x * u = u * (u \Rightarrow x) * u = u * (u \Rightarrow x) = x$, koristili smo komutativnost $*$. Sada, neka je $u \leq y$. Onda $x * y \geq x * u = x$ i očigledno $x * y \leq x$, stoga $x * y = x$.

□

Teorema 4.6 *Sledeće operacije su reziduumi t-normi navedenih u Primeru 4.1:*

1) Łukasiewiczeva implikacija: $x \Rightarrow y = \begin{cases} 1, & x \leq y \\ 1 - x + y, & x > y. \end{cases}$

2) Gödelova implikacija: $x \Rightarrow y = \begin{cases} 1, & x \leq y \\ y, & x > y. \end{cases}$

3) Goguenova implikacija: $x \Rightarrow y = \begin{cases} 1, & x \leq y \\ y/x, & x > y. \end{cases}$

Dokaz. Slučaj da je $x \Rightarrow y = 1$ kada je $x \leq y$ dokazan je u Tvrđenju 4.4.

Neka je $x > y$.

1) $x * z = y$ ako i samo ako je $x + z - 1 = y$, što je ekvivalentno sa $z = 1 - x + y$. Dakle, $1 - x + y = \max\{z \mid x * z \leq y\}$, tj. $x \Rightarrow y = 1 - x + y$.

2) $x * z = y$ ako i samo ako je $\min(x, z) = y$, tj. akko je $z = y$. $x \Rightarrow y = \max\{z \mid x * z \leq y\} = y$.

3) $x * z = y$ ako i samo ako je $x \cdot y = y$, što je ekvivalentno sa $z = y/x$ (za $x > 0$).

$\square$

Definicija 4.7 $\mathcal{L}(*) = ([0,1], \cap, \cup, *, \Rightarrow, 0, 1)$ *je algebra sa jediničnim intervalom* $[0,1]$*-nosačem, sa operacijama minimuma i maksimuma, koje ćemo označavati sa* $\cap$, $\cup$ *(respektivno), fiksiranom* t*-normom* $*$, *odgovarajućim reziduumom* $\Rightarrow$ *i istaknutim elementima* 0 *i* 1.

Relaciju $\leq$ možemo definisati preko minimuma:

$$x \leq y \text{ ako i samo ako je } x \cap y = x.$$

Pokazaćemo da se operacije minimuma i maksimuma mogu definisati preko $*$ i $\Rightarrow$.

Tvrđenje 4.8 *Za svaku neprekidnu* t*-normu* $*$, *sledeći identiteti su tačni u* $\mathcal{L}(*)$*:*

1) $x \cap y = x * (x \Rightarrow y)$,

2) $x \cup y = ((x \Rightarrow y) \Rightarrow y) \cap ((y \Rightarrow x) \Rightarrow x)$.

Dokaz.

1) Ako je $x \leq y$ onda je $(x \Rightarrow y) = 1$ pa je $x * (x \Rightarrow y) = x$. Ako je $x > y$, iz Tvrđenja 4.5 (1) sledi da je $x * (x \Rightarrow y) = y$.

2) Neka je $x \leq y$, sledi $(x \Rightarrow y) = 1$ i $(x \Rightarrow y) \Rightarrow y = (1 \Rightarrow y) = y$. Pored toga, $y \leq (y \Rightarrow x) \Rightarrow x$ jer je $y * (y \Rightarrow x) \leq x$. Time smo pokazali $((x \Rightarrow y) \Rightarrow y) \cap ((y \Rightarrow x) \Rightarrow x) = y$. Slučaj kada je $y \leq x$ je potpuno simetričan.

$\square$

Napomena: Łukasiewiczeva implikacija je neprekidna, Gödelova i Goguenova nisu. Lako se proverava da je reziduum svake neprekidne t-norme levo neprekidan po prvoj promenljivoj i desno neprekidan po drugoj promenljivoj.

Definicija 4.9 *Reziduum* $\Rightarrow$ *definiše operaciju* ***prekomplementa*** *(buduća istinitosna funkcija negacije):*

$$(-)x =_{def} (x \Rightarrow 0).$$

Tvrđenje 4.10 *Sledeće operacije su prekomplementi* t*-normi iz Primera 4.1:*

1) Łukasiewiczeva negacija: $(-)x = 1 - x$*;*

2) Gödelova negacija: $(-)0 = 1$, $(-)x = 0$ *za* $x > 0$*;*

3) Goguenova negacija = Gödelova negacija.

Dokaz. Sledi elementarnim računanjem. $\square$

Konkretna neprekidna t-norma određuje konkretan iskazni račun: $*$ uzimamo za interpretaciju (jake) konjunkcije &, reziduum $\Rightarrow$ od $*$ postaje interpretacija implikacije. Preciznije imamo sledeće:

Definicija 4.11 *Neka je $*$ fiksirana neprekidna t-norma, a $\Rightarrow$ odgovarajući reziduum.* ***Iskazni račun*** *$PC(*)$ određen t-normom $*$ sadrži skup iskaznih promenljivih $P = \{p_1, p_2, ...\}$, veznike & i $\to$ i istinitosnu konstantu $\overline{0}$ za 0.*

Formule *definišemo na uobičajeni način:*

1) svaka iskazna promenljiva je formula,

2) $\overline{0}$ je formula,

3) ako su A i B formule, onda su i $A\&B$, $A \to B$ isto formule.

Interpretacija iskaznih promenljivih *je preslikavanje e koje svakoj iskaznoj promenljivoj p dodeli istinitosnu vrednost $e(p) \in [0,1]$, tj. $e : P \to [0,1]$. Interpretacija se proširuje na sve formule na sledeći način:*

$$\begin{aligned} &e(\overline{0}) = 0,\\ &e(A \to B) = (e(A) \Rightarrow e(B)),\\ &e(A\&B) = (e(A) * e(B)). \end{aligned}$$

Pomoću veznika & i $\to$, uvodimo sledeće veznike:

$$\begin{array}{llll} A \wedge B & \text{zamena} & \text{za} & A\&(A \to B),\\ A \vee B & \text{zamena} & \text{za} & ((A \to B) \to B) \wedge ((B \to A) \to A),\\ \neg A & \text{zamena} & \text{za} & A \to \overline{0},\\ A \leftrightarrow B & \text{zamena} & \text{za} & (A \to B)\&(B \to A). \end{array}$$

Tvrđenje 4.12 *Za bilo koje formule A i B važi:*

$$\begin{aligned} e(A \wedge B) &= \min(e(A), e(B))\\ e(A \vee B) &= \max(e(A), e(B)). \end{aligned}$$

Dokaz. Direktno sledi iz Tvrđenja 4.8. □

Definicija 4.13 *Formula A je* 1***-tautologija*** *za $PC(*)$ ako je $e(A) = 1$, za svaku interpretaciju e.*

Za različite t-norme, t_1 i t_2, skupovi 1-tautologija od $PC(t_1)$ i $PC(t_2)$ mogu biti različiti.

Da što lakše pronađemo formule koje će biti 1-tautologije za $PC(*)$, za svaku neprekidnu t-normu $*$, pronađimo algebarske osobine strukture $\mathcal{L}(*)$, u kojoj se vrši interpretacija naših formula. Formula A će biti 1-tautologija od $PC(*)$ ako je vrednost te formule 1 za sve valuacije u $\mathcal{L}(*)$, tj. ako je $A = 1$ identitet od $\mathcal{L}(*)$. Prema tome, treba nam jednakosna teorija svih algebri tipa $\mathcal{L}(*)$.

4.2 Reziduirane mreže

Definicija 4.14 *Za uređen skup* $(L, \leq)$ *kažemo da je* ***mrežno uređen skup*** *ako za svaka dva elementa* $x, y \in L$ *postoji* $\sup(x, y)$ *i* $\inf(x, y)$.

Definicija 4.15 *Neka je* L *neprazan skup, a* $\cap$ *i* $\cup$ *dve binarne operacije skupa* L. *Za algebru* $(L, \cap, \cup)$ *kažemo da je* ***mreža*** *ako za sve* $x, y, z \in L$ *važi:*

(L1) $x \cap x = x$, $x \cup x = x$ *(idempotentnost),*

(L2) $x \cap y = y \cap x$, $x \cup y = y \cup x$ *(komutativnost),*

(L3) $x \cap (y \cap z) = (x \cap y) \cap z$, $x \cup (y \cup z) = (x \cup y) \cup z$ *(asocijativnost),*

(L4) $x \cap (y \cup x) = x$, $x \cup (y \cap x) = x$ *(apsorpcija).*

Teorema 4.16

1. *Neka je* $\mathcal{L} = (L, \leq)$ *mrežno uređen skup. Na skupu* L *definišemo operacije* $\cap$ *i* $\cup$ *na sledeći način:*

$$x \cap y = \inf(x, y),$$
$$x \cup y = \sup(x, y).$$

Onda je algebra $(L, \cap, \cup)$ *mreža.*

2. *Neka je* $(L, \cap, \cup)$ *mreža. Na skupu* L *definišemo binarnu relaciju* $\leq$*:*

$$x \leq y \text{ ako i samo ako } x \cap y = x \text{ (ekvivalentno } x \cup y = y).$$

Tada je $(L, \leq)$ *mrežno uređen skup.*

3. *Pridruživanja, mrežno uređenom skupu – mrežu, mreži – mrežno uređen skup su uzajamno inverzna.*

Dokaz. Pogledati u [8]. □

Napomena: Primetimo da je algebra iz Definicije 4.7 jedna mreža.

Reziduirane mreže uveli su Ward i Dilworth 1939. godine u radu "Residuated lattices" [14]. Korišćeni su razni nazivi za reziduirane mreže:

- Birkhoff je koristio naziv *integralni komutativni reziduirani l-monoid*;
- Blyth i Janowith koristili su naziv *reziduirana Abelova semigrupa sa jedinicom*;
- Höhle je koristio naziv *semigrupa uređena kao komutativna kompletna mreža.*

Definicija 4.17 ***Reziduirana mreža*** *je algebra*

$$(L, \cap, \cup, *, \Rightarrow, 0, 1)$$

sa četiri binarne operacije i dve konstante koja zadovoljava sledeće uslove:

1. *$(L, \cap, \cup, 0, 1)$ je mreža sa najvećim elementom 1 i najmanjim elementom 0 (ograničena mreža);*

2. *$(L, *, 1)$ je komutativna polugrupa sa neutralnim elementom 1, tj. $*$ je komutativna, asocijativna operacija i važi $1 * x = x$ za svako $x \in L$;*

3. *$*$ i $\Rightarrow$ čine adjungovani par, odnosno:*

$$z \leq (x \Rightarrow y) \text{ ako i samo ako } x * z \leq y, \text{ za svako } x, y, z \in L.$$

(Relacija $\leq$ je odgovarajuće mrežno uređenje.)

*Reziduirana mreža je **kompletna**, ako je $(L, \cap, \cup)$ kompletna mreža, tj. svaki podskup od L ima infimum i supremum.*

Primer 4.18 *Algebra $([0,1], \cap, \cup, 0, 1)$ jeste ograničena kompletna mreža, gde je $[0,1]$ jedinični interval realnih brojeva, $x \cap y = \min(x, y)$, $x \cup y = \max(x, y)$. Sledeće tri strukture jesu reziduirane mreže:*

1. *Łukasiewiczeva struktura $([0,1], \cap, \cup, *, \Rightarrow, 0, 1)$ gde je:*
   - $x * y = \max(0, x + y - 1)$
   - $x \Rightarrow y = \min(1, 1 - x + y)$;

2. *Gödelova struktura $([0,1], \cap, \cup, *, \Rightarrow, 0, 1)$ gde je:*
   - $x * y = \min(x, y)$
   - $x \Rightarrow y = 1$, *ako* $x \leq y$
     $x \Rightarrow y = y$, *ako* $x > y$;

3. *Product struktura $([0,1], \cap, \cup, *, \Rightarrow, 0, 1)$ gde je:*
   - $x * y = x \cdot y$
   - $x \Rightarrow y = 1$, *ako* $x \leq y$
     $x \Rightarrow y = \frac{y}{x}$, *ako* $x > y$.

Uočavamo da su operacije $*$ $(\Rightarrow)$ u primeru redom Łukasiewiczeva, Gödelova, Product t-norma (implikacija).

Definicija 4.19 *Neka je $\mathcal{L} = (L, \cap, \cup, *, \Rightarrow)$ reziduirana mreža. Tada:*

1. *$\mathcal{L}$ zadovoljava **aksiomu prelinearnosti** ako zadovoljava identitet*

$$(x \Rightarrow y) \cup (y \Rightarrow x) = 1;$$

2. *$\mathcal{L}$ je **deljiva** reziduirana mreža ako zadovoljava identitet*

$$x \cap y = x * (x \Rightarrow y);$$

3. *u $\mathcal{L}$ važi **zakon dvojne negacije** ako zadovoljava identitet*

$$x = (x \Rightarrow 0) \Rightarrow 0;$$

4. *u $\mathcal{L}$ važi **zakon idempotentnosti** ako je operacija $*$ idempotentna na $\mathcal{L}$.*

Sada ćemo navesti neke osobine reziduiranih mreža.

Tvrđenje 4.20 *U svakoj reziduiranoj mreži, za svako $x, y \in L$ važi:*

1. $x \Rightarrow x = 1$;
2. $x * y \leq y$;
3. $x * (x \Rightarrow y) \leq x \cap y$;
4. $x \leq y$ *akko* $x \Rightarrow y = 1$;
5. $1 \Rightarrow x = x$;
6. $x \Rightarrow 1 = 1$;
7. $y \leq x \Rightarrow y$;
8. $y \leq x \Rightarrow (x * y)$;
9. $0 * x = 0$;
10. $0 \Rightarrow x = 1$.

Dokaz.

1. Znamo da je $(L, *, 1)$ polugrupa sa neutralni elementom (monoid), $1 * x = x$. Na osnovu osobine adjungovanosti $*$ i $\Rightarrow$, $1 * x = x$ ako i samo ako je $1 \leq x \Rightarrow x$. 1 je najveći element mreže, pa važi i suprotna nejednakost, odakle sledi $x \Rightarrow x = 1$.

2. Znamo da je $x \Rightarrow x = 1$ i da je 1 najveći element mreže, sledi $x \leq 1 = y \Rightarrow y$ što je ekvivalentno sa $x * y \leq y$ (zbog adjungovanosti $*$ i $\Rightarrow$).

3. Kako je $*$ komutativna operacija, iz nejednakosti (2) ovog tvrđenja, sledi $x * (x \Rightarrow y) \leq x$. Kako je $x \Rightarrow y \leq x \Rightarrow y$, sledi $x * (x \Rightarrow y) \leq y$. Dobili smo da je $x*(x \Rightarrow y)$ jedno donje ograničenje skupa $\{x, y\}$, pa sledi $x * (x \Rightarrow y) \leq x \cap y$.

4. Opet koristimo da je $(L, *, 1)$ monoid. $1 * x \leq y$ akko $1 \leq x \Rightarrow y$, što važi akko $1 = x \Rightarrow y$, jer je 1 najveći element.

5. Koristimo nejednakost (3) ovog tvrđenja i dobijamo:

$$1 \Rightarrow x = 1 * (1 \Rightarrow x) \leq x \cap 1 = x.$$

   Dokažimo još drugu nejednakost. Imamo $x \leq x$, tj. $x * 1 \leq x$ što je ekvivalentno sa $x \leq 1 \Rightarrow x$. Time smo dokazali $1 \Rightarrow x = x$.

6. Znamo da je $x \leq 1$, jer je 1 najveći element. Na osnovu identiteta (4) ovog tvrđenja $x \leq 1$ ekvivalentno je sa $x \Rightarrow 1 = 1$.

7. Kako je $y * x \leq y$, sledi $y \leq x \Rightarrow y$.

8. Zbog komutativnosti, važi $y * x \leq x * y$, to je zbog adjungovanosti ekvivalentno sa $y \leq x \Rightarrow (x * y)$.

9. Budući da je 0 najmanji element, važi $0 * x \geq 0$. Na osnovu nejednakosti (2) ovog tvrđenja, sledi $0 * x \leq 0$, odakle sledi traženo $0 * x = 0$.

10. $0 \Rightarrow x = 1$ je posledica identiteta (4) ovog tvrđenja jer je 0 najmanji element.

□

Tvrđenje 4.21 *U svakoj reziduiranoj mreži važi:*

1. *Operacija $*$ je izotona ($x \leq y$ implicira $x * z \leq y * z$);*

2. *Operacija $\Rightarrow$ je:*

- *antitona po prvom argumentu* ($x \leq y$ *implicira* $(y \Rightarrow z) \leq (x \Rightarrow z)$),
- *izotona po drugom argumentu* ($x \leq y$ *implicira* $(z \Rightarrow x) \leq (z \Rightarrow y)$).

Dokaz.

1. Neka je $x \leq y$, $x, y, z \in L$. Iz nejednakosti (8) prethodnog tvrđenja i pretpostavke da je $x \leq y$ sledi:

$$x \leq y \leq z \Rightarrow (z * y),$$

što je ekvivalentno sa $x * z \leq y * z$.

2. Dokažimo prvo nejednakost:

$$(x \Rightarrow y) * (y \Rightarrow z) \leq x \Rightarrow z.$$

Koristeći nejednakost $x * (x \Rightarrow y) \leq y$ dokazanu u prethodnom tvrđenju i izotonost $*$, važi:

$$x * (x \Rightarrow y) * (y \Rightarrow z) \leq y * (y \Rightarrow z) \leq z.$$

Iz adjungovanosti sledi:

$$(x \Rightarrow y) * (y \Rightarrow z) \leq x \Rightarrow z,$$

što smo hteli dokazati.
Pokažimo sada antitonost $\Rightarrow$ po prvom argumentu. Neka je $x \leq y$, $x, y, z \in L$. Iz prethodnog tvrđenja sledi $x \Rightarrow y = 1$, koristeći malopre dokazanu nejednakost, dobijamo:

$$y \Rightarrow z = (x \Rightarrow y) * (y \Rightarrow z) \leq x \Rightarrow z.$$

Ostalo je da pokažemo izotonost po drugom argumentu. Neka je $x \leq y$, $x, y, z \in L$. Iz nejednakosti (3) Tvrđenja 4.20 sledi:

$$z * (z \Rightarrow x) \leq x \leq y,$$

što je ekvivalentno sa:

$$z \Rightarrow x \leq z \Rightarrow y.$$

□

Tvrđenje 4.22 *Neka je $\mathcal{L}$ reziduirana mreža, tada za $x, y \in L$ važi:*

1. $x \Rightarrow y = \max\{z \in L \mid x * z \leq y\}$;
2. $x * y = \min\{z \in L \mid x \leq y \Rightarrow z\}$.

Dokaz.

1. Budući da je $x * (x \Rightarrow y) \leq y$, imamo da $x \Rightarrow y \in \{z \in L \mid x * z \leq y\}$, pa važi $x \Rightarrow y \leq \sup\{z \in L \mid x * z \leq y\}$.
Neka je $z \in L$ takvo da važi $x * z \leq y$, što je ekvivalentno sa $z \leq x \Rightarrow y$. Dakle, $x \Rightarrow y$ je gornje ograničenje skupa $\{z \in L \mid x * z \leq y\}$, odnosno $x \Rightarrow y \geq \sup\{z \in L \mid x * z \leq y\}$.
Zaključak je $x \Rightarrow y = \sup\{z \in L \mid x * z \leq y\}$, $x \Rightarrow y \in \{z \in L \mid x * z \leq y\}$, sledi da je $x \Rightarrow y = \max\{z \in L \mid x * z \leq y\}$.

2. Dokaz je analogan dokazu tvrđenja pod 1.

□

Tvrđenje 4.23 *U svakoj reziduiranoj mreži, za svaki indeksni skup I (ako odgovarajući infimumi i supremumi postoje), važi:*

1. $x * \bigcup_{i\in I} y_i = \bigcup_{i\in I}(x * y_i)$;
2. $x \Rightarrow \bigcap_{i\in I} y_i = \bigcap_{i\in I}(x \Rightarrow y_i)$;
3. $\left(\bigcup_{i\in I} x_i\right) \Rightarrow y = \bigcap_{i\in I}(x_i \Rightarrow y)$;
4. $x * \bigcap_{i\in I} y_i \leq \bigcap_{i\in I}(x * y_i)$;
5. $\bigcup_{i\in I}(x \Rightarrow y_i) \leq x \Rightarrow \bigcup_{i\in I} y_i$;
6. $\bigcup_{i\in I}(x_i \Rightarrow y) \leq \left(\bigcap_{i\in I} x_i\right) \Rightarrow y$.

Dokaz.

1. Izotonost operacije $*$ daje $x * y_i \leq x * \bigcup_{i\in I} y_i$, za proizvoljno $i \in I$. Nejednakost važi za svako $i \in I$, sledi

$$\bigcup_{i\in I}(x * y_i) \leq x * \bigcup_{i\in I} y_i.$$

Operacija $\Rightarrow$ je izotona po drugom argumentu i za svako $x, y, z \in L$ važi $x \Rightarrow (x * y) \geq y$, sledi

$$x \Rightarrow \bigcup_{i\in I}(x * y_i) \geq x \Rightarrow (x * y_i) \geq y_i,$$

za proizvoljno $i \in I$. Nejednakost važi za svako $i \in I$, sledi:

$$x \Rightarrow \bigcup_{i\in I}(x * y_i) \geq \bigcup_{i\in I} y_i.$$

Poslednja nejednakost je na osnovu adjungovanosti ekvivalentna sa

$$x * \bigcup_{i\in I} y_i \leq \bigcup_{i\in I}(x * y_i).$$

2. Operacija $\Rightarrow$ je izotona po drugom argumentu, $x \Rightarrow \bigcap\limits_{i\in I} y_i \leq x \Rightarrow y_i, i \in I$.
Kako nejednakost važi sa svako $i \in I$, sledi

$$x \Rightarrow \bigcap_{i\in I} y_i \leq \bigcap_{i\in I}(x \Rightarrow y_i).$$

Za proizvoljno $i \in I$, iz izotonosti $*$ sledi

$$x * \bigcap_{i\in I}(x \Rightarrow y_i) \leq x * (x \Rightarrow y_i) \leq y_i.$$

Odnosno, $x * \bigcap\limits_{i\in I}(x \Rightarrow y_i) \leq \bigcap\limits_{i\in I} y_i$, tj. $\bigcap\limits_{i\in I}(x \Rightarrow y_i) \leq x \Rightarrow \bigcap\limits_{i\in I} y_i$.

3. Za proizvoljno $i \in I$, iz antitonosti operacije $\Rightarrow$ po prvom argumentu, sledi $\Big(\bigcup_{i\in I} x_i\Big) \Rightarrow y \leq x_i \Rightarrow y$. Kako nejednakost važi za svako $i \in I$, sledi

$$\Big(\bigcup_{i\in I} x_i\Big) \Rightarrow y \leq \bigcap_{i\in I}(x_i \Rightarrow y).$$

Iz jednakosti (1) ovog tvrđenja i izotonosti $*$ sledi

$$\Big(\bigcup_{i\in I} x_i\Big) * \bigcap_{i\in I}(x_i \Rightarrow y) = \bigcup_{j\in I}\big(x_j * \bigcap_{i\in I}(x_i \Rightarrow y)\big) \leq \bigcup_{j\in I}\big(x_j * (x_j \Rightarrow y)\big) \leq y,$$

što je ekvivalentno sa $\bigcap_{i\in I}(x_i \Rightarrow y) \leq \Big(\bigcup_{i\in I} x_i\Big) \Rightarrow y$.

4. $x * \bigcap_{i\in I} y_i \leq x * y_i$, za proizvoljno $i \in I$, zbog izotonosti $*$. Sledi

$$x * \bigcap_{i\in I} y_i \leq \bigcap_{i\in I}(x * y_i).$$

5. Prvo ćemo pokazati da važi $x*\bigcup_{i\in I}(x \Rightarrow y_i) \leq \bigcup_{i\in I} y_i$. Iz jednakosti (1) ovog tvrđenja sledi

$$x * \bigcup_{i\in I}(x \Rightarrow y_i) = \bigcup_{i\in I}\big(x * (x \Rightarrow y_i)\big) \leq \bigcup_{i\in I} y_i,$$

što je ekvivalentno sa $\bigcup_{i\in I}(x \Rightarrow y_i) \leq x \Rightarrow \bigcup_{i\in I} y_i$.

6. Iz prve jednakosti tvrđenja i izotonosti $*$ sledi

$$\Big(\bigcap_{i\in I} x_i\Big)*\bigcup_{i\in I}(x_i \Rightarrow y) = \bigcup_{i\in I}\Big(\big(\bigcap_{j\in I} x_j\big)*(x_i \Rightarrow y)\Big) \leq \bigcup_{i\in I}\big(x_i*(x_i \Rightarrow y)\big) \leq y,$$

što je ekvivalentno sa $\bigcup_{i\in I}(x_i \Rightarrow y) \leq \Big(\bigcap_{i\in I} x_i\Big) \Rightarrow y$.

□

Tvrđenje 4.24 *Neka je $\mathcal{L} = (L, \cap, \cup, *, 0, 1)$ algebra koja zadovoljava uslove 1. i 2. iz Definicije 4.17, kao i uslov da je operacija $*$ izotona. Neka je $(L, \cap, \cup)$ kompletna mreža. Sledeća četiri uslova su ekvivalentna:*

1. *Postoji binarna operacija $\Rightarrow$ koja sa $*$ čini adjungovani par;*
2. *Za svako $x, y, z \in L$, skup $\{z \in L \mid x * z \leq y\}$ ima najveći element;*
3. *U $\mathcal{L}$ važi $x * \bigcup_{i\in I} y_i = \bigcup_{i\in I}(x * y_i)$;*
4. *Za $x \Rightarrow y =_{def} \bigcup\{z \in L \mid x * z \leq y\}$, $(*, \Rightarrow)$ je adjungovani par u $\mathcal{L}$.*

Dokaz.

(4 $\Rightarrow$ 1): Trivijalno.

(1 $\Rightarrow$ 2): Dokazano u Tvrđenju 4.22 pod 1.

(1 $\Rightarrow$ 3): Dokazano u Tvrđenju 4.23 pod 1.

(2 $\Rightarrow$ 4): Pretpostavimo da važi 2. Definišimo $\Rightarrow$ kao u 4.
Tada je $x \Rightarrow y = \max\{z \in L \mid x * z \leq y\}$ i važi $x * (x \Rightarrow y) \leq y$. Ako je $x * z \leq y$, onda je $z \leq x \Rightarrow y$. Obratno, neka je $z \leq x \Rightarrow y$. Primenom izotonosti, sledi $x * z \leq x * (x \Rightarrow y)$. Znamo da je $x * (x \Rightarrow y) \leq y$, dakle, $x * z \leq y$.

(3 $\Rightarrow$ 4): Neka je $x * z \leq y$, tada je $z \leq x \Rightarrow y$, zbog definicije $x \Rightarrow y$ preko supremuma. Neka je sada $z \leq x \Rightarrow y$, primenom izotonosti operacije $*$ i pretpostavke 3. sledi:

$x * z \leq x * (x \Rightarrow y) = x * \bigcup\{d \in L \mid x * d \leq y\} = \bigcup\{x * d \mid x * d \leq y\} \leq y.$

$\square$

Tvrđenje 4.25 *Neka je $f : [0,1]^2 \to [0,1]$ binarna operacija na $[0,1]$. Ako je f neopadajuća po x, onda je f sleva (respektivno zdesna) neprekidna po x ako i samo ako za bilo koji podskup $\{x_i \mid i \in I\} \subseteq [0,1]$ i bilo koje $y \in [0,1]$ važi* (4.1) *(respektivno* (4.2)*), gde je :*

$$f(\sup\{x_i \mid i \in I\}, y) = \sup\{f(x_i, y) \mid i \in I\}, \tag{4.1}$$

$$f(\inf\{x_i \mid i \in I\}, y) = \inf\{f(x_i, y) \mid i \in I\}. \tag{4.2}$$

Funkcija f je neprekidna po x ako i samo ako su oba uslova (4.1) *i* (4.2) *ispunjena. Ako "po x" zamenimo sa "po y", dobijamo analogno tvrđenje. Dualno tvrđenje dobijamo za nerastuću funkciju f.*

Teorema 4.26 *Neka je $*$ sleva neprekidna t-norma i neka je $\Rightarrow$ odgovarajući reziduum, tj.*

$$x \Rightarrow y = \max\{z \mid x * z \leq y\}.$$

Tada je algebra $\mathcal{L}(*) = ([0,1], \cap, \cup, *, \Rightarrow, 0, 1)$ kompletna reziduirana mreža.

Važi i obrnuto: ako je $\mathcal{L} = ([0,1], \cap, \cup, *, \Rightarrow, 0, 1)$ kompletna reziduirana mreža, tada je $*$ sleva neprekidna t-norma.

Dokaz. Algebra $([0,1], \cap, \cup, 0, 1)$ je kompletna mreža. Za t-normu $*$ važi da je algebra $([0,1], *, 1)$ komutativni monoid i $*$ je izotona operacija. Dakle, dokaz teoreme je direktna posledica Tvrđenja 4.24 i 4.25.

$\square$

Definicija 4.27 *Za klasu algebri K kažemo da je **varijetet** ako je zatvorena u odnosu na operatore homomorfizma ($\boldsymbol{H}$), formiranja podalgebri ($\boldsymbol{S}$) i direktnog proizvoda ($\boldsymbol{P}$). Odnosno ako važi $\boldsymbol{H}(K) \subseteq K$, $\boldsymbol{S}(K) \subseteq K$, $\boldsymbol{P}(K) \subseteq K$.*

Tvrđenje 4.28 *Klasa reziduiranih mreža je varijetet.*

Dokaz. Za dokaz koristićemo Brikhoffovu teoremu po kojoj je klasa algebri varijetet ako i samo ako je jednakosna klasa algebri, odnosno akko postoji skup identiteta Σ takav da važi $\mathfrak{L} = Mod(\Sigma)$, gde je $\mathfrak{L}$ klasa algebri.

Pokazaćemo da postoji skup identiteta koji je ekvivalentan sa uslovima iz Definicije 4.17. Tačnije pokazaćemo da su uslovi iz pomenute definicije ekvivalentni sa sledećim identitetima:

1. $(x * y) \Rightarrow z = x \Rightarrow (y \Rightarrow z)$;
2. $(x * (x \Rightarrow y)) \cup y = y$;
3. $x \Rightarrow (x \cup y) = 1$;
4. identiteti koji definišu ograničenu mrežu $(L, \cap, \cup, 0, 1)$;
5. identiteti koji definišu komutativnu polugrupu sa neutralnim elementom $(L, *, 1)$.

Prvo ćemo pokazati da ako neka algebra zadovoljava ove identitete, onda je ona reziduirana mreža. Naime, moramo pokazati da skup ovih identiteta implicira uslov (3) Definicije 4.17, uslovi (1) i (2) iz definicije trivijalno važe.

Pokažimo da iz navedenih identiteta sledi:

$$x \leq y \text{ ako i samo ako } x \Rightarrow y = 1. \tag{4.3}$$

Ako je $x \leq y$, onda je $x \cup y = y$, pa iz identiteta (3) sledi $x \Rightarrow (x \cup y) = x \Rightarrow y = 1$. Ako je $x \Rightarrow y = 1$, onda primenom identiteta (2) dobijamo $(x * 1) \cup y = y$, tj. $x \cup y = y$, odnosno $x \leq y$.

Sada možemo dokazati uslov (3) iz definicije reziduiranih mreža. Na osnovu (4.3) i identiteta (1) ovog tvrđenja, sledi $x * y \leq z$ akko $(x * y) \Rightarrow z = 1$ akko $x \Rightarrow (y \Rightarrow z) = 1$ akko $x \leq y \Rightarrow z$. Dakle, zaista gornji identiteti impliciraju uslov (3) Definicije 4.17.

Pokažimo još da identiteti iz ovog tvrđenja važe u svakoj reziduiranoj mreži $\mathcal{L}$, (4) i (5) važe po definiciji reziduiranih mreža.

Na osnovu nejednakosti (3) Tvrđenja 4.20, za svako $x, y, z \in L$ važi $(x * y) * ((x * y) \Rightarrow z) \leq z$. Operacija $*$ je asocijativna i komutativna, pa važi $y * (x * ((x * y) \Rightarrow z)) \leq z$, a to je ekvivalentno sa $(x * y) \Rightarrow z \leq x \Rightarrow (y \Rightarrow z)$, zbog adjungovanosti operacija $\Rightarrow$ i $*$. Obrnuta nejednakost se dobija slično, $y * (x * (x \Rightarrow (y \Rightarrow z))) \leq y * (y \Rightarrow z) \leq z$, što je ekvivalentno sa $x \Rightarrow (y \Rightarrow z) \leq (x * y) \Rightarrow z$. Dokazali smo da u reziduiranim mrežama važi identitet (1) ovog tvrđenja.

Drugi identitet ekvivalentan je sa nejednakošću $x * (x \Rightarrow y) \leq y$, koja važi u svakoj reziduiranoj mreži, Tvrđenje 4.20 (3).

Znamo da je $x \leq x \cup y$. Iz Tvrđenja 4.20 (4) sledi $x \Rightarrow (x \cup y) = 1$, tako da i identitet (3) važi u reziduiranim mrežama.

$\square$

4.3 BL-algebre kao specijalne reziduirane mreže

Dosad smo proučavali neprekidne t-norme kao kandidate za interpretaciju konjunkcije, odgovarajuće reziduume kao interpretaciju implikacije i pomoću njih definisali semantiku negacije, minimuma i maksimuma. Za svaku fiksiranu neprekidnu t-normu $*$, definisali smo odgovarajući iskazni račun $PC(*)$.

Sada ćemo izvršiti algebraizaciju iskaznog računa $PC(*)$. BL algebre ćemo definisati kao posebne reziduirane mreže.

Definicija 4.29 *Reziduirana mreža* $(L, \cap, \cup, *, \Rightarrow, 0, 1)$ *je* ***BL-algebra*** *ako i samo ako za sve* $x, y \in L$ *važe identiteti:*

1. $x \cap y = x * (x \Rightarrow y)$,
2. $(x \Rightarrow y) \cup (y \Rightarrow x) = 1$.

Dakle, BL-algebra je deljiva reziduirana mreža koja zadovoljava aksiomu prelinearnosti.

Pojam BL-algebre uveo je Hájek u radu "Mathematics of Fuzzy Logic" [7], 1998. godine (BL je skraćeno od "basic logic").

Primer 4.30 *Łukasiewiczeva, Gödelova i Product struktura su BL-algebre. Već smo ustanovili da su reziduirane mreže, iz Tvrđenja 4.4 i 4.8 sledi da su to zaista BL-algebre.*

Nije svaka reziduirana mreža BL-algebra.

Primer 4.31 *Posmatrajmo reziduiranu mrežu* $([0,1], \cap, \cup, *, \Rightarrow, 0, 1)$. *Za svako* $x, y, z \in [0, 1]$, *neka su operacije definisane na sledeći način:*

$$x * y = \begin{cases} 0, & \text{ako } x + y \leq \frac{1}{2} \\ x \cap y, & \text{inače} \end{cases}$$

$$x \Rightarrow y = \begin{cases} 1, & \text{ako } x \leq y \\ \max(\frac{1}{2} - x, y), & \text{inače} \end{cases}$$

Neka je $0 < y < x$, $x + y < \frac{1}{2}$. *Onda je* $y < \frac{1}{2} - x$ *i* $0 \neq y = x \cap y$, *ali*

$$x * (x \Rightarrow y) = x * (\frac{1}{2} - x) = 0,$$

pa ne važi osobina deljivosti, odnosno ovo nije BL-algebra.

Definicija 4.32 *Reziduirana mreža* $(L, \cap, \cup, *, \Rightarrow, 0, 1)$ *je* ***linearno uređena*** *ako je njeno uređenje* $(L, \leq)$ *linearno, odnosno za svaki par* x, y *važi* $x \cap y = x$ *ili* $x \cap y = y$ *(ekvivalentno,* $x \cup y = x$ *ili* $x \cup y = y$*).*

Tvrđenje 4.33 *Linearno uređena reziduirana mreža je BL-algebra ako i samo ako je identitet* $x \cap y = x * (x \Rightarrow y)$ *u njoj istinit.*

Tvrđenje 4.34 *Svaka neprekidna* t*-norma određuje BL-algebru na jediničnom intervalu* $[0, 1]$ *sa standardnim linearnim uređenjem.*

Dokaz. Direktna posledica prethodnog tvrđenja i Tvrđenja 4.8 (1).

□

Tvrđenje 4.35 *Klasa BL-algebri je varijetet.*

Dokaz. Dokaz sledi iz Tvrđenja 4.28. Skupu identiteta iz dokaza pomenutog tvrđenja dodamo identitete (1) i (2) iz Definicije 4.29.

□

Tvrđenje 4.36 *U svakoj BL-algebri za sve x, y, z važi:*

1. $(x \cup y) * z = (x * z) \cup (y * z)$,
2. $x \cup y = ((x \Rightarrow y) \Rightarrow y) \cap ((y \Rightarrow x) \Rightarrow x)$,
3. $(x \Rightarrow y)^n \cup (y \Rightarrow x)^n = 1$, *za svako* $n \in \mathbb{N}$.

Dokaz.

1. Sledi iz Tvrđenja 4.23 (1) kada je indeksni skup I kardinalnosti 2.
2. Iz identiteta BL-algebri sledi

   $$[((x \Rightarrow y) \Rightarrow y) \cap ((y \Rightarrow x) \Rightarrow x)] =$$

   $$= [((x \Rightarrow y) \Rightarrow y) \cap ((y \Rightarrow x) \Rightarrow x)] * ((x \Rightarrow y) \cup (y \Rightarrow x)) =$$

   $$= ([((x \Rightarrow y) \Rightarrow y) \cap ((y \Rightarrow x) \Rightarrow x)] * (x \Rightarrow y)) \cup$$

   $$\cup ([((x \Rightarrow y) \Rightarrow y) \cap ((y \Rightarrow x) \Rightarrow x)] * (y \Rightarrow x)) \leq$$

   $$\leq [((x \Rightarrow y) \Rightarrow y) * (x \Rightarrow y)] \cup [((y \Rightarrow x) \Rightarrow x) * (y \Rightarrow x)] \leq$$

   $$\leq y \cup x = x \cup y.$$

   Obratno, iz (1) i Tvrđenja 4.20 sledi

   $$(x \Rightarrow y) * (x \cup y) = (x * (x \Rightarrow y)) \cup (y * (x \Rightarrow y)) \leq y \cup y = y.$$

   Iz adjungovanosti sledi $x \cup y \leq (x \Rightarrow y) \Rightarrow y$. Analogno pokažemo da važi $x \cup y \leq (y \Rightarrow x) \Rightarrow x$, pa sledi $x \cup y \leq ((x \Rightarrow y) \Rightarrow y) \cap ((y \Rightarrow x) \Rightarrow x)$.
3. Dokaz se može naći u [7].

□

Sada nam je cilj da pokažemo da je svaka BL-algebra izomorfna poddirektnom proizvodu linearno uređenih BL-algebri. Definišimo pojmove i dokažimo tvrđenja koja nas vode ka cilju.

Definicija 4.37 *Neka je* $\mathcal{L} = (L, \cap, \cup, *, \Rightarrow, 0, 1)$ *reziduirana mreža.* ***Filter*** *mreže* $\mathcal{L}$ *je neprazan skup* $F \subseteq L$*, takav da za sve* $x, y \in L$ *važi:*

1. *ako* $x \in F$ *i* $y \in F$ *onda* $x * y \in F$*;*

2. ako $x \in F$ i $x \leq y$ onda $y \in F$.

*F je **prost filter** ako i samo ako za sve $x, y \in L$ važi $(x \Rightarrow y) \in F$ ili $(y \Rightarrow x) \in F$.*

Tvrđenje 4.38 *Neka je $\mathcal{L}$ BL-algebra i neka je F filter. Neka je relacija $\sim_F$ na $\mathcal{L}$ definisana na sledeći način:*

$$x \sim_F y \text{ akko } (x \Rightarrow y) \in F \text{ ili } (y \Rightarrow x) \in F.$$

Tada važi:

1. *$\sim_F$ je kongruencija i odgovarajuća faktor algebra $\mathcal{L}/_{\sim_F}$ je BL-algebra.*
2. *$\mathcal{L}/_{\sim_F}$ je linearno uređena ako i samo ako je F prost filter.*

Dokaz.

1. Očigledno, relacija $\sim_F$ je refleksivna i simetrična. Da bismo pokazali da je $\sim_F$ relacija ekvivalencije, potrebno je pokazati da je tranzitivna.

   U dokazu Tvrđenja 4.21 (2) dokazali smo da u svakoj reziduiranoj mreži, za svako x, y, z važi nejednakost

   $$(x \Rightarrow y) * (y \Rightarrow z) \leq x \Rightarrow z.$$

   Iz definicije filtra sledi da $(x \Rightarrow y), (y \Rightarrow z) \in F$ povlači $(x \Rightarrow z) \in F$. Dakle, $\sim_F$ jeste relacija ekvivalencije sa klasama

   $$[x]_F = \{y \mid x \sim_F y\}.$$

   Jednostavno se pokaže da je $[x]_F \leq [y]_F$ ekvivalentno sa $(x \Rightarrow y) \in F$, kao i da $[x]_F = [y]_F$ implicira $[x * z]_F = [y * z]_F$, $[x \Rightarrow z]_F = [y \Rightarrow z]_F$ i $[z \Rightarrow x]_F = [z \Rightarrow y]_F$, tako da $\sim_F$ jeste kongruencija (relacija ekvivalencije koja je saglasna sa operacijama). Zato možemo definisati operacije $*$, $\Rightarrow$ (i $\cup, \cap$) na skupu $\mathcal{L}/_{\sim_F}$ klasa ekvivalencija tako da $[x]_F * [y]_F = [x * y]_F$ itd.

   Preslikavanje koje svakom x dodeli klasu $[x]_F$ je homomorfizam i $\mathcal{L}/_{\sim_F}$ je sa indukovanim operacijama BL-algebra (BL-algebre su varijetet, pa su zatvorene za homomorfizme).

2. Pretpostavimo da je F prost filter, neka $x, y \in L$; tada ili $(x \Rightarrow y) \in F$ pa je $[x]_F \leq [y]_F$ ili $(y \Rightarrow x) \in F$ pa je $[y]_F \leq [x]_F$. Dakle, $\leq$ je linearno uređenje.

   Obratno, neka je $\mathcal{L}/_{\sim_F}$ linearno uređena i $x, y \in L$; tada ili $[x]_F \leq [y]_F$ i $(x \Rightarrow y) \in F$ ili $[y]_F \leq [x]_F$ i $(y \Rightarrow x) \in F$, pa je F prost filter.

□

Tvrđenje 4.39 *Neka je $\mathcal{L}$ BL-algebra i $a \in L, a \neq 1$. Tada postoji prost filter F mreže $\mathcal{L}$ koji ne sadrži a.*

Dokaz. Očigledno je $F_0 = \{1\}$ filter koji ne sadrži a. Pokazaćemo da ako je F filter koji ne sadrži a i $x, y \in L$ takvi da $(x \Rightarrow y) \notin F$ i $(y \Rightarrow x) \notin F$, tada postoji filter $F' \supseteq F$ koji ne sadrži a, ali sadrži $(x \Rightarrow y)$ ili $(y \Rightarrow x)$.
Najmanji filter $F' \supseteq F$ koji sadrži z je $F' = \{u \mid (\exists v \in F)(\exists n \in \mathbb{N})(v * z^n \leq u)\}$. Zaista, ako je $F'' \supseteq F$ filter i $z \in F$ onda za svako $v \in F$ i prirodan broj n, $v * z^n \in F''$. F' je filter jer je zatvoren za operaciju $*$ i sadrži, za svako u i sve $u' \geq u$.

Pretpostavimo da $(x \Rightarrow y) \notin F$ i $(y \Rightarrow x) \notin F$, neka su F_1, F_2 najmanji filtri koji sadrže F kao podskup i $(x \Rightarrow y), (y \Rightarrow x)$ respektivno, kao element. Tvrdimo da $a \notin F_1$ ili $a \notin F_2$. Pretpostavimo suprotno. Tada za neko $v \in F$ i $n \in \mathbb{N}$ važi $v*(x \Rightarrow y)^n \leq a$ i $v*(y \Rightarrow x)^n \leq a$, dakle $a \geq v*(x \Rightarrow y)^n \cup v*(y \Rightarrow x)^n = v * ((x \Rightarrow y)^n \cup (y \Rightarrow x)^n) = v * 1 = v$ (koristili smo Tvrđenje 4.36 (3)), sledi da $a \in F$ što je kontradikcija. Dakle, $a \notin F_1$ ili $a \notin F_2$.

Neka je $\mathcal{L}$ prebrojiva BL-algebra, tada možemo sve parove $(x, y) \in L^2$ poređati u niz $\{(x_n, y_n) \mid n \in \mathbb{N}\}$, neka je $F_0 = \{1\}$. Sada ćemo konstruisati niz filtri F_n sa osobinom da $a \notin F_n, n \in \mathbb{N}$. Pokazali smo da za filter F_n, takav da $a \notin F_n$, postoji filter $F'_n \supseteq F_n$ takav da $a \notin F'_n$ i da $(x_n \Rightarrow y_n) \in F'_n$ ili $(y_n \Rightarrow x_n) \in F'_n$. Definišimo $F_{n+1} = F'_n$. Naš traženi prost filter je unija

$$\bigcup_n F_n.$$

U slučaju da $\mathcal{L}$ nije prebrojiva, morali bismo koristiti transfinitnu rekurziju: filter F bismo konstruisali u κ koraka, gde je κ kardinalnost skupa L.

□

Definicija 4.40 *Neka je $\{\mathcal{L}_i : i \in I\}$ familija reziduiranih mreža.* ***Direktan proizvod*** *familije reziduiranih mreža je algebra*

$$\mathcal{L} = \prod_{i \in I} \mathcal{L}_i = \big(\prod_{i \in I} L_i, \cap^{\mathcal{L}}, \cup^{\mathcal{L}}, *^{\mathcal{L}}, \Rightarrow^{\mathcal{L}}, 0^{\mathcal{L}}, 1^{\mathcal{L}}\big),$$

u kojoj su operacije definisane po komponentama:

$$\begin{aligned}
x \cap^{\mathcal{L}} y \quad &=_{def} \quad (x(j) \ \cap^{\mathcal{L}_j} y(j) : j \in I);\\
x \cup^{\mathcal{L}} y \quad &=_{def} \quad (x(j) \ \cup^{\mathcal{L}_j} y(j) : j \in I);\\
x *^{\mathcal{L}} y \quad &=_{def} \quad (x(j) \ *^{\mathcal{L}_j} y(j) : j \in I);\\
x \Rightarrow^{\mathcal{L}} y \quad &=_{def} \quad (x(j) \ \Rightarrow^{\mathcal{L}_j} y(j) : j \in I);\\
0^{\mathcal{L}} \quad &=_{def} \quad (0^{\mathcal{L}_j} : j \in I);\\
1^{\mathcal{L}} \quad &=_{def} \quad (1^{\mathcal{L}_j} : j \in I).
\end{aligned}$$

Za svako $j \in I$, preslikavanje $\pi_j : \prod_{i \in I} L_i \to L_j$ definisano $\pi_j(x) =_{def} x(j)$ je tzv. ***projekcija****.*

Reziduirana mreža $\mathcal{L}$ je ***poddirektan proizvod*** *familije reziduiranih mreža $\{\mathcal{L}_i : i \in I\}$ ako je $\mathcal{L}$ podalgebra od $\prod_{i \in I} \mathcal{L}_i$ i $\pi_j(L) = L_j$, za sve $j \in I$.*

Tvrđenje 4.41 *Svaka BL-algebra je izomorfna poddirektnom proizvodu linearno uređenih BL-algebri.*

Dokaz. Neka je $\mathcal{U}$ familija svih prostih filtri na BL-algebri $\mathcal{L}$. Za svaki $F \in \mathcal{U}$ neka je $\mathcal{L}_F = \mathcal{L}/_{\sim_F}$ i neka je

$$\mathcal{L}^* = \prod_{F \in \mathcal{U}} \mathcal{L}_F.$$

$\mathcal{L}^*$ je direktan proizvod linearno uređenih reziduiranih mreža $\{\mathcal{L}_{\mathcal{F}} | \ F \in \mathcal{U}\}$, za koje smo pokazali da su BL-algebre. Za $x \in \mathcal{L}$ neka je $i(x)$ element $([x]_F | \ F \in \mathcal{U})$ od $\mathcal{L}^*$. Očigledno, ovo preslikavanje je saglasno sa operacijama, treba pokazati da je injektivno. Ako su $x, y \in \mathcal{L}$ i $x \neq y$, tada $x \nleq y$ ili $y \nleq x$. Bez umanjenja opštosti, pretpostavimo da $x \nleq y$, tada $(x \Rightarrow y) \neq 1$ u $\mathcal{L}$, pa iz prethodnog tvrđenja sledi da postoji prost filter F od $\mathcal{L}$ koji ne sadrži $x \Rightarrow y$. Tada u $\mathcal{L}_F = \mathcal{L}/_{\sim_F}$ važi $[x]_F \nleq [y]_F$, dakle $i(x) \neq i(y)$.

Tako smo dokazali da se $\mathcal{L}$ može potopiti u direktan proizvod linearno uređenih BL-algebri. Kako je $\pi_F(i(L)) = \{[x]_F | x \in L\} = L_F$, za sve $F \in \mathcal{U}$, sledi da je algebra $i(\mathcal{L})$ podidrektan proizvod od $\mathcal{L}^*$.

$\square$

4.4 BL-logika kao deduktivni sistem

U daljem radu odabraćemo neke formule koje su 1-tautologije svakog iskaznog računa $PC(*)$ (za svaku neprekidnu t-normu $*$) za aksiome i razviti sistem koji će biti zajednička osnova svim logikama $PC(*)$. Odnosno, definisaćemo BL-logiku kao deduktivni sistem, preko sedam aksioma i jednog pravila izvođenja, tako da će formula biti teorema ako i samo ako je 1-tautologija za svaku (linearnu) BL-algebru.

Definicija 4.42 *Sledeće formule su aksiome osnovne logike BL:*

(A1) $(A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$

(A2) $(A \& B) \to A$

(A3) $(A \& B) \to (B \& A)$

(A4) $(A \& (A \to B)) \to (B \& (B \to A))$

(A5a) $(A \to (B \to C)) \to ((A \& B) \to C)$

(A5b) $((A \& B) \to C) \to (A \to (B \to C))$

(A6) $((A \to B) \to C) \to (((B \to A) \to C) \to C)$

(A7) $\overline{0} \to A$

Pravilo izvođenja je modus ponens, $MP : \dfrac{A, A \to B}{B}.$

Dokaz i dokazivu formulu (teoremu) u BL, definišemo na klasičan način, kao u Definiciji 2.19.

Napomena: Navedene aksiome izražavaju sledeće osobine:

(A1) tranzitivnost implikacije

(A2) &-konjunkcija implicira prvi član

(A3) komutativnost &-konjunkcije

(A4) komutativnost $\wedge$-konjunkcije

(A5) definicija reziduuma

(A6) dokaz po slučajevima

(A7) $\overline{0}$ implicira sve

Tvrđenje 4.43 *Sve aksiome BL su* 1*-tautologije u svakom iskaznom računu* $PC(*)$*. Ako su* A *i* $A \to B$ 1*-tautologije u* $PC(*)$*, onda je i* B 1*-tautologija u* $PC(*)$

Dokaz. Aksiome (A2), (A3), (A4) i (A7) su očigledno 1-tautologije. Neka je x, y, z proizvoljna interpretacija redom formula A, B, C.

(A1) Interpretacija aksiome (A1) je $(x \Rightarrow y) \Rightarrow ((y \Rightarrow z) \Rightarrow (x \Rightarrow z))$. Potrebno je dokazati da je $1 \leq (x \Rightarrow y) \Rightarrow ((y \Rightarrow z) \Rightarrow (x \Rightarrow z))$. Iz definicije reziduuma to je ekvivalentno sa $(x \Rightarrow y) \leq (y \Rightarrow z) \Rightarrow (x \Rightarrow z)$, ako primenimo još dvaput definiciju reziduuma dobijamo da je ekvivalentno sa $((x \Rightarrow y) * (y \Rightarrow z) * x) \leq z$.

Znamo da je $x * (x \Rightarrow y) = \min(x, y) \leq y$, pa je $((x \Rightarrow y) * (y \Rightarrow z) * x) \leq y * (y \Rightarrow z) = \min(y, z) \leq z$, što je i trebalo dokazati.

(A5) Za svako $t \in [0, 1]$ ekvivalentno je:

$$\begin{aligned}
&t \leq (x \Rightarrow (y \Rightarrow z)),\\
&(t * x) \leq (y \Rightarrow z),\\
&(t * x * y) \leq z,\\
&t \leq ((x * y) \Rightarrow z).
\end{aligned}$$

Ekvivalencije važe za svako t, pa je $(x \Rightarrow (y \Rightarrow z)) = ((x*y) \Rightarrow z)$. Odatle sledi istinitost (A5a) i (A5b) za svaku interpretaciju.

(A6) Iz Tvrđenja 4.4 sledi da je $(x \Rightarrow y) = 1$ ili $(y \Rightarrow x) = 1$ i da je $(1 \Rightarrow y) = y$.

Ako je $(y \Rightarrow x) = 1$, tada je $(((y \Rightarrow x) \Rightarrow z) \Rightarrow z) = ((1 \Rightarrow z) \Rightarrow z) = (z \Rightarrow z) = 1$, pa je interpretacija tačna jer uvek važi $x \Rightarrow 1 = 1$.

Ako je $(x \Rightarrow y) = 1$, tada

$$((x \Rightarrow y) \Rightarrow z) = (1 \Rightarrow z) \leq (((y \Rightarrow x) \Rightarrow z) \Rightarrow z),$$

odakle sledi da je formula (A6) istinita.

Modus ponens očuvava istinitost, ako je $x = 1$ i $x \Rightarrow y = 1$, tada je $y = 1$ jer je $1 \Rightarrow y = y$.

□

Kako su aksiome (A1)-(A7) 1-tautologije i pravilo izvođenja MP očuvava istinitost, sledi tvrđenje:

Tvrđenje 4.44 *Svaka dokaziva formula u BL je* 1*-tautologija svakog iskaznog računa* $PC(*)$.

Sada ćemo potvrditi dokazivost nekoliko grupa formula u BL. Korake dokaznog niza pisaćemo vertikalno, zajedno sa rednim brojem koraka i sa obrazloženjem zašto je to ”legalan” korak u dokazu.

Hipotetički silogizam je:

$$\text{Iz } A \to B \text{ i } B \to C \text{ izvodljivo je } A \to C.$$

Jednostavno se dokazuje da važi u BL:

1. $A \to B$ .... hipoteza
2. $B \to C$ .... hipoteza
3. $(A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$ A1
4. $(B \to C) \to (A \to C)$ .... MP 1.3.
5. $A \to C$ .... MP 2.4.

Izvedeno pravilo:

$$\text{HS: } \frac{A \to B, B \to C}{A \to C}$$

koristićemo u dokazima koji slede.

Tvrđenje 4.45 *U BL dokazive su sledeće formule:*

(F1) $A \to (B \to A)$

(F2) $A \to ((A \to B) \to B)$

(F3) $(A \to (B \to C)) \to (B \to (A \to C))$

(F4) $A \to A$

Dokaz.

(F1)

1. $(A\&B) \to A$ A2
2. $((A\&B) \to A) \to (A \to (B \to A))$ A5b
3. $A \to (B \to A)$ .... MP 1.2.

(F2)

1. $(A\&(A \to B)) \to (B\&(B \to A))$ A4
2. $(B\&(B \to A)) \to B$ A2
3. $(A\&(A \to B)) \to B$ .... HS 1.2.
4. $((A\&(A \to B)) \to B) \to (A \to ((A \to B) \to B))$ A5b
5. $A \to ((A \to B) \to B)$ .... MP 3.4.

(F3)

1. $B \to ((B \to C) \to C)$ F2
2. $(B \to ((B \to C) \to C)) \to$
   $\to ((((B \to C) \to C) \to (A \to C)) \to (B \to (A \to C)))$ A1
3. $(((B \to C) \to C) \to (A \to C)) \to (B \to (A \to C))$ .... MP 1.2.
4. $(A \to (B \to C)) \to (((B \to C) \to C) \to (A \to C))$ A1
5. $(A \to (B \to C)) \to (B \to (A \to C))$ .... HS 4.3.

(F4)

1. $A \to (B \to A)$ F1
2. $(A \to (B \to A)) \to (B \to (A \to A))$ F3
3. $B \to (A \to A)$ .... MP 1.2.
4. $(B \to (A \to A)) \to (A \to A)$ .... formula iz prethodnog reda
5. $A \to A$ .... MP 3.4.

□

U ovom radu koristimo rezultate Hájeka i njegovu aksiomatizaciju BL-logike. Međutim, u [4] pokazano je da je aksioma (A3) suvišna, odnosno da se može dobiti iz preostalih aksioma. Neka je BL^- sistem aksioma dobijen iz BL izbacivanjem aksiome (A3).

Tvrđenje 4.46 *$(A\&B) \to (B\&A)$ je dokaziva u BL^-.*

Dokaz.

1. $(B\&A) \to (B\&A)$ F4
2. $((B\&A) \to (B\&A)) \to (B \to (A \to (B\&A)))$ A5b
3. $B \to (A \to (B\&A))$ .... MP 1.2.
4. $(B \to (A \to (B\&A))) \to (A \to (B \to (B\&A)))$ F3
5. $A \to (B \to (B\&A))$ .... MP 3.4.
6. $(A \to (B \to (B\&A))) \to ((A\&B) \to (B\&A))$ A5a
7. $(A\&B) \to (B\&A)$ .... MP 5.6.

Naglasimo da smo u dokazu koristili prethodno tvrđenje koje smo dokazali bez aksiome (A3).

□

Iz Tvrđenja 4.45 (F3), u formalni sistem možemo dodati još jedno izvedeno pravilo, tzv. transpozicija.

$$\text{TRAN: } \frac{A \to (B \to C)}{B \to (A \to C)}$$

Opravdano je jer važi:

1. $A \to (B \to C)$ .... hipoteza
2. $(A \to (B \to C)) \to (B \to (A \to C))$ F3
3. $B \to (A \to C)$ .... MP 1.2.

Opštije, svaka dokazana formula koja je u vidu implikacije $A \to B$ određuje jedno novo izvedeno pravilo $\dfrac{A}{B}$.

Odgovarajuće izvedeno pravilo iz A5a je:

$$\text{REZa: } \frac{A \to (B \to C)}{(A\&B) \to C},$$

iz A5b:

$$\text{REZb: } \frac{(A\&B) \to C}{A \to (B \to C)}.$$

Izdvajaćemo ona pravila koja ćemo koristiti u dokazima koji slede, jer time smanjujemo dokazni niz.

Uvodimo još jedno pravilo izvođenja:

$$\text{IP: } \frac{A \to B}{(C \to A) \to (C \to B)}.$$

Dokazni niz je:

1. $A \to B$ .... hipoteza
2. $(C \to A) \to ((A \to B) \to (C \to B))$ A1
3. $(A \to B) \to ((C \to A) \to (C \to B))$ .... TRAN na 2.
4. $(C \to A) \to (C \to B)$ .... MP 1.3.

Tvrđenje 4.47 *U BL dokazive su sledeće formule:*

(F5) $(A\&(A \to B)) \to B$

(F6) $A \to (B \to (A\&B))$

(F7) $(A \to B) \to ((A\&C) \to (B\&C))$

(F7') $(A \to B) \to ((C\&A) \to (C\&B))$

(F8) $((A_1 \to B_1)\&(A_2 \to B_2)) \to ((A_1\&A_2) \to (B_1\&B_2))$

(F9) $((A\&B)\&C) \to (A\&(B\&C))$

(F9') $(A\&(B\&C)) \to ((A\&B)\&C)$

Dokaz.

(F5) Dokazano u Tvrđenju 4.45 (F2), korak 3.

(F6)

1. $(A\&B) \to (A\&B)$ F4
2. $A \to (B \to (A\&B))$ .... REZb na 1.

(F7) i (F7')

1. $B \to (C \to (B\&C))$ F6
2. $(A \to B) \to (A \to (C \to (B\&C)))$ .... IP na 1.
3. $(A \to (C \to (B\&C))) \to ((A\&C) \to (B\&C))$ A5a
4. $(A \to B) \to ((A\&C) \to (B\&C))$ .... HS 2.3.
5. $(A\&C) \to ((A \to B) \to (B\&C))$ .... TRAN na 4.

6. $(C\&A) \to (A\&C)$ A3
7. $(C\&A) \to ((A \to B) \to (B\&C))$ .... HS 6.5.
8. $(A \to B) \to ((C\&A) \to (B\&C))$ .... TRAN na 7.
9. $(B\&C) \to (C\&B)$ A3
10. $((C\&A) \to (B\&C)) \to ((C\&A) \to (C\&B))$ .... IP na 9.
11. $(A \to B) \to ((C\&A) \to (C\&B))$ .... HS 8.10.

Izvedena pravila su:

$$\text{IP7: } \frac{A \to B}{(A\&C) \to (B\&C)} \quad \text{i} \quad \text{IP7': } \frac{A \to B}{(C\&A) \to (C\&B)}.$$

(F8)

1. $(A_1 \to B_1) \to ((A_1\&A_2) \to (B_1\&A_2))$ F7
2. $((A_1 \to B_1)\&(A_2 \to B_2)) \to$
   $\to (((A_1\&A_2) \to (B_1\&A_2)) \to (A_2 \to B_2))$ .... IP7 na 1.
3. $(A_2 \to B_2) \to ((B_1\&A_2) \to (B_1\&B_2))$ .... F7'
4. $(((A_1\&A_2) \to (B_1\&A_2))\&(A_2 \to B_2)) \to$
   $\to (((A_1\&A_2) \to (B_1\&A_2))\&((B_1\&A_2) \to (B_1\&B_2)))$ ...... IP7' na 3.
5. $((A_1\&A_2) \to (B_1\&A_2)) \to$
   $\to (((B_1\&A_2) \to (B_1\&B_2)) \to ((A_1\&A_2) \to (B_1\&B_2)))$ A1
6. $(((A_1\&A_2) \to (B_1\&A_2))\&((B_1\&A_2) \to (B_1\&B_2))) \to$
   $\to ((A_1\&A_2) \to (B_1\&B_2))$ .... REZa na 5.
7. $((A_1 \to B_1)\&(A_2 \to B_2)) \to$
   $\to (((A_1\&A_2) \to (B_1\&A_2))\&((B_1\&A_2) \to (B_1\&B_2)))$ .... HS 2.4.
8. $((A_1 \to B_1)\&(A_2 \to B_2)) \to ((A_1\&A_2) \to (B_1\&B_2))$ .... HS 7.6.

(F9)

1. $((A\&B)\&C) \to ((A\&B)\&C)$ F4
2. $(A\&B) \to (C \to ((A\&B)\&C))$ .... REZb na 1.
3. $A \to (B \to (C \to ((A\&B)\&C)))$ .... REZb na 2.
4. $(B \to (C \to ((A\&B)\&C))) \to ((B\&C) \to ((A\&B)\&C))$ A5a
5. $A \to ((B\&C) \to ((A\&B)\&C))$ .... MP 3.4.
6. $(A\&(B\&C)) \to ((A\&B)\&C)$ .... REZa na 5.

Analogno se pokaže da važi obrnuta implikacija (F9').

□

Tvrđenje 4.48 *U BL dokazive su sledeće formule:*

(F10) $(A \wedge B) \to A$

(F10') $(A \wedge B) \to B$

(F11) $(A\&B) \to (A \wedge B)$

(F12) $(A \to B) \to (A \to (A \wedge B))$

(F13) $(A \wedge B) \to (B \wedge A)$

(F14) $((A \to B) \wedge (A \to C)) \to (A \to (B \wedge C))$

Dokaz. Prisetimo se da je veznik $\wedge$ definisan sa: $A \wedge B =_{def} A\&(A \to B)$.

(F10) Direktna posledica aksiome (A2).

(F10') Dokazana formula (F5).

(F11)

1. $B \to (A \to B)$ F1
2. $(A\&B) \to (A\&(A \to B))$ .... IP7' na 1.

(F12)

1. $((A \to B)\&A) \to (A \wedge B)$ A3
2. $(A \to B) \to (A \to (A \wedge B))$ .... REZb na 1.

(F13) Aksioma A4.

(F14) Obeležimo formulu $((A \to B) \wedge (A \to C)) \to (A \to (B \wedge C))$ sa D.

1. $(B \to C) \to (B \to (B \wedge C))$ F12
2. $(A \to B) \to ((B \to (B \wedge C)) \to (A \to (B \wedge C)))$ A1
3. $((A \to B) \wedge (A \to C)) \to (A \to B)$ F10
4. $((A \to B) \wedge (A \to C)) \to ((B \to (B \wedge C)) \to (A \to (B \wedge C)))$ HS 3.2.
5. $(B \to (B \wedge C)) \to D$ .... TRAN na 4.
6. $(B \to C) \to D$ .... HS 1.5.

6'. $(C \to B) \to D$ .... analogno kao 6.

7. $((B \to C) \to D) \to (((C \to B) \to D) \to D)$ A6
8. $((C \to B) \to D) \to D$ .... MP 6.7.
9. D .... MP 6'.8.

□

Izvedena pravila iz formula (F11) i (F14) prethodnog tvrđenja, koja ćemo koristiti su:

$$\text{IP11: } \frac{A\&B}{A \wedge B} \quad \text{i} \quad \text{IP14: } \frac{(A \to B) \wedge (A \to C)}{A \to (B \wedge C)}.$$

Sinteza jake konjunkcije je pravilo izvođenja:

$$\text{SJK: } \frac{A, B}{A\&B}.$$

Možemo ga koristiti jer važi:

1. A .... hipoteza
2. B .... hipoteza
3. $A \to (B \to (A\&B))$ F6
4. $B \to (A\&B)$ .... MP 1.3.
5. $A\&B$ .... MP 2.4.

Tvrđenje 4.49 *U BL dokazive su sledeće formule:*

(F15) $(A \vee B) \to (B \vee A)$

(F16) $A \to (A \vee B)$

(F16') $B \to (A \vee B)$

(F17) $(A \to B) \to ((A \vee B) \to B)$

(F18) $(A \to B) \vee (B \to A)$

(F19) $((A \to C) \wedge (B \to C)) \to ((A \vee B) \to C)$

Dokaz. $A \vee B =_{def} ((A \to B) \to B) \wedge ((B \to A) \to A)$.

(F15) Direktna posledica definicije $\vee$ i (F13)

(F16)

1. $A \to ((A \to B) \to B)$ F2
2. $A \to ((B \to A) \to A)$ F1
3. $(A \to ((A \to B) \to B))\&(A \to ((B \to A) \to A))$ .... SJK
4. $(A \to ((A \to B) \to B)) \wedge (A \to ((B \to A) \to A))$ .... IP11 na 3.
5. $A \to (((A \to B) \to B) \wedge ((B \to A) \to A))$ .... IP14 na 4.

(F16')

1. $B \to (B \vee A)$ F16
2. $(B \vee A) \to (A \vee B)$ F15
3. $B \to (A \vee B)$ .... HS 1.2.

(F17)

1. $(A \vee B) \to ((A \to B) \to B)$ F10
2. $(A \to B) \to ((A \vee B) \to B)$ .... TRAN na 1.

(F18) Označimo formulu $(A \to B) \vee (B \to A)$ sa D.

1. $(A \to B) \to ((A \to B) \vee (B \to A))$ F16
2. $(B \to A) \to ((A \to B) \vee (B \to A))$ .... F16'
3. $((A \to B) \to D) \to (((B \to A) \to D) \to D)$ A6
4. $((B \to A) \to D) \to D$ .... MP 1.3.
5. D .... MP 2.4.

(F19) Obeležimo formulu $((A \to C) \wedge (B \to C)) \to ((A \vee B) \to C)$ sa D.

1. $(A \to B) \to ((A \vee B) \to B)$ F17
2. $((A \vee B) \to B) \to ((B \to C) \to ((A \vee B) \to C))$ A1
3. $((A \to C) \wedge (B \to C)) \to (B \to C)$ .... F10'
4. $(B \to C) \to (((A \vee B) \to B) \to ((A \vee B) \to C))$ .... TRAN na 2.
5. $((A \to C) \wedge (B \to C)) \to (((A \vee B) \to B) \to ((A \vee B) \to C))$ HS 3.4.
6. $((A \vee B) \to B) \to D$ .... TRAN na 5.
7. $(A \to B) \to D$ .... HS 1.6.

7'. $(B \to A) \to D$ .... analogno kao 7.

8. $((A \to B) \to D) \to (((B \to A) \to D) \to D)$ A6
9. $((B \to A) \to D) \to D$ .... MP 7.8.
10. D .... MP 7'.9.

$\square$

Posledica 4.50 *U BL dokazivo je:*

(F14') $((A \to B)\&(A \to C)) \to (A \to (B \wedge C))$

(F19') $((A \to C)\&(B \to C)) \to ((A \vee B) \to C)$

Dokaz.

(F14')

1. $((A \to B)\&(A \to C)) \to ((A \to B) \wedge (A \to C))$ F11
2. $((A \to B) \wedge (A \to C)) \to (A \to (B \wedge C))$ F14
3. $((A \to B)\&(A \to C)) \to (A \to (B \wedge C))$ ....HS 1.2.

(F19')

1. $((A \to C)\&(B \to C)) \to ((A \to C) \wedge (B \to C))$ F11
2. $((A \to C) \wedge (B \to C)) \to ((A \vee B) \to C)$ F19
3. $((A \to C)\&(B \to C)) \to ((A \vee B) \to C)$ ....HS 1.2.

□

Tvrđenje 4.51 *U BL dokazive su sledeće formule:*

(F20) $A \to (\neg A \to B)$, *specijalno* $A \to \neg\neg A$

(F21) $(A\&\neg A) \to \overline{0}$

(F22) $(A \to (B\&\neg B)) \to \neg A$

(F23) $(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$

(F24) $(A \to \neg B) \to (B \to \neg A)$

Dokaz. Podsetimo se: $\neg A =_{def} A \to \overline{0}$.

(F20)

1. $\overline{0} \to B$ A7
2. $((A \to \overline{0}) \to \overline{0}) \to ((A \to \overline{0}) \to B)$ .... IP na 1.
3. $A \to ((A \to \overline{0}) \to \overline{0})$ F2
4. $A \to ((A \to \overline{0}) \to B)$ ....HS 3.2.

Zaista, $A \to \neg\neg A$ je $A \to (\neg A \to \overline{0})$.

(F21)

1. $A \to (\neg A \to \overline{0})$ F20
2. $(A\&\neg A) \to \overline{0}$ ....REZa na 1.

(F22)

1. $(B\&(B \to \overline{0})) \to \overline{0}$ F5
2. $(A \to (B\&(B \to \overline{0}))) \to (A \to \overline{0})$ .... IP na 1.

(F23)

1. $(A \to B) \to ((B \to \overline{0}) \to (A \to \overline{0}))$ A1

(F24)

1. $(A \to \neg B) \to (\neg\neg B \to \neg A)$ F23
2. $B \to \neg\neg B$ F20
3. $(B \to \neg\neg B) \to ((\neg\neg B \to \neg A) \to (B \to \neg A))$ A1
4. $(\neg\neg B \to \neg A) \to (B \to \neg A)$ .... MP 2.3.
5. $(A \to \neg B) \to (B \to \neg A)$ .... HS 1.4.

□

Definicija 4.52 $\overline{1}$ *je oznaka za* $\overline{0} \to \overline{0}$.

Tvrđenje 4.53 *U BL dokazivo je:*

(F25) $\overline{1}$

(F26) $A \to (\overline{1} \& A)$

(F27) $(\overline{1} \to A) \to A$

Dokaz.

(F25)

1. $\overline{0} \to \overline{0}$ F4

(F26)

1. $\overline{1} \to (A \to (\overline{1} \& A))$ F6
2. $\overline{1}$ F25
3. $A \to (\overline{1} \& A)$ .... MP 2.1.

(F27)

1. $\overline{1} \to ((\overline{1} \to A) \to A)$ F2
2. $\overline{1}$ F25
3. $(\overline{1} \to A) \to A$ .... MP 2.1.

□

Dokaz narednog tvrđenja nećemo sprovesti, može se naći u [7].

Tvrđenje 4.54 *U BL dokazive su sledeće formule:*

(F28) $(A \wedge (B \wedge C)) \to ((A \wedge B) \wedge C)$

$((A \wedge B) \wedge C) \to (A \wedge (B \wedge C))$

(F29) $(A \vee (B \vee C)) \to ((A \vee B) \vee C)$

$((A \vee B) \vee C) \to (A \vee (B \vee C))$

(F30) $A \to A \wedge (A \vee B)$

$(A \vee (A \wedge B)) \to A$

Da bismo lakše dokazali sledeće tvrđenje uvedimo još jedno izvedeno pravilo iz (F8):

$$\text{IP8: } \frac{(A_1 \to B_1)\&(A_2 \to B_2)}{(A_1\&A_2) \to (B_1\&B_2)}.$$

Tvrđenje 4.55 *U BL dokazive su sledeće formule:*

(F31) $A \leftrightarrow A$

(F32) $(A \leftrightarrow B) \to (B \leftrightarrow A)$

(F33) $((A \leftrightarrow B)\&(B \leftrightarrow C)) \to (A \leftrightarrow C)$

(F34) $(A \leftrightarrow B) \to (A \to B)$

(F34') $(A \leftrightarrow B) \to (B \to A)$

(F35) $(A \leftrightarrow B) \to ((A\&C) \leftrightarrow (B\&C))$

(F35') $(A \leftrightarrow B) \to ((C\&A) \leftrightarrow (C\&B))$

(F36) $(A \leftrightarrow B) \to ((A \to C) \leftrightarrow (B \to C))$

(F36') $(A \leftrightarrow B) \to ((C \to A) \leftrightarrow (C \to B))$

(F37) $(A \leftrightarrow B) \to ((A \to B) \wedge (B \to A))$

(F38) $((A \to B) \wedge (B \to A)) \to (A \leftrightarrow B)$

Dokaz. Naglasimo, $A \leftrightarrow B =_{def} (A \to B)\&(B \to A)$. Eksplicitno ćemo izvesti dokaz za formule (F35) i (F36).

(F35)

1. $(A \to B) \to ((A\&C) \to (B\&C))$ F7
2. $(B \to A) \to ((B\&C) \to (A\&C))$ F7
3. $((A \to B) \to ((A\&C) \to (B\&C)))\&$
   $\&((B \to A) \to ((B\&C) \to (A\&C)))$ .... SJK 1.2.
4. $(A \leftrightarrow B) \to ((A\&C) \leftrightarrow (B\&C))$ .... IP8 na 3.

(F36)

1. $(A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$ A1
2. $(B \to A) \to ((A \to C) \to (B \to C))$ A1
3. $((A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C)))\&$
   $\&((B \to A) \to ((A \to C) \to (B \to C)))$ .... SJK 1.2.
4. $(A \leftrightarrow B) \to ((A \to C) \leftrightarrow (B \to C))$ .... IP8 na 3.

□

Nakon brojnih formula za koje smo pokazali da važe u BL-logici, cilj nam je dokazati *Modifikovanu teoremu dedukcije.* Pre toga definišimo potrebne pojmove.

Definicija 4.56 ***Teorija*** *u BL je skup formula.* ***Dokaz*** *u teoriji T je konačan niz formula $A_1, A_2, ..., A_n$ takav da je svaka formula u nizu ili aksioma ili element iz T ili sledi iz ranijih formula u nizu na osnovu pravila izvođenja MP.*
$T \vdash A$ označava da je A dokaziva u T, tj. A je poslednja formula dokaza u T.

Teorema 4.57 (Modifikovana teorema dedukcije) *Neka je T teorija, A i B formule. $T \cup \{A\} \vdash B$ ako i samo kao postoji prirodan broj n takav da $T \vdash A^n \to B$ ($A^n = A\&A\&...\&A$, A se javlja n puta).*

Dokaz. Neka je $n > 1$ i $T \vdash A^n \to B$, tada $T \vdash (A\&A^{n-1}) \to B$. Iz aksiome (A5a) i pravila izvođenja MP, sledi $T \vdash A \to (A^{n-1} \to B)$, tj. $T \cup \{A\} \vdash A^{n-1} \to B$. Ponavljanjem, dobijamo $T \cup \{A\} \vdash A \to B$, tj. $T \cup \{A\} \vdash B$.

Obratno, neka je $T \cup \{A\} \vdash B$ i neka je odgovarajući dokazni niz:

$$C_1, C_2, ..., C_k = B.$$

Indukcijom po k dokažimo da postoji $n \in \mathbb{N}$ tako da je $T \vdash A^n \to B$.

1. $k = 1$: Dokazni niz za B iz $T \cup \{A\}$ ima samo jednu formulu, B, pa imamo tri mogućnosti:

   a) B je aksioma. Tada je $n = 1$ i dokazni niz za $A \to B$ iz T je:

      1. B .... aksioma
      2. $(B\&A) \to B$ A2
      3. $((B\&A) \to B) \to (B \to (A \to B))$ A5b
      4. $B \to (A \to B)$ .... MP 2.3.
      5. $A \to B$ .... MP 1.4.

   b) $B \in T$. Dokazni niz je isti kao u prvom slučaju, samo sa drugim obrazloženjem.

   c) $B = A$. Tada je formula $A \to B$ ustvari $A \to A$, ta formula je teorema, pa sledi iz svakog skupa hipoteza.

2. Pretpostavimo da tvrđenje važi za sve formule čiji je dokaz dužine manje od k. Neka je $C_1, C_2, ..., C_k = B$ dokazni niz formule B iz skupa $T \cup \{A\}$. Tada za B imamo nekoliko mogućnosti:

   a) B je aksioma.

   b) $B \in T$.

   c) $B = A$.
   Prva tri slučaja su ista kao u bazi indukcije.

   d) B sledi iz ranijih formula u nizu na osnovu pravila MP, npr. iz formula C_i i $C_i \to B$. Formule C_i i $C_i \to B$ su ranije u nizu, imaju kraće dokaze od k, pa za njih važi indukcijska hipoteza. To znači da postoje s i m tako da važi:

$$T \vdash A^s \to C_i \quad \text{i} \quad T \vdash A^m \to (C_i \to B).$$

Primenom SJK i IP8, dobijamo:

$$T \vdash (A^s \& A^m) \to (C_i \& (C_i \to B)),$$

odnosno

$$T \vdash A^{s+m} \to B \text{ (primenili smo (F5))}.$$

□

Sada ćemo pokazati da teorema dedukcije koja važi za klasičnu logiku, ne važi za sve sisteme $PC(*)$. Za to nam je potrebno sledeće tvrđenje.

Tvrđenje 4.58 *Formula $A \to (A\&A)$ nije 1-tautologija za svaki iskazni račun $PC(*)$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je u konkretnom $PC(*)$ formula $A \to (A\&A)$ istinita za svaku interpretaciju, tj. $1 \leq (x \Rightarrow x * x)$, tada mora biti $x \leq x * x$. Po definiciji funkcije $*$ važi $x * x \leq x$. Dakle, funkcija $*$ je idempotentna, $x * x = x$. Neka su $x, y \in [0,1]$ i $x \leq y$. Tada je

$$x * y \geq x * x = x \text{ i}$$
$$x * y \leq x * 1 = x,$$

dakle, $x * y = x$, pa je funkcija $*$ zapravo funkcija minimuma.
Neka je $*$ recimo Product t-norma, tada je $*$ neprekidna t-norma različita od funkcije minimuma. Zaključak je da u odgovarajućem sistemu $PC(*)$ formula $A \to (A\&A)$ nije 1-tautologija.

□

Prisetimo se, klasična teorema dedukcije tvrdi da za svaku teoriju T, formule A i B važi $T \cup \{A\} \vdash B$ ako i samo ako $T \vdash A \to B$.

Tvrđenje 4.59 *Klasična teorema dedukcije ne važi za svaki iskazni račun $PC(*)$.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno. Neka je $T = \{A\}$ teorija. Na osnovu pravila izvođenja SJK važi $\{A\} \vdash A\&A$, što bi zbog teoreme dedukcije povlačilo da je $\vdash A \to (A\&A)$, tj. da je $A \to (A\&A)$ dokaziva u BL. Na osnovu Tvrđenja 4.44 sledi da je $A \to (A\&A)$ 1-tautologija za svaki iskazni račun $PC(*)$, a to je u kontradikciji sa prethodnim tvrđenjem. Dakle, zaista klasična teorema dedukcije ne važi za svaki $PC(*)$.

□

Na osnovu zaključaka do kojih smo došli u prethodna dva tvrđenja, opravdano je uvesti sledeće proširenje BL-logike.

Definicija 4.60 ***Gödelova logika*** *je proširenje BL-logike aksiomom*

$$A \to (A\&A).$$

Pokazaćemo da od svih logika $PC(*)$, Gödelova je jedina u kojoj važi klasična teorema dedukcije.

Tvrđenje 4.61

1. *U Gödelovoj logici važi klasična teorema dedukcije.*

2. *Ako u $PC(*)$ važi klasična teorema dedukcije, tada je $*$ funkcija minimuma.*

Dokaz.

1. Ako važi $T \vdash A \to B$, analogno kao u dokazu modifikovane teoreme dedukcije, pokaže se da sledi $T \cup \{A\} \vdash B$. Obratno, neka $T \cup \{A\} \vdash B$. $T \vdash A \to B$ sledi kao posledica modifikovane teoreme dedukcije i idempotentnosti jake konjunkcije &.

2. Pretpostavimo da u $PC(*)$ važi klasična teorema dedukcije. Iz $\{A\} \vdash (A\&A)$ sledi $\vdash A \to (A\&A)$, dakle $*$ je idempotentna. U dokazu Tvrđenja 4.58 pokazali smo da to znači da je $*$ funkcija minimuma.

□

Definicija 4.62 *Teorija T je* ***nekonzistentna (protivrečna)*** *ako $T \vdash \overline{0}$. U suprotnom kažemo da je T* ***konzistentna (neprotivrečna)****.*

Tvrđenje 4.63 *T je nekonzistentna teorija ako i samo ako važi $T \vdash A$, za svaku formulu A.*

Dokaz. Ako T dokazuje svaku formulu, onda dokazuje i $\overline{0}$, pa je T nekonzistentna teorija. Obratno, ako $T \vdash \overline{0}$, onda $T \vdash A$, jer $T \vdash \overline{0} \to A$ (zbog aksiome A7).

□

Tvrđenje 4.64 *Ako je $T \cup \{A\}$ nekonzistentna teorija, tada za neko $n \in \mathbb{N}$ važi $T \vdash \neg(A^n)$.*

Dokaz. Neka $T \cup \{A\} \vdash \overline{0}$, tada po modifikovanoj teoremi dedukcije, za neko $n \in \mathbb{N}$ važi $T \vdash A^n \to \overline{0}$, tj. $T \vdash \neg(A^n)$.

□

Sve što je potrebno da bismo dokazali naredna dva tvrđenja izneli smo i dokazali. Zato ih navodimo bez dokaza, koji se može naći u [7].

Tvrđenje 4.65 *U BL dokazivi su sledeći distributivni zakoni:*

(F37) $A\&(B \vee C) \leftrightarrow (A\&B) \vee (A\&C)$

$A\&(B \wedge C) \leftrightarrow (A\&B) \wedge (A\&C)$

(F38) $(A \wedge (B \vee C)) \leftrightarrow ((A \wedge B) \vee (A \wedge C))$

$(A \vee (B \wedge C)) \leftrightarrow ((A \vee B) \wedge (A \vee C))$

Tvrđenje 4.66 *U BL dokazivo je:*

(F39) $(A \vee B)\&(A \vee B) \to ((A\&A) \vee (B\&B))$

$(A \wedge B)\&(A \wedge B) \to ((A\&A) \wedge (B\&B))$

(F40) $(A \to B)^n \vee (B \to A)^n$*, za svako n.*

Ovo poglavlje ćemo završiti dokazom da u BL važe de Morganova pravila.

Tvrđenje 4.67 *U BL dokaziva su de Morganova pravila:*

(F41) $(\neg A \wedge \neg B) \leftrightarrow \neg(A \vee B)$

(F42) $(\neg A \vee \neg B) \leftrightarrow \neg(A \wedge B)$

Dokaz. Dokazaćemo (F42).

1. $(A \wedge B) \to A$ F10
2. $((A \wedge B) \to A) \to (\neg A \to \neg(A \wedge B)))$ F23
3. $\neg A \to \neg(A \wedge B)$ .... MP 1.3.
4. $(A \wedge B) \to B$ .... F10'
5. $((A \wedge B) \to B) \to (\neg B \to \neg(A \wedge B))$ F23
6. $\neg B \to \neg(A \wedge B)$ .... MP 4.5.
7. $(\neg A \to \neg(A \wedge B))\&(\neg B \to \neg(A \wedge B))$ .... SJK 3.6.
8. $(\neg A \vee \neg B) \to \neg(A \wedge B)$ .... (izvedeno pravilo iz F19') na 7.

Dokazali smo $\vdash_{BL} (\neg A \vee \neg B) \to \neg(A \wedge B)$. Preostaje još da dokažemo $\vdash_{BL} \neg(A \wedge B) \to (\neg A \vee \neg B)$.

1. $(A \to B) \to (A \to (A \wedge B))$ F12
2. $(A \to (A \wedge B)) \to (\neg(A \wedge B) \to \neg A)$ F23
3. $(A \to B) \to (\neg(A \wedge B) \to \neg A)$ .... HS 1.2.
4. $\neg A \to (\neg A \vee \neg B)$ F16
5. $((A \to B)\&\neg(A \wedge B)) \to \neg A$ .... REZa na 3.
6. $((A \to B)\&\neg(A \wedge B)) \to (\neg A \vee \neg B)$ .... HS 5.4.
7. $(A \to B) \to (\neg(A \wedge B) \to (\neg A \vee \neg B))$ .... REZb na 6.

Dakle, $\vdash_{BL} (A \to B) \to (\neg(A \wedge B) \to (\neg A \vee \neg B))$, analogno dobija se $\vdash_{BL} (B \to A) \to (\neg(A \wedge B) \to (\neg A \vee \neg B))$. Zatim, jednostavno primenom aksiome (A6) sledi $\vdash_{BL} \neg(A \wedge B) \to (\neg A \vee \neg B)$.

□

4.5 Kompletnost BL-logike

Rezultati ovog poglavlja predstavljaju cilj ka kojem smo težili u dosadašnjem radu.

Definicija 4.68 *Neka je $\mathcal{L} = (L, \cap, \cup, *, \Rightarrow, 0, 1)$ BL-algebra.* ***$\mathcal{L}$-interpretacija*** *iskaznih promenljivih je bilo koje preslikavanje e koje svakoj iskaznoj promenljivoj p dodeli element $e(p) \in \mathcal{L}$. Interpretaciju svih formula dobijamo proširenjem interpretacije iskaznih promenljivih, koristeći operacije BL-algebre $\mathcal{L}$:*

$$\begin{aligned} e(\overline{0}) &= 0, \\ e(A \to B) &= e(A) \Rightarrow e(B), \\ e(A\&B) &= e(A) * e(B). \end{aligned}$$

Formula A je ***$\mathcal{L}$-tautologija*** *ako je $e(A) = 1$ za svaku $\mathcal{L}$-interpretaciju e.*

Napomena: Iz prethodne definicije, zatim definicije BL-algebre 4.29 (1) i Tvrđenja 4.36 (2), sledi:

$$\begin{aligned} e(\neg A) &= e(A) \Rightarrow 0, \\ e(A \wedge B) &= e(A) \cap e(B), \\ e(A \vee B) &= e(A) \cup e(B). \end{aligned}$$

Teorema 4.69 (Pouzdanost BL-logike) *BL-logika je pouzdana u odnosu na $\mathcal{L}$-tautologije: ako je A dokaziva u BL, onda je A $\mathcal{L}$-tautologija za svaku BL-algebru $\mathcal{L}$. Uopšteno, ako je T teorija u BL i T dokazuje A ($T \vdash A$), tada za svaku BL-algebru $\mathcal{L}$ i svaku $\mathcal{L}$-interpretaciju e iskaznih promenljivih koja svim aksiomama u T dodeljuje vrednost 1, važi $e(A) = 1$ ($T \models_{BL} A$).*

Dokaz. Potrebno je dokazati da su sve aksiome BL-logike $\mathcal{L}$-tautologije, kao i da MP očuvava istinitost.
Interpretacija svake aksiome je u formi $x \Rightarrow y$, pa ćemo u dokazivanju koristiti Tvrđenje 4.20 (4): $x \leq y$ akko $x \Rightarrow y = 1$. Posmatramo interpretaciju aksioma u proizvoljnoj BL-algebri, x, y, z su interpretacije redom formula A, B, C.

(A1) $(x \Rightarrow y) \Rightarrow ((y \Rightarrow z) \Rightarrow (x \Rightarrow z)) = 1$ akko $(x \Rightarrow y) \leq ((y \Rightarrow z) \Rightarrow (x \Rightarrow z))$, što je ekvivalentno sa $(x \Rightarrow y) * (y \Rightarrow z) \leq (x \Rightarrow z)$. Poslednja nejednakost je tačna, pokazali smo u dokazu Tvrđenja 4.21 (2). Dakle, interpretacija aksiome (A1) uzima vrednost 1.

(A2) $(x * y) \Rightarrow x = 1$ jer je $x * y \leq x$ (Tvrđenje 4.20 (2)).

(A3) $(x * y) \Rightarrow (y * x) = 1$ jer je $x * y = y * x$ (komutativnost operacije $*$).

(A4) $(x * (x \Rightarrow y)) \Rightarrow (y * (y \Rightarrow x)) = 1$ jer $\mathcal{L}$ je deljiva reziduirana mreža pa zadovoljava uslov $x * (x \Rightarrow y) = x \cap y = y \cap x = y * (y \Rightarrow x)$.

(A5a) $(x \Rightarrow (y \Rightarrow z)) \Rightarrow ((x * y) \Rightarrow z) = 1$ akko $(x \Rightarrow (y \Rightarrow z)) \leq ((x * y) \Rightarrow z)$ akko $y * x * (x \Rightarrow (y \Rightarrow z)) \leq z$. Dokažimo poslednju nejednakost.
$x * (x \Rightarrow (y \Rightarrow z)) \leq y \Rightarrow z$ (Tvrđenje 4.20 (3)), iz izotonosti operacije $*$ sledi $y * x * (x \Rightarrow (y \Rightarrow z)) \leq y * (y \Rightarrow z) \leq z$.

(A5b) $((x * y) \Rightarrow z) \leq (x \Rightarrow (y \Rightarrow z)) = 1$ akko $x * ((x * y) \Rightarrow z) \leq y \Rightarrow z$ akko $(x * y) * ((x * y) \Rightarrow z) \leq z$, što je tačno zbog već pomenutog Tvrđenja 4.20 (3).

(A6) U $\mathcal{L}$ važi:

$$\begin{aligned} &((x \Rightarrow y) \Rightarrow z) * ((y \Rightarrow x) \Rightarrow z) = \\ &= (((x \Rightarrow y) \Rightarrow z) * ((y \Rightarrow x) \Rightarrow z)) * ((x \Rightarrow y) \cup (y \Rightarrow x)) = \\ &= ((x \Rightarrow y) * (((x \Rightarrow y) \Rightarrow z) * ((y \Rightarrow x) \Rightarrow z))) \cup \\ &\cup ((y \Rightarrow x) * (((x \Rightarrow y) \Rightarrow z) * ((y \Rightarrow x) \Rightarrow z))) \leq \\ &\leq (z * ((y \Rightarrow x) \Rightarrow z)) \cup (z * ((x \Rightarrow y) \Rightarrow z)) \leq \\ &\leq z \cup z = z. \end{aligned}$$

Koristili smo prelinearnost BL-algebre: $(x \Rightarrow y) \cup (y \Rightarrow x) = 1$, Tvrđenje 4.23 (1), Tvrđenje 4.20 (2),(3) i izotonost operacije $*$.
Dakle, pokazali smo da u $\mathcal{L}$ važi: $((x \Rightarrow y) \Rightarrow z) * ((y \Rightarrow x) \Rightarrow z) \leq z$, što je ekvivalentno sa $((x \Rightarrow y) \Rightarrow z) \leq ((y \Rightarrow x) \Rightarrow z) \Rightarrow z$, odnosno sa $((x \Rightarrow y) \Rightarrow z) \Rightarrow (((y \Rightarrow x) \Rightarrow z) \Rightarrow z) = 1$.

(A7) $0 \Rightarrow x = 1$, dokazano u Tvrđenju 4.20 (10).

MP očuvava istinitost, ako je $x = 1$ i $x \Rightarrow y = 1$, onda je i $y = 1$, jer je $1 \Rightarrow y = y$.

□

Definicija 4.70 (Lindenbaum-Tarski algebra) *Neka je T fiksirana teorija u BL. Za svaku formulu A, neka je $[A]_T$ skup svih formula B takvih da $T \vdash A \leftrightarrow B$ (formule koje su T-dokazivo ekvivalentne sa A). L_T je skup svih klasa $[A]_T$. Definišemo:*

$$\begin{aligned} 0 &= [\overline{0}]_T \\ 1 &= [\overline{1}]_T \\ [A]_T * [B]_T &= [A \& B]_T \\ [A]_T \Rightarrow [B]_T &= [A \to B]_T \\ [A]_T \cap [B]_T &= [A \wedge B]_T \\ [A]_T \cup [B]_T &= [A \vee B]_T \end{aligned}$$

(Definisanje je korektno zbog Tvrđenja 4.55 (F35)-(F37).)

$\mathcal{L}_T = (L_T, \cap, \cup, *, \Rightarrow, 0, 1)$ *naziva se* ***Lindenbaum-Tarski algebra za teoriju T****.*

Tvrđenje 4.71 *Za svaku teoriju T u BL, $\mathcal{L}_T$ je BL-algebra.*

Dokaz. Idempotentnost, komutativnost, asocijativnost i apsorpcija operacija $\cup$ i $\cap$ slede iz dokazanih formula (F10)-(F11), (F15), (F16), (F16'), (F28)-(F30), (F13) i (F19). Operacija $*$ zadovoljava osobine komutativne polugrupe sa neutralnim elementom zbog (A3), (F9), (F9') i (F27).
Adjungovanost ćemo lakše dokazati ako pokažemo sledeće:

$$[A]_T \leq [B]_T \text{ ako i samo ako } T \vdash A \to B.$$

Ako $T \vdash A \to B$, dokazni niz:

1. $A \to B$ .... hipoteza
2. $A \wedge B \to A$ F10
3. $A \to A$ F4
4. $(A \to A) \& (A \to B)$ .... SJK 3.1.
5. $(A \to A) \wedge (A \to B)$ .... IP 11 na 4.
6. $A \to (A \wedge B)$ .... IP14 na 5.
7. $(A \to (A \wedge B)) \& ((A \wedge B) \to A)$ .... SJK 6.2.
8. $(A \to (A \wedge B)) \wedge ((A \wedge B) \to A)$ .... IP11 na 7.
9. $((A \to (A \wedge B)) \wedge ((A \wedge B) \to A)) \to (A \leftrightarrow (A \wedge B))$ F38
10. $A \leftrightarrow (A \wedge B)$ .... MP 8.9.

pokazuje da $T \vdash A \leftrightarrow (A \wedge B)$, stoga $[A]_T = [A]_T \cap [B]_T$ i $[A]_T \leq [B]_T$.

Obratno, ako je $[A]_T \leq [B]_T$, onda je $[A]_T = [A]_T \cap [B]_T$, tj. $[A]_T = [A \wedge B]_T$, odakle sledi $T \vdash A \leftrightarrow (A \wedge B)$. Iz dokaznog niza:

1. $A \leftrightarrow (A \wedge B)$ .... hipoteza
2. $(A \leftrightarrow (A \wedge B)) \to (A \to (A \wedge B))$ F34
3. $A \to (A \wedge B)$ .... MP 1.2.
4. $A \wedge B \to B$ .... F10'
5. $A \to B$ .... HS 3.4.

sledi $T \vdash A \to B$.

Sada dokazujemo adjungovanost.

$[C]_T \leq [A]_T \Rightarrow [B]_T$ akko $T \vdash C \to (A \to B)$, što je zbog aksioma (A5a) i (A5b) ekvivalentno sa $T \vdash (C\&A) \to B$.
$T \vdash (C\&A) \to B$ ekvivalentno je sa $[C\&A]_T \leq [B]_T$, tj. sa $[C]_T * [A]_T \leq [B]_T$.
□

Definicija 4.72 *Svakoj formuli A BL-logike pridružujemo term $A^\bullet$ jezika reziduiranih mreža tako što zamenimo veznike $\to$, $\&$, $\wedge$, $\vee$, $\overline{0}$, $\overline{1}$ funkcijskim simbolima i konstantama $\Rightarrow$, $*$, $\cap$, $\cup$, 0, 1, respektivno i zamenimo svaku iskaznu promenljivu p_i odgovarajućom objektnom promenljivom x_i.*

Tvrđenje 4.73
1. *Za svaku BL algebru $\mathcal{L}$, formula A je $\mathcal{L}$-tautologija ako i samo ako je identitet $A^\bullet = 1$ istinit u $\mathcal{L}$.*
2. *Svaka formula koja je $\mathcal{L}$-tautologija za sve linearno uređene BL-algebre $\mathcal{L}$ je $\mathcal{L}$-tautologija za* **sve** *BL-algebre $\mathcal{L}$.*

Dokaz.

1. Očigledno je, s obzirom da je vrednost terma $A^\bullet$ data interpretacijom e baš $e_{\mathcal{L}}(A)$.
2. Neka je $\mathcal{L}$ proizvoljna BL-algebra, po Tvrđenju 4.41 može se potopiti u direktan proizvod neke familije $\{\mathcal{L}_i : i \in I\}$ linearno uređenih reziduiranih mreža. Neka je $\mathcal{A} = \prod_{i\in I} \mathcal{L}_i$ i A formula koja je $\mathcal{L}$-tautologija za sve linearno uređene BL-algebre. A je onda $\mathcal{L}_i$-tautologija, za sve $i \in I$, pa zbog (1) $\mathcal{L}_i$ zadovoljava identitet $A^\bullet = 1$, za sve $i \in I$. Odavde sledi da i $\mathcal{A}$ zadovoljava identitet $A^\bullet = 1$, zbog potapanja ovaj identitet važi i u algebri $\mathcal{L}$, što povlači da je $e(A) = 1$ za svaku $\mathcal{L}$-interpretaciju e. Dakle, A je $\mathcal{L}$-tautologija, za sve BL-algebre $\mathcal{L}$.

□

Teorema 4.74 (Kompletnost BL-logike) *BL-logika je kompletna, tj. za svaku formulu A sledeća tri uslova su ekvivalentna:*

1. *A je dokaziva u BL ($\vdash_{BL} A$);*
2. *za svaku linearno uređenu BL-algebru $\mathcal{L}$, A je $\mathcal{L}$-tautologija;*
3. *za svaku BL-algebru $\mathcal{L}$, A je $\mathcal{L}$-tautologija.*

Dokaz.
($1 \Rightarrow 2$): Iz teoreme pouzdanosti BL-logike, znamo da iz (1) sledi da je A $\mathcal{L}$-tautologija za svaku BL-algebru $\mathcal{L}$. Samim tim, A je $\mathcal{L}$-tautologija i za svaku

linearno uređenu BL-algebru $\mathcal{L}$.

($2 \Rightarrow 3$): Prethodno tvrđenje (2).

($3 \Rightarrow 1$): Pretpostavimo da je A $\mathcal{L}$-tautologija za svaku BL-algebru $\mathcal{L}$. Pokazali smo da je algebra $\mathcal{L}_{BL}$ klasa ekvivalentnih formula u BL, BL-algebra. Dakle, A je $\mathcal{L}_{BL}$-tautologija. Specijalno, neka je $e(p_i) = [p_i]_{BL}$ za sve iskazne promenljive. Tada je $e(A) = [A]_{BL} = [\overline{1}]_{BL}$, što je ekvivalentno sa $\vdash_{BL} A \leftrightarrow \overline{1}$, odnosno sa $\vdash_{BL} A$.

□

Na kraju napomenimo da se teorema kompletnosti može uopštiti. Definišimo sledeće:

Definicija 4.75 1. ***Šema aksioma*** *data formulom $\Phi(p_1, p_2, ..., p_n)$ je skup svih formula $\Phi(A_1, A_2, ..., A_n)$ dobijenih supstitucijom p_i sa A_i $(i = 1, ..., n)$ u $\Phi(p_1, p_2, ..., p_n)$.*

2. *Sistem $\mathcal{C}$ je **šematsko proširenje** od BL, ako je dobijen dodavanjem (konačno ili beskonačno mnogo) šema aksioma aksiomama BL. (Pravilo dedukcije ostaje modus ponens).*

3. *Neka je $\mathcal{C}$ šematsko proširenje od BL i neka je $\mathcal{L}$ BL-algebra. $\mathcal{L}$ je **$\mathcal{C}$-algebra** ako su sve aksiome od $\mathcal{C}$ $\mathcal{L}$-tautologije.*

Teorema 4.76 *Neka je $\mathcal{C}$ šematsko proširenje od BL i neka je A formula. Sledeći uslovi su ekvivalentni:*

1. *A je dokaziva iz $\mathcal{C}$;*

2. *A je $\mathcal{L}$-tautologija za svaku linearno uređenu $\mathcal{C}$-algebru $\mathcal{L}$;*

3. *A je $\mathcal{L}$-tautologija za svaku $\mathcal{C}$-algebru $\mathcal{L}$.*

Dokaz navedene uopštene teoreme kompletnosti može se naći u [7].

Prirodno, nameće nam se pitanje jake kompletnosti koja dovodi u vezu dokazivost formule u nekoj teoriji sistema $\mathcal{C}$ i validnost te formule u svakom modelu ove teorije. Hájek je u [7] dokazao sledeće:

Teorema 4.77 *Neka je T teorija nad $\mathcal{C}$. Za svaku formulu A važi:*

$$T \vdash_{\mathcal{C}} A \text{ akko } T \models_{\mathcal{C}} A.$$

Ova teorema pokazuje koliko je pojam BL-logike opravdan i značajan.

Zaključak

Na kraju samog rada sumirajmo prethodno izloženu teoriju.

Pokazali smo da su BL-algebre, kao specijalne reziduirane mreže adekvatna algebraizacija BL-logike. BL-logika je kompletna u odnosu na BL-algebre. Za dokaz kompletnosti ključnu ulogu odigrala je teorema reprezentacije po kojoj je svaka BL-algebra izomorfna poddirektnom proizvodu linearno uređenih BL-algebri kao i činjenica da je Lindenbaum-Tarskijeva algebra BL-logike u odnosu na bilo koju teoriju T uvek BL-algebra.

Pokazali smo da svaka neprekidna t-norma na $[0,1]$ određuje BL-algebru. Nazovimo sve algebre određene neprekidnim t-normama **t-algebre**. Formulu A nazivamo **t-tautologijom**, ako je $\mathcal{L}$-tautologija za svaku t-algebru $\mathcal{L}$. Jasno, ako je $\vdash_{BL} A$, onda je A t-tautologija. Pojavljuje se interesantan problem− t-kompletnost sistema BL. Da li je svaka t-tautologija dokaziva u BL? Znamo da je svaka t-tautologija dokaziva u BL, ako je BL-tautologija, tj. ako je $\mathcal{L}$-tautologija za svaku BL-algebru $\mathcal{L}$. Dakle, postavlja se pitanje da li je BL kompletna aksiomatizacija za presek svih logika $PC(*)$, gde je $*$ neprekidna t-norma. Da li se može pronaći formula koja je t-tautologija, a da u nekoj BL-algebri $\mathcal{L}$ nije $\mathcal{L}$-tautologija? Ovaj problem je predmet intenzivnog istraživanja. Postoji proširenje od BL koje je kompletno u odnosu na t-tautologije, ali nije poznato da li su dodate aksiome dokazive u BL.

Literatura

[1] Bergmann, M. *An introduction to Many-Valued and Fuzzy Logic*, Cambridge University Press, 2008.

[2] Bolc, L., Borowik, P. *Many-Valued Logics 1, Theoretical Foundations*, Springer-Verlag, 1992.

[3] Bělohlávek, R. *Fuzzy Relational Systems*, Kluwer Academic/Plenum Publishers, New York, 2002.

[4] Cintula, P. *Short note: on the redundancy of axiom (A3) in BL and MTL*, Soft Computing - A Fusion of Foundations, Methodologies and Applications, Volume 9, Number 12, Springer-Verlag, 2005.

[5] Fodor, J., Roubens, M. *Fuzzy Preference Modelling and Multicriteria Decision Support*, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1994.

[6] Gottwald, S. *Many-Valued Logic and Fuzzy Set Theory*, in: *Mathematics od Fuzzy Sets, Logic, Topology, and Measure Theory*, Kluwer Academic Publishers, 5-89, 1999.

[7] Hájek, P. *Metamathematics of Fuzzy Logic*, Kluwer Academic Publishers, 1998.

[8] Madarász, Sz. R. *Od skupova do univerzalnih algebri*, Univerzitet u Novom Sadu, Novi Sad, 2006.

[9] Menger, K. *Selected Papers in Logic and Foundations, Didactics, Economics*, Reidel, Dordrecht, 1979.

[10] Schweiger, B., Sklar, A. *Statistical metric spaces*, Pacific Journal of Mathematics 10, 313-334, 1960.

[11] Smets, P., Margez, P. *Implication in fuzzy logic*, Internat. J. Approx. Reasoning 1, 327-347, 1987.

[12] Sugeno, M. *Fuzzy measures and fuzzy integrals*, in: *Fuzzy Automata and Decision Processes* , North-Holland Publ. Comp., Amsterdam, 89-102, 1977.

[13] Turunen, E. *Mathematics Behind Fuzzy Logic*, Physica-Verlag, A Springer-Verlag Company, 1999.

[14] Ward, M., Dilworth, R. P. *Residuated lattices*, American Mathematical Society 45, 335-354, 1939.

Biografija

Irena Miščević rođena je 1.1.1991. godine u Virovitici, Republika Hrvatska. Usled ratnih dešavanja seli se u Rumu. Osnovu školu „Zmaj Jova Jovanović" u Rumi, završila je 2006. godine kao nosilac Vukove diplome. Pohađala je Gimnaziju „Stevan Puzić" u Rumi, prirodno-matematički smer. Istu je završila 2010. godine kao vukovac. Potom je upisala osnovne akademske studije matematike na Departmanu za matematiku i informatiku, Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu, smer Diplomirani profesor matematike. Diplomirala je maja 2015. godine sa prosečnom ocenom 9.58. Master studije upisala je iste godine na istom fakultetu, smer Master profesor matematike (MP). Položila je sve ispite predviđene planom i programom sa prosečnom ocenom 9.65 i time stekla uslov za odbranu ovog master rada.

Od septembra 2016. godine zaposlena je na Fakultetu tehničkih nauka pri katedri za matematiku, kao saradnik u nastavi.

Novi Sad, septembar 2018. Irena Miščević

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:
RBR
Identifikacioni broj:
IBR
Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija
TD
Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal
TZ
Vrsta rada: Master rad
VR
Autor: Irena Miščević
AU
Mentor: dr Rozália Sz. Madarász
MN
Naslov rada: Iskazne logike zasnovane na BL-algebrama
NR
Jezik publikacije: srpski (latinica)
JP
Jezik izvoda: srpski i engleski
JI
Zemlja publikovanja: Srbija
ZP
Uže geografsko područje: Vojvodina
UGP
Godina: 2018.
GO
Izdavač: Autorski reprint
IZ
Mesto i adresa: Novi Sad, Departman za matematiku i informatiku, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, Trg Dositeja Obradovića 4
MA
Fizički opis rada: 4 glava/56 strana/14 referenci/0 tabela/0 slika/0 grafika/ 0 priloga
FO
Naučna oblast: Matematika
NO
Naučna disciplina: Algebra i Matematička Logika

ND
Predmetna odrednica/ ključne reči: viševrednosna logika, BL-algebra, BL-logika, Teorema dedukcije, kompletnost, Lindenbaum-Tarski algebra
PO
UDK:
Čuva se: Biblioteka Departmana za matematiku i informatiku Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta u Novom Sadu
ČU
Važna napomena:
VN

Izvod: Tema ovog master rada je viševrednosna logika zasnovana na BL-algebrama. Na početku dajemo pregled istorijskog razvoja ideje o logikama sa više istinitosnih vrednosti. Zatim, dajemo pregled najvažnijih pojmova koji opisuju sintaksu i semantiku logičkih sistema. Predstavili smo karakteristične osobine najvažnijih iskaznih veznika. Konačno, uvodimo pojam BL-algebre i BL-logike. Prvo definišemo familiju iskaznih računa $PC(*)$. Interpretacija se vrši u obogaćenoj mreži $\mathcal{L}(*)$. Izdvajanjem najvažnijih osobina algebarske strukture $\mathcal{L}(*)$ dolazimo do pojma reziduirane mreže, odnosno BL- algebre, kao specijalne reziduirane mreže. BL-logika se definiše kao specijalni deduktivni sistem sa sedam aksioma i jednim pravilom izvođenja. Na kraju, dokazujemo da je BL-logika kompletna u odnosu na BL-algebre.
IZ

Datum prihvatanja teme od strane NN veća: 25.08.2017.
DP
Datum odbrane:
DO
Članovi komisije:
KO
Predsednik: dr Ivica Bošnjak, vanredni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu
Član: dr Rozália Sz. Madarász, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu
Član: dr Boris Šobot, vanredni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCES
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:
ANO
Identification number:
INO
Ducument type: Monograph type
DT
Type of record: Printed text
TR
Contents code: Master's thesis
CC
Author: Irena Miščević
AU
Mentor: Rozália Sz. Madarász, Ph.D.
MN
Title: Propositional logics based on BL-algebras
TI
Language of text: Serbian (latin)
LT
Language of abstract: Serbian and English
LA
Country of publication: Republic of Serbia
CP
Locality of publication: Vojvodina
LP
Publication year: 2018.
PY
Publisher: Author's reprint
PB
Publication place: Novi Sad, Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science, University of Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4
PP
Physical description: 4 chapters/56 pages/14 references/0 tables/0 pictures/ 0 graphs/0 appendixes
PD
Scientific field: Mathematics
SF
Scientific discipline: Algebra and Mathematical Logic

SD
Subject/ Key words: many-valued logic, BL-algebra, BL-logic, Deduction theorem, completeness, Lindenbaum-Tarski algebra
S/KW
UC:
Holding data: The Library of the Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Sciences, University of Novi Sad
HD
Note:
N

Abstract: The topic of this Master's Thesis is many-valued propositional logic based on BL-algebras. In the beginning, we review the historical development of the idea of the logic with many truth values. Then, we review the most important terms which describe syntax and semantics of logic systems. We also show the characteristic properties of some representative propositional connectives. Finally, we introduce BL-algebras and BL-logic. First, we define a family of propositional calculus $PC(*)$. Interpretation is done in enriched lattice $\mathcal{L}(*)$. Singling out some of the most important properties of this algebraic stucture $\mathcal{L}(*)$, we obtain the concept of residuated lattice and BL-algebra, as a special residuated lattice. BL-logic is defined as a special deductive system with seven axioms and one deduction rule. In the end, we prove that BL-logic is complete in regard to BL-algebras.
AB

Accepted by the Scientific Board on: 25/08/2017
ASB
Defended on:
DE
Defend board:
DB
Chair: Ivica Bošnjak, Ph.D., Associate Professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad
Member: Rozália Sz. Madarász, Ph.D., Full Professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad
Member: Boris Šobot, Ph.D., Associate Professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad