**Univerzitet u Novom Sadu**
**Prirodno – matematički fakultet**
**Departman za matematiku i informatiku**

**Zorica Borčić**

# Snaga formalnih sistema

**Diplomski rad**

**Novi Sad, 2009.**

# Predgovor

Matematika - to je zatvoreni mikrosvet koji ima veliku sposobnost odražavanja i modeliranja svih procesa mišljenja i verovatno celokupne nauke uopšte. Ona je oduvek za čovečanstvo bila velika vrednost, a njena korist neprestano raste. Ne treba ni pokušavati dati definiciju matematike, jer bismo tada matematiku trebali smestiti u neke okvire. Zanimljivo pitanje je, u kojoj je meri progres u matematici u vezi sa „kreativnim razmišljanjem“? Drugim rečima, da li je izbor aksioma, definicija i problema determinisan svetom koji nas okružuje, a koji mi percipiramo svojim čulima, ili su pak te aksiome, definicije i problemi slobodna tvorevina ljudskog uma?

Matematika se ponekad definiše kao nauka o izvođenjima nužnih posledica. No, kakve su to posledice? Puki lanac silogizama- to još nije matematika. Na neki način biramo formulacije koje koncizno zahvataju široku klasu specijalnih slučajeva, a za dokaz se zahteva elegancija. Znači, metoda sadrži u sebi i nešto više od same logike, uključene u dedukciji. Kroz vekove se iskristalizovalo gledište da u matematici nije važno šta pojedini objekat predstavlja, već koje i kakve tvrdnje su o tom objektu dopustive. Čuveno Hilbertovo delo *„Osnovi geometrije“* započinje rečenicom: “Imamo tri vrste objekata; objekti prve vrste- tačke, objekti druge vrste- prave i objekti treće vrste- ravni.“ Iako možemo uspešno operisati nedefinisanim objektima i pojmovima, ti su objekti i pojmovi ukorenjeni u jasan fizički svet. Fizičke pojave sugerišu, pa čak i diktiraju prvobitne aksiome i pod uticajem iste te fizičke realnosti, mi formulišemo pitanja i probleme.

U ovom radu bavimo se problemom formalizacije i aksiomatizacije u matematici. Možda se u budućnosti nijedan konačni sistem aksioma neće tretirati kao definitivni i krajnji. Naprotiv, slično razvitku živog bića, postepeno će nastajati nove aksiome. Sistem aksioma će se, verovatno, razvijati tako reći „genetički“- na osnovu aksioma koje već postoje, a u skladu sa radovima matematičara na njihovim posledicama. Takođe možemo reći da nijedan od dosadašnjih formalnih sistema nije adekvatno utvrdio predstavu o beskonačnosti, koje se matematičari neprestano pridržavaju.

Rad se sastoji od sedam glava. Prva glava se bavi osnovim pojmovima u formalnim teorijama, u drugoj glavi temeljno je izložena sintaksa i semantika iskazne logike, zaključno sa teoremom kompaktnosti i kompletnosti za iskazni račun. Treća i četvrta glava su posvećene predikatskoj logici, i u njima su redom izložene sintaksa i semantika predikatske logike, dok je u petoj glavi predikatski račun izložen kao formalna teorija. Šesta glava se bavi problemom snage formalnih sistema, uz teoremu Löwnheim-Skolem-Tarskog o beskonačnim modelima.U sedmoj glavi dajemo primer proširenja logike prvog reda novim kvantifikatorom.

Napomenimo da su završeci dokaza lema i teorema označeni simbolom „■".

Autor bi, na kraju, želeo da se zahvali osobama čije su ideje i sugestije značajno pomogle poboljšanju ovog diplomskog rada. To su dr Rozàlia Sz. Madaràsz, mentor za izradu ovog rada, kao i predsednik i član, respektivno, komisije za odbranu diplomskog rada, dr Branimir Šešelja i dr Siniša Crvenković.

# Sadržaj

# Uvod

Na razvoj evropske matematike najveći uticaj imala je grčka matematika. Stari Grci su bili prvi koji su sebi, svesni toga šta time čine, postavili zadatak da sva pređašnja matematička znanja skupe i povežu u skladan sistem unutar kojeg će svaka formula i teorema biti dokazana tj. strogo logički izvedena kao posledica nekih primarnih, osnovnih i nediskutabilnih polaznih pretpostavki. Jedna od najvećih zasluga starih Grka je uvođenje dokaza u matematiku. Time se matematika, koja je do tada bila pretežno empirijska nauka, pojavljuje kao deduktivna nauka. Za vreme zlatnog doba filozofije, Aristotel prvi formuliše pojam formalne teorije koja po njemu mora sadržati aksiome i postulate, dok se ostala tvrđenja izvode pomoću pravila izvođenja. Glavna teza Aristotelove silogistike je bila da se svako korektno rasuđivanje može svesti na sistematičnu primenu ne velikog broja određenih pravila, koja inače ne zavise od prirode objekata na koje se rasuđivanje odnosi. Danas je Aristotelova teorija silogizama samo specijalan deo matematičke logike, a u periodu od XVIII do XIX veka smatrala se obaveznim delom obrazovanja.

Da su stari Grci prvi koji su zaslužni za početak formalizacije u matematici, dokazuje jedan od najvećih spomenika matematike - Euklidovi „*Elementi*“. Euklid je, u periodu od IV do V veka pre nove ere stvorio delo u kojem je sva dotadašnja znanja iz matematike sistematizovao u okviru strogog aksiomatskog sistema. U 13 knjiga je kroz definicije, aksiome, postulate i teoreme razvijena čitava matematika tog vremena: planimetrija, teorija brojeva u geometrijskoj formi, kvadratna iracionalnost i stereometrija. „*Elementi*“ su vekovima bili vrhunac sinteze matematičke misli, sve do Descartesove analitičke geometrije kao jedne od najrazrađenijih unifikacija algebre i geometrije. Euklidov model rigoroznosti dugo je bio neprikosnoven. No, kako su matematičari nailazili na sve veće probleme, njihov kritički smisao se izoštravao a logički smisao bivao je sve suptilniji i prefinjeniji.

Nakon mračnog srednjeg veka, kada razvoj matematike i nauke uopšte stagnira, sredinom XIX veka započinje nova era u matematici. Ona je karakterisana sve očiglednijim nepouzdanjem u intuiciju ako nije potkrepljena dokazom, i sve većim pouzdanjem u logiku. Kao rezultat toga, matematika je postajala sve egzaktnija i formalnija. Ništa nije promaklo temeljnoj proveri. Čak je i Euklidov rad bio podvrgnut temeljnoj logičkoj analizi, koja je pokazala mnoge nedostatke. Na primer, Euklid je ispustio čitavu grupu aksioma, neophodnih za formalizaciju pojma „između“- takozvanih aksioma poretka. Potpuniju aksiomatizaciju geometrije predložio je D. Hilbert 1899. godine u svojoj čuvenoj knjizi „*Osnovi geometrije*“. Čak i Hilbertova aksiomatika unosi izvesnu zabrinutost među stroge logičare, u prvom redu zbog aksiome neprekidnosti. Tom aksiomom je ustanovljena obostrano jednoznačna korespondencija između tačaka pravca i realnih brojeva, kod koje se čuva poredak, unoseći na taj način u geometriju sve teškoće vezane sa neprebrojivošću realnih brojeva.

Sredinom XIX veka matematički materijal se toliko nagomilao da je došlo krajnje vreme za sintezu i preispitivanje osnova. Tako se rodila matematička teorija skupova i matematička logika. Matematičari postaju mnogo svesniji problema *strogosti* pri uvođenju novih pojmova pri konstrukciji dokaza. Ispitivanje osnova analize (tj. infinitezimalnog računa), i pokušaji da se pronikne u smisao sistema realnih brojeva i opštih svojstava funkcija, doveli su do osnovnih problema moderne teorije skupova i moderne matematičke logike. Veliki analitičari i geometri posle Newtona (npr. Bernoulli, Euler, D'Alambert, Lagrange) imali su gotovo nepogrešiv instinkt u prezentovanju egzaktnih teorema i dokaza, bez čvrstog oslonca na formalne sisteme i ne pridržavajući se striktno standardne logičke stogosti. Cantor je skupove uveo neformalno i nije se koristio nikakvom *aksiomatikom* u formulisanju njihovih svojstava. Osnovna ideja kojom se koristio bila je ideja obostrano jednoznačnog pridruživanja. On je uočio da skupovi celih i racionalnih brojeva imaju istu kardinalnost tj. da među njima posoje obostrano jednoznačna pridruživanja. Tad je usledio najvažniji rezultat: kardinalnost kontinuuma realnih brojeva veća je od kardinalnosti prebrojivog skupa. Cantor je došao i do drugih važnih otkrića, među kojima kulminira formulacija problema kontinuuma. Taj problem zove se hipoteza kontinuuma (CH) i u grubim crtama glasi: da li postoji beskonačan skup, čija je kardinalnost veća od kardinalnosti prebrojivog skupa a manja od kardinalnosti kontinuuma? Osim fundamentalnih Cantorovih radova, postojali su i neki drugi motivi za razvitak aksiomatske metode. Otkriće i razvoj neeuklidske geometrije dali su novi impuls aksiomatskom pristupu geometrijskim sistemima. Već spomenuti Hilbertovi radovi dali su nov zamah aksiomatskoj metodi, a Peanovi radovi na aksiomatizaciji aritmetike i Booleovi na aksiomatizaciji algebre skupova, tekli su uporedo sa aksiomatskim istraživanjima osnova geometrije. Nakon izgradnje teorije skupova bilo je nužno razmisliti o izgradnji sistema aksioma čitave matematike. Upravo su elegancija i uspeh aksiomatske metode u pojedinim stranama matematike hrabrili naučnike u tim pokušajima. I zaista, na ta prva istraživanja kao na primer na Whiteheadova i Russellova istraživanja u radu „*Principia Mathematica*" (1910-1913), uveliko su uticala iskustva sa aksiomatskim istraživanjima u pojedinim delovima geometrije, aritmetike i algebre.

Svrha velikog i ambicioznog Hilbertovog programa bila je da postavi aksiomatske osnove na kojima bi se moglo temeljiti svako istraživanje u matematici. Hilbertov program je ulivao nadu u egzistenciju i potpunost nekog sveobuhvatnog sistema za čitavu matematiku. Radovima Bernaysa, Fraenkela i von Neumanna položeni su temelji aksiomatskog sistema teorije skupova i matematičke logike. Stoga je bilo razumno verovati da su svi smisleni problemi u tim sistemima rešivi.

Tada je 1931. godine K.Gödel objavio članak *„O formalno neodlučivim iskazima u Principia Mathematica i srodnim sistemima I“*. Njegov zaključak je, u grubim crtama, da u svakom dovoljno bogatom sistemu aksioma (naime, tako bogatom da uključuje aritmetiku), postoje iskazi koji imaju smisla ali su istovremeno i neodlučivi u tom sistemu. Osim toga, za neke od tih iskaza možemo pokazati da vrede, ili da su „istiniti“, jer se pojavljuju u obliku tvrdnji o tome da svi celi brojevi imaju neko aritmetičko svojstvo, što se može proveriti za svaki konkretan broj. Gödel je pokazao da je svaki dovoljno bogati sistem aksioma nepotpun i da se ne može upotpuniti dodavanjem konačnog broja novih aksioma. Gödel je prvo numerisao sve dopustive matematičke iskaze, u kojima postoje propisani simboli i pravila operacija datog sistema. Ti iskazi čine prebrojivu klasu, pa je Gödel svakom od njih pridružio neki celi broj. Na taj način bi svaki matematički iskaz bio sveden na neku tvrdnju o celim brojevima. Zatim je u okvirima datog sistema formulisao iskaz, koji nije moguće dokazati ni opovrgnuti sredstvima tog sistema. (Ta teorema je, naravno, primenljiva samo na konzistentne (neprotivrečne) sisteme, u kojima se ne mogu dokazati kontradikcije kao na primer 1 = 0.) Da malo potpunije objasnimo ideje koje leže u osnovi Gödelove konstrukcije, moramo prvo objasniti pojam formalnog sistema. Formalni sistem se sastoji od konačnog skupa simbola i konačnog skupa pravila po kojima se ti simboli mogu kombinovati u formule ili iskaze. Neke od tih iskaza smatramo aksiomama, a primenama pravila sistema dobijamo nove dokazive iskaze (tvrdnje) u tom sistemu. Dokaz datog iskaza (ili formule) jeste konačan lanac iskaza koji počinje nekom od aksioma, a završava tim iskazom. Svaka karika u tom lancu je ili aksioma ili se dobija pomoću pravila tog sistema iz prethodnih iskaza tog lanca. Međutim, iskaz koji govori o tome tvori li neki lanac formula (ili ne tvori) dokaz neke formule, nije više iskaz datog formalnog sistema. To je iskaz *o sistemu* i takvi se iskazi obično nazivaju *metamatematičkim*. Značajna Gödelova zamisao bila je da prevede metamatematičke iskaze u aritmetičke, da ih tako reći odrazi unutar formalnog sistema. Budući da se sada matematički i metamatematički iskazi mogu slobodno kombinovati unutar sistema, to će pitanja, koja u običnom sledu događaja dovode do paradoksa, tako odražena preći u *neodlučive iskaze*. Generalno, Gödelove konstrukcije omogućavaju iskaze *unutar sistema*, a oni dopuštaju interpretacije u kojima se govori *o sistemu*. Gödel je pokazao kako se takvi paradoksi mogu prevesti u neodlučive iskaze.

Za kraj još pomenimo da značaj formalnih sistema verovatno nikada nije bio veći nego danas. Razlog za to je njihova uloga u drugim matematičkim disciplinama, posebno u računarstvu.

# 1.Formalne teorije

## 1.1 MU- zagonetka

Za početak ćemo razmotriti primer, koji će nas u priču o formalnim sistemima uvesti na pomalo neformalan način. Primer je koncipiran u vidu zagonetke: "Može li se dobiti MU?" Bavićemo se takozvanim MIU- formalnim sistemom. On se sastoji od tri slova, M, I i U. Tada su reči datog sistema upravo one koje se sastoje od pomenutih slova, na primer:

MU
UIM
MUMUMU
MUIUMIIUMI.

Međutim, iako su ovo reči MIU- sistema, za početak nam je data samo jedna reč, MI. Naš zadatak je da, primenom određenih pravila sistema na datu reč, dobijemo reč MU. Nove reči sistema možemo kreirati pomoću sledećih pravila:

**Pravilo 1.** Posmatrajmo reč čije je zadnje slovo I. Tada možemo na kraj te reči dodati slovo U.
Napomenimo da su slova u reči fiksirana, npr. MI i IM su dve različite reči.

**Pravilo 2.** Pretpostavimo da imamo reč M*x*. Tada možemo dobiti reč M*xx*.

Primeri: od MIU možemo dobiti MIUIU
od MUM možemo dobiti MUMUM
od MU možemo dobiti MUU.

Prema tome, zaključujemo da *x* označava bilo koji niz slova; ali kada je određeno koji niz označava- to se ne menja dok ponovo ne upotrebimo pravilo 2. Tek tada je moguće za *x* izabrati novi niz. Obratimo pažnju na poslednji primer koji pokazuje kako, ako jednom dobijemo MU onda možemo dobiti novi niz, MUU. Međutim, prvo moramo dobiti niz MU.

**Pravilo 3.** Ako se u reči pojavi III, možemo dobiti novu reč koristeći U umesto III.

Primeri: od UMIIIMU dobijamo UMUMU
od MIIII dobijamo MIU ili MUI
od IIMII ne možemo dobiti novi niz koristeći ovo pravilo
od MIII dobijamo MU.

Napomenimo da nijedno pravilo ne važi u obrnutom smeru: od MU ne može se dobiti MIII. Pravila su jednosmerna.

**Pravilo 4.** Ako se u reči pojavi UU, taj deo reči se može ukloniti.

Primeri: od UUU dobijamo U
od MUUUIII dobijamo MUIII.

U ovom primeru je bitnije traganje za odgovorom umesto samog odgovora. Reči koje se dobijaju primenom datih pravila zovu se ***teoreme***. Na početku je bila data proizvoljna teorema, MI, a takva "proizvoljna" teorema se zove ***aksioma***. Formalni sistem može imati nula, jednu, više ili beskonačno mnogo aksioma.

Svaki formalni sistem ima svoja pravila, kao što i MIU- sistem ima svoja 4 pravila. Ova pravila se nazivaju ***pravila izvođenja***.

Poslednji termin koji uvodimo u ovoj fazi je ***izvođenje***. Sada navodimo način dobijanja teoreme MUIIU:

| | |
|---|---|
| MI | aksioma |
| MII | pravilo II |
| MIIII | pravilo II |

| | |
|---|---|
| MIIIIU | pravilo I |
| MUIU | pravilo III |
| MUIUUIU | pravilo II |
| MUIIU | pravilo IV |

Dobijanje teoreme je eksplicitna, red po red demonstracija kako doći do teoreme primenom određenog redosleda pravila formalnog sistema. MU-zagonetka se može rešavati nasumičnim dobijanjem određenog broja teorema. Tada se počinju primećivati određene osobine dobijenih teorema. Na primer, primetićemo da će sve teoreme počinjati slovom M. Posle nekoliko pokušaja primećuje se „pattern“, on postaje očigledan samim posmatranjem pravila. Naime, uočićemo da svaka nova teorema nasleđuje prvo slovo od prethodne teoreme. Tako konačno stižemo do inicijalne aksiome, od koje sve ostale teoreme nasleđuju prvo slovo- MI. Time je dokazano da će sve teoreme MIU- sistema počinjati slovom M.

Zanimljivo je uočiti razliku između ponašanja ljudi i računara u rešavanju date zagonetke. Jasno je da bi bilo moguće programirati računar da generiše teoremu za teoremom MIU- sistema sa naredbom da sa radom prestane samo ako uspe generisati U. Međutim, on u tom slučaju nikad ne bi prestao sa generisanjem teorema. Ali, čovek bi posle nekog vremena primetio da se ne može rešiti inicijalnog slova M - tj. shvatio bi da postoji problem. Tu je razlika između čoveka i mašine: čovek će uvek imati neka zapažanja o onome što čini pri rešavanju problema, dok računar ne može primetiti neke očigledne činjenice o onome što radi. Primetimo da se ovde ne tvrdi da su sve mašine nesposobne za neka delikatnija zapažanja, niti da su svi ljudi u potpunosti sposobni jasno primetiti važne činjenice pri rešavanju problema. Ali, mašina može biti programirana da bude apsolutno nesposobna za zapažanje- a čovek ne može. Zato, ako neko kaže da se zadatak treba obaviti „mehanički“, to ne znači da ljudi nisu sposobni da ga obave već da ga samo mašina može rešavati iznova i iznova, a da ne primeti problem.

Primetimo da ova zagonetka uključuje pravila dve potpuno različite tendencije - pravila produživanja i pravila skraćivanja reči. Pravila 1. i 2. dozvoljavaju povećanje dužine reči (naravno na veoma rigidne načine), a druga dva pravila skraćuju reči. Deluje da postoji beskonačno mnogo mogućih redosleda primene ovih pravila i to je ono što u početku ukazuje na mogućnost dobijanja reči MU. Možemo povećavati reč do proizvoljne dužine, pa je onda skraćivati dok ne ostanu dva simbola. Ili, možemo reč naizmenično produžavati i skraćivati dok ne dobijemo U. No, nijedan od tih postupaka nam ne garantuje da možemo dobiti reč MU. Štaviše, videćemo da se MU ne može dobiti, iako problemi dobijanja U i MU deluju različiti.

Očigledno je da se ne može proizvesti teorema U, jer ta reč ne počinje slovom M. Bilo bi veoma pogodno poznavati jednostavan način koji bi detektovao reči koje nisu teoreme. Slede koraci koje ćemo primenjivati, sa ciljem dobijanja reči MU:

Korak 1: Primenimo sva dozvoljena pravila na aksiomu MI. To nam daje dve nove teoreme: MIU, MII.

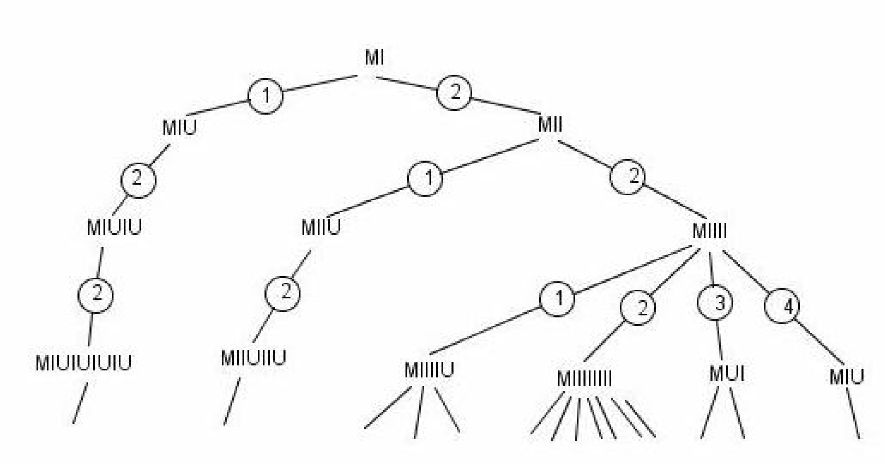
Korak 2: Primenimo sva dozvoljena pravila na teoreme dobijene posle prvog koraka. Dobijamo sledeće teoreme: MIIU, MIUIU, MIIII.

Korak 3: Primenimo sva dozvoljena pravila na teoreme dobijene posle drugog koraka. Time dobijamo pet novih teorema: MIIIIU, MIIUIIU, MIUIUIUIU, MIIIIIIII, MUI, itd.

Ovaj metod će pre ili kasnije proizvesti sve teoreme, jer se sva pravila primenjuju po svim mogućim redosledima (vidi sliku). Pomenute alternacije produživanja i skraćivanja će se vremenom pojaviti. Međutim, nije očigledno koliko koraka treba primeniti da se pojavi tražena teorema.

Redosled teorema sa slike nije baš koristan ako želimo izvesti neku konkretnu teoremu, a pri tome i ne znamo može li se izvesti. Zato sada predlažemo „test za otkrivanje teorema": primenjujemo pravila dok se tražena teorema ne pojavi; kada se to dogodi, tada je u pitanju teorema - a ako se nikada ne pojavi, onda to nije teorema. Problem je u tome što postoji mogućnost beskonačnog primenjivanja pravila dok ne dobijemo odgovor. Ovo nas dovodi do ključnog momenta u vezi sa „testom za teoreme". Od primarne je važnosti da test garantuje da ćemo u konačnom vremenskom intervalu dobiti odgovor. Ako imamo test za otkrivanje teorema koji deluje u konačnom vremenskom intervalu, onda se taj test zove ***procedura odlučivanja*** za dati formalni sistem.

Kada imamo proceduru odlučivanja, onda imamo i vrlo konkretnu karakterizaciju prirode teorema u sistemu. S druge strane, deluje da same aksiome i pravila formalnog sistema omogućuju kompletnu karakterizaciju teorema u sistemu. Karakterizacija je interesantan problem, jer pravila i aksiome MIU-sistema *implicitno* karakterišu reči koje su teoreme. Još *implicitnije* karakterišu reči koje *nisu* teoreme. Ali implicitna karakterizacija nije dovoljna. Ako neko tvrdi da ima karakterizaciju *svih* teorema, ali mu je potrebno beskonačno mnogo vremena da bi izveo da neka konkretna reč nije teorema, onda karakterizacija nije




Slika 1.MU zagonetka

dovoljno konkretna.

Jedan od zahteva formalnih sistema je da set aksioma mora biti karakterisan procedurom odlučivanja. To znači da je bar na početku jasno šta su teoreme. Ali, tu se sada pokazuje razlika između seta aksioma i seta teorema: za aksiome uvek postoji procedura odlučivanja, a za teoreme ne mora uvek postojati.

Konačno, otkrijmo rešenje MU- zagonetke. Nemoguće je reč MI pretvoriti u MU primenjivanjem datih pravila. U ovom trenutku je važno primetiti da broj slova I u reči *nije deljiv* sa tri. Dokaz ove tvrdnje izvodimo indukcijom po broju primenjenih pravila.

*Indukcijska baza*. Data reč je aksioma MI. Ona sadrži jedno slovo I slova I u reči, a broj jedan nije deljiv sa tri.

*Indukcijska hipoteza*. Pretpostavimo da tvrđenje važi svako $l < k$.

*Indukcijski korak*. Dokažimo da tvrđenje važi za reč koja se dobije primenom $k + 1$- og pravila. Posmatrajmo reč dobijenu primenom $k$- tog pravila. Ako smo primenom $k$- tog pravila dobili reč koja završava slovom I, onda na nju u $k + 1$ – vom koraku možemo primeniti svako od četiri data pravila. Moguće je:

- Primenimo prvo pravilo. Tada na kraj reči dodajemo slovo U, čime se broj slova I u reči neće promeniti, dakle taj broj nije deljiv sa tri.
- Primenimo drugo pravilo. Tada se broj slova I u reči udvostručava, a udvostručavanjem boja koji nije deljiv sa tri ne dobijamo broj deljiv sa tri
- Primenimo treće pravilo. Tada se broj slova I smanjuje za tri a oduzimanjem broja tri od broja koji nije deljiv sa tri ne dobijamo broj deljiv sa tri.
- Primenimo četvrto pravilo. Ono nam dopušta da, ako se u reči pojavi UU, taj deo reči možemo ukloniti. Ovo pravilo ne menja broj slova I u reči, dakle broj slova I u reči opet nije deljiv sa tri.

Ako smo pak primenom $k$ – tog pravila dobili reč koja završava slovom U, onda je na nju moguće primeniti sva pravila osim prvog, a razmatranje je analogno prethodnom.

## 1.2 Osnovni pojmovi

**Definicija 1.2.1 Formalna teorija** je uređena četvorka gde je:

- $X$ neprazan skup simbola, zovemo ga **alfabetom**
- *Form* neprazan podskup skupa svih reči obrazovanih pomoću slova iz $X$, njegove elemente zovemo **formulama** (pri tome je dat efektivan postupak za odlučivanje da li je data reč nad azbukom $X$ formula ili ne)
- *Ax* neprazan podskup skupa *Form*, a njegovi elementi su **aksiome**
- $R$ konačan neprazan skup izvesnih relacija među elementima skupa *Form*, njegove elemente zovemo **pravilima izvođenja**; ako je $\alpha \in R$ neko pravilo izvođenja dužine $n$ i ako su formule $A_1, A_2, ..., A_{n-1}, A_n$ (tim redom) u relaciji $\alpha$ , onda pišemo:

$$\alpha = \frac{A_1, A_2, ..., A_{n-1}}{A_n}$$

i kažemo da je formula $A_n$ direktna posledica formula $A_1, A_2, ..., A_{n-1}$.

**Definicija 1.2.2** Formalna teorija se zove **aksiomatska** ako postoji algoritam za odlučivanje koja formula jeste, a koja nije aksioma.

**Definicija 1.2.3** Neka je $T = \langle X, Form, Ax, R \rangle$ neka formalna teorija. **Dokaz** u $T$ je svaki konačan niz formula $A_1, ..., A_n$ tako da je u tom nizu svaka formula $A_i$ ili aksioma te teorije ili sledi iz ranijih formula u tom nizu po nekom pravilu izvođenja iz *R*. Tada je niz $A_1, ..., A_n$ dokaz za formulu $A_i$.

**Definicija 1.2.4** Formula $A \in Form$ je **teorema** formalne teorije *T* ako postoji dokaz za $A$ u *T*. U tom slučaju pišemo $\vdash_T A$ ili $\vdash A$. Označimo sa $Th(T)$ skup svih teorema formalne teorije *T*, $Th(T) = \{ A \in Form : \vdash A \}$.

**Primer 1.2.1** Neka je data sledeća formalna teorija:

$X = \{a, b\}$
$Form$ - sve reči nad *X*
$Ax = \{a\}$
$R = \{\alpha\}, \alpha : \dfrac{x}{bx}, x \in Form$

Tada primenom pravila α na aksiomu a dobijamo $\dfrac{a}{ba}$ pa u sledećem koraku dobijamo $\dfrac{ba}{bba}$ itd. Konačno, teoreme date formalne teorije su $a, ba, bba, ..., \underbrace{b..bb}_{n}a, ...$.

**Primer 1.2.2** Neka je data formalna teorija iz Primera 1.1.1. Dokazi su sledeći nizovi formula:

1) $a$ ($a$ jeste konačan niz formula, i $a$ jeste aksioma)

2) $a, ba$ (konačan niz formula, $a$ je aksioma, $ba$ sledi iz 1 na osnovu pravila izvođenja)

3) $a, ba, bba, ...$

$\vdots$

Skup svih teorema date formalne teorije je $Th(T) = \{a, ba, ..., b...ba, ...\}$, tj. $Th(T) = \{b^n a : n \geq 0\}$, gde je $b^0 = \lambda$, $\lambda$ je prazna reč, $b^1 = b, ..., b^{n+1} = bb^n, n \geq 0$.

**Definicija 1.2.5** Za formalnu teoriju *T* kažemo da je **odlučiva** ako postoji algoritam koji za svaku formulu $A$ odlučuje da li je teorema te teorije ili nije.

**Definicija 1.2.6** (**Sintaktička posledica u formalnim teorijama**) Neka je $T = \langle X, Form, Ax, R \rangle$ formalna teorija. Neka $F \subseteq Form$, $A \in Form$. Kažemo da je $A$ **sintaktička posledica** od $\Phi$ ako postoji konačan niz formula iz *Form*, $A_1, ..., A_n \equiv A$, tako da je svaka formula u tom nizu:

1) aksioma ili
2) hipoteza iz skupa $\Phi$ ili
3) sledi iz ranijih formula u tom nizu po nekom pravilu izvođenja.

Tada pišemo $\Phi \vdash_T A$ ili $\Phi \vdash A$. Sa *Cons*($\Phi$) obeležimo skup svih sintaktičkih posledica skupa $\Phi$, *Cons*($\Phi$) = $\{A \in Form : \Phi \vdash A\}$. Skup formula $\Phi$ je **deduktivno zatvoren** ako *Cons*($\Phi$) = $\Phi$ tj. ako sadrži sve svoje posledice.

**Teorema 1.2.1** Neka je $T = \langle X, Form, Ax, R \rangle$ formalna teorija, i $F, F_1, F_2 \subseteq Form$. Tada važi sledeće:

1) $F \subseteq Cons(F)$
2) $F_1 \subseteq F_2 \Rightarrow Cons(F_1) \subseteq Cons(F_2)$
3) $Cons(Cons(F)) = Cons(F)$.

**Dokaz.**

1) Neka $A \in F$. Tada je dokazni niz iz *Φ* za $A$ baš $A$, odakle direktno sledi $F \vdash A$ tj. $A \in Cons(F)$.
2) Neka važi $F_1 \subseteq F_2$ i neka $A \in Cons(F_1)$. Tada postoji dokazni niz za $A$, $A_1,...,A_n \equiv A$, pri čemu je svaka formula $A_1,...,A_n$ ili aksioma ili hipoteza iz *Φ₁* ili sledi iz ranijih formula u nizu po nekom pravilu izvođenja. Zbog $F_1 \subseteq F_2$ je polazni dokazni niz i u *Φ₂*, pa stoga $A \in Cons(F_2)$.
3) $(\supseteq)$Označimo $Cons(F) = F'$. Tada $F' \subseteq Cons(F')$ važi zbog 1).

   $(\subseteq)$Označimo $Cons(F) = F'$. Neka $A \in Cons(F')$. Tada postoji dokazni niz iz *Φ'* za $A$, $A_1,...,A_n \equiv A$, pri čemu je svaka formula $A_1,...,A_n$ ili aksioma ili hipoteza iz *Φ'* ili sledi iz ranijih formula u nizu po nekom pravilu izvođenja. Treba konstruisati dokazni niz za $A$ iz *Φ*. Uradićemo sledeće: ako je neka formula $A_1,...,A_n$ aksioma, ostavimo je u nizu. Ako je ona iz $Cons(F) = F'$, to znači da za nju postoji dokazni niz iz *Φ* pa umesto te formule, u niz stavimo odgovarajući dokazni niz iz *Φ*. Ako smo, pak naišli na formulu koja sledi iz ranijih formula, ništa nije poremećeno. Time dobijamo da je svaka formula ili aksioma ili hipoteza iz *Φ* ili sledi iz ranijih formula u nizu po nekom pravilu izvođenja tj. $A \in Cons(F)$. ■

**Teorema 1.2.2 (Teorema kompaktnosti za formalne teorije)** Neka je $T = \langle X, Form, Ax, R \rangle$ formalna teorija, $F \in Form$, $A \in Form$. Tada *Φ* $\vdash A$ ($A$ se može dokazati iz *Φ*) akko postoji konačan skup $F_0 \subseteq F$ takav da je $F_0 \vdash A$.

**Dokaz.** $(\Leftarrow)$ Ovaj smer sledi trivijalno, on je direktna posledica prethodne teoreme (tvrđenje 2)).

$(\Rightarrow)$ Neka $\Phi \vdash A$. Tada postoji konačan niz formula iz $\Phi$, $A_1,\ldots,A_n \equiv A$, pri čemu je svaka formula $A_1,\ldots,A_n$ ili aksioma ili hipoteza iz $\Phi$ ili sledi iz ranijih formula u nizu po nekom pravilu izvođenja. Kako je pomenuti niz formula konačan, njih konačno mnogo pokupimo u jedan skup i nazovemo ga $\Phi_0$.

■

# 2. Iskazna logika

## 2.1 Iskazi i operacije sa njima

Iskazi su one rečenice o kojima ima smisla govoriti da li su tačne ili netačne. Na primer, rečenica "Zbir dva neparna prirodna broja je paran broj" jeste iskaz, i to tačan iskaz. Iskazi su samo one rečenice koje imaju svojstvo *biti tačan* (istinit) ili *biti netačan* (neistinit). Takođe kažemo da je iskaz rečenica koja ima jednu i samo jednu istinitosnu vrednost- biti tačan ili netačan. Za označavanje iskaza koristimo slova $p, q, r, \ldots$ ili $p_1, q_1, r_1, \ldots$ .

Od iskaza $p, q, r, \ldots$ koristeći tzv. *logičke veznike*: *ili, i, ako ... onda, ako i samo ako, nije* (redom uvodimo oznake za te veznike $\vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \neg$) dobijamo složene rečenice (iskaze). Ove veznike zovemo i logičkim operacijama, a nazivi su im redom: disjunkcija, konjunkcija, implikacija, ekvivalencija, negacija.

**Definicija 2.1.1** (operacija „*ili*“) **Disjunkcija** redom iskaza *p, q* jeste iskaz „*p* ili *q*“. Disjunkcija je netačan iskaz samo ako su i iskaz *p* i iskaz *q* netačni. U svim ostalim slučajevima disjunkcija je tačan iskaz. Disjunkciju „*p* ili *q*“ označavamo sa $p \vee q$ .

**Definicija 2.1.2** (operacija „*i*“) **Konjunkcija** redom iskaza *p, q* jeste iskaz „*p* i *q*“. Konjunkcija je tačan iskaz samo ako su i iskaz *p* i iskaz *q* tačni. U svim ostalim slučajevima disjunkcija je netačan iskaz. Konjunkciju „*p* i *q*“ označavamo sa $p \wedge q$ .

**Definicija 2.1.3** (operacija „*ako ... onda*“) **Implikacija** redom iskaza *p, q* jeste iskaz „ako *p*, onda *q*“. Implikacija je netačan iskaz samo ako je iskaz *p* tačan i iskaz *q* netačan. U svim ostalim slučajevima disjunkcija je tačan iskaz. Implikaciju „ako *p*, onda *q*“ označavamo sa $p \Rightarrow q$ .

Iskaz „ako *p*, onda *q*“ ima isto značenje kao i sledeće rečenice:

1. Iz *p* sledi *q*
2. *p* je dovoljan uslov za *q*
3. *q* je potreban uslov za *p*

4. *p*, samo ako *q*
5. antecedent *p* implicira konsekvent *q*.

**Definicija 2.1.4** (operacija *„ako i samo ako"* tj. *„akko"*) **Ekvivalencija** redom iskaza *p, q* jeste iskaz „*p* akko *q*". Ekvivalencija je tačan iskaz samo ako su i iskaz *p* i iskaz *q* tačni ili i iskaz *p* i iskaz *q* netačni. U svim ostalim slučajevima ekvivalencija je netačan iskaz. Ekvivalenciju „*p* akko *q*" označavamo sa $p \Leftrightarrow q$.

Iskaz „*p* akko *q*" ima isto značenje kao i sledeće rečenice:

1. *p* je ekvivalentno sa *q*
2. *p* je potreban i dovoljan uslov za *q*
3. ako *p* onda *q* i obratno.

**Definicija 2.1.5** (operacija *„nije"*) **Negacija** iskaza *p* jeste iskaz „nije *p*". Negacija iskaza *p* je tačan iskaz samo ako je iskaz *p* netačan, a netačan iskaz ako je iskaz *p* tačan. Negaciju „nije *p*" označavamo sa $\neg p$.

Definisane operacije su binarne, osim negacije koja je unarna operacija.

## 2.2 Iskazne formule

Iskazne formule su u opštem slučaju složene rečenice formirane od nekih polaznih iskaza pomoću logičkih veznika. Od posebnog je interesa određivanje istinitosnih vrednosti formule. Zato je u matematičkoj logici izgrađena posebna struktura tzv. iskazna algebra.

Od iskaza (rečenica) pomoću logičkih veznika pravimo nove složene rečenice (iskaze). Dalje, kako su te nove složene rečenice iskazi, to produžujući taj postupak formiramo sve složenije rečenice koje ovde nazivamo i *iskaznim formulama* ili kratko *formulama*.

Uočimo skup $\{p, q, r, ..., p_1, q_1, r_1, ..., p_n, q_n, r_n, ..., \vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \neg, (, )\}$ koji zovemo *alfabetom*. Pri tome simbole $p, q, r, ..., p_1, q_1, r_1, ..., p_n, q_n, r_n, ...$ zovemo iskaznim slovima, simbole $\vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \neg$ zovemo *logičkim veznicima* a simbole (, ) zovemo *pomoćnim znacima*.

**Definicija 2.2.1 Iskazne formule** ili **formule** definišemo rekurzivno na sledeći način:

1. Iskazna slova su formule
2. Ako su $A$ i $B$ formule, onda su i $(A \vee B)$, $(A \wedge B)$, $(A \Rightarrow B)$, $(A \Leftrightarrow B)$, $\neg A$ formule
3. Formule se dobijaju isključivo konačnom primenom koraka 1. i 2.

Ovo je primer tzv. *rekurzivne* definicije jer se formule određene dužine (broj slova iz alfabeta) određuju pomoću formula manje dužine. Na osnovu definicije formule, imamo da su na primer, sledeće reči $(p \wedge q)$, $((p \vee q) \Rightarrow (p \Rightarrow q))$, $(\neg p \Rightarrow q)$, $(p \Rightarrow (p \Rightarrow q))$ formule, dok na primer reči $(\Rightarrow pq$, $p \vee q$, $\Rightarrow p\neg$ nisu formule. Reč $p \vee q$ nije formula, jer nema spoljne zagrade i stoga nije u skladu sa korakom 2. U daljem izlaganju ćemo se dogovoriti o izostavljanju nekih zagrada u formulama. Evo tog dogovora (konvencije):

a) Izostavljanje spoljnih zagrada. Tako, na primer, umesto $(p \vee q)$ pišemo $p \vee q$.
b) Dogovorno smatramo da logičke operacije $\Rightarrow, \Leftrightarrow$ "jače" razdvajaju formulu od operacija $\vee, \wedge$. Tako, na primer, umesto $(p \vee q) \Rightarrow r$ pišemo $p \vee q \Rightarrow r$.

Razlog ovih konvencija je jednostavan - da ne gomilamo zagrade u formuli. Skup svih formula označavaćemo sa *Form*.

## 2.3 Iskazna algebra

**Definicija 2.3.1 Iskazna algebra** je uređena šestorka $(\{\top, \bot\}, \vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \neg)$ kod koje je prva komponenta dvočlani skup $\{\top, \bot\}$, druga, treća, četvrta i peta komponenta su binarne operacije skupa $\{\top, \bot\}$, a šesta komponenta unarna operacija toga skupa, definisane sledećim Cayley-evim tablicama:

| $\vee$ | T | $\bot$ |
|---|---|---|
| T | T | T |
| $\bot$ | T | $\bot$ |

| $\wedge$ | T | $\bot$ |
|---|---|---|
| T | T | $\bot$ |
| $\bot$ | $\bot$ | $\bot$ |

| $\Rightarrow$ | T | $\bot$ |
|---|---|---|
| T | T | $\bot$ |
| $\bot$ | T | T |

| $\Leftrightarrow$ | T | $\bot$ |
|---|---|---|
| T | T | $\bot$ |
| $\bot$ | $\bot$ | T |

| $\neg$ | |
|---|---|
| T | $\bot$ |
| $\bot$ | T |

## 2.4 Interpretacija

Iskazna slova $p$, $q$, $r$, ..., $p_1$, $q_1$, $r_1$, ..., $p_n$, $q_n$, $r_n$, ... interpretiramo kao elemente skupa $\{ \top, \bot \}$ iskazne algebre, a operacijske znake $\vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \neg$ interpretiramo kao operacije iskazne algebre koje smo označili istim znacima i definisali Cayley-evim tablicama.

**Definicija 2.4.1** (*Istinitosna vrednost formule*) Uz prethodno dogovorenu vrednost iskaznih slova $p_i$ kao članove skupa $\{ \top, \bot \}$ definišemo:

1. Vrednost formule $p_i$ je vrednost (iskaznog slova) $p_i$ u oznaci $v(p_i)$.
2. Ako je $v(A)$ vrednost formule $A$ i $v(B)$ vrednost formule $B$, onda je

| | |
|---|---|
| $v(A) \vee v(B)$ | vrednost formule $A \vee B$ |
| $v(A) \wedge v(B)$ | vrednost formule $A \wedge B$ |
| $v(A) \Rightarrow v(B)$ | vrednost formule $A \Rightarrow B$ |
| $v(A) \Leftrightarrow v(B)$ | vrednost formule $A \Leftrightarrow B$ |
| $\neg v(A)$ | vrednost formule $\neg A$. |

Primetimo da istinitosna vrednost formule zavisi samo od promenljivih koje se pojavljuju u toj formuli.

**Primer 2.4.1** Ako slovo $p$ ima vrednost $\top$ tj. $v(p) = \top$ i slovo $q$ ima vrednost $\bot$ tj. $v(q) = \bot$, tada formula $\neg p \vee (q \Rightarrow p)$ ima vrednost $v(\neg p \vee (q \Rightarrow p)) = v(\neg p) \vee v(q \Rightarrow p) = \neg v(p) \vee (v(q) \Rightarrow v(p)) = \neg \top \vee (\bot \Rightarrow \top) = \bot \vee \top = \top$.

**Primer 2.4.2** Neka je $\rho$ binarna relacija na nepraznom skupu slova $X$. Neka je sa $p$ označen iskaz "$\rho$ je refleksivna relacija", sa $q$ neka je označen iskaz "$\rho$ je simetrična relacija" a sa r "$\rho$ je tranzitivna relacija". Neka je, konačno, sa $s$ označen iskaz "$\rho$ je relacija ekvivalencije". Uzmimo da je skup promenljivih

$\{p,q,r,s\}$. Tada formula $s \Leftrightarrow (p \wedge q \wedge r)$ označava tvrđenje "relacija $\rho$ je relacija ekvivalencije ako i samo ako je $\rho$ refleksivna, simetrična i tranzitivna".

## 2.5 Semantika iskazne logike

**Definicija 2.5.1 Valuacija $\tau$** je preslikavanje skupa promenljivih u skup {tačno, netačno} tj $\{\top, \perp\}$.

**Definicija 2.5.2** Neka je data valuacija $\tau$. **Vrednost formule, *v*,** za datu valuaciju $\tau$ je:

1) $v_\tau(p_i) = \tau(p_i)$
2) $v_\tau(A \wedge B) = v_\tau(A) \wedge v_\tau(B)$
3) $v_\tau(A \vee B) = v_\tau(A) \vee v_\tau(B)$
4) $v_\tau(A \Rightarrow B) = v_\tau(A) \Rightarrow v_\tau(B)$
5) $v_\tau(A \Leftrightarrow B) = v_\tau(A) \Leftrightarrow v_\tau(B)$
6) $v_\tau(\neg A) = \neg v_\tau(A)$.

**Definicija 2.5.3** Ako je za datu valuaciju $\tau$, $v_\tau(A) = \top$, kažemo da je formula $A$ **tačna** u toj valuaciji. U suprotnom kažemo da je **netačna**.

**Definicija 2.5.4 Tautologije** su one formule koje imaju vrednost $\top$ za svaku valuaciju. Ako je formula $A$ tautologija, pisaćemo $\models A$.

**Definicija 2.5.4** Neka je $\Phi$ skup formula a $A$ formula. Formula $A$ je **semantička posledica** skupa $\Phi$, u oznaci $\Phi \models A$, akko za sve valuacije $\tau$, za koje je $v_\tau(B) = \top$ za sve $B \in F$, sledi $v_\tau(A) = \top$ tj.

$$(\forall \tau)\ ((\forall B \in F)\, v_\tau(B) = \top \Rightarrow v_\tau(A) = \top).$$

## 2.6 Teorija modela iskazne logike

Neka je dat skup iskaznih slova $S = \{p_0, p_1, \ldots, p_n, \ldots\}$. Svaki skup iskaznih slova $S_1 \subseteq S$ zovemo *modelom* (u iskaznoj logici). Skup svih modela iskazne logike označavamo sa $Mod$. Prema tome, $Mod = P(S)$. Formule se definišu kao u Definiciji 2.2.1 ali sa veznicima $\neg$ i $\vee$. Dakle, imamo sledeću definiciju:

**Definicija 2.6.1 Formule** u teoriji modela iskazne logike definišemo na sledeći način:

1. Iskazna slova su formule
2. Ako su $A$ i $B$ formule, onda su i $A \vee B$, $\neg A$ formule
3. Formule se dobijaju isključivo konačnom primenom koraka 1. i 2.

Skup svih formula označavamo sa $Form$. Konvencija o brisanju zagrada važi kako je ranije napomenuto. Ostale logičke veznike, po dogovoru uvodimo na sledeći način:

- $A \wedge B$ je kraći zapis formule $\neg(\neg A \vee \neg B)$
- $A \Rightarrow B$ je kraći zapis formule $\neg A \vee B$
- $A \Leftrightarrow B$ je kraći zapis formule $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$.

**Definicija 2.6.2** Ako je M neki model, a $A$ formula, onda relaciju $\models$ (*važenje formule u modelu*) među njima definišemo indukcijom po složenosti formule $A$ na sledeći način:

- M $\models p_i$ akko $p_i \in S$
- M $\models A \vee B$ akko (M $\models A$ ili M $\models B$ )
- M $\models \neg A$ akko nije M $\models A$.

Ako M $\models A$, kažemo da $A$ **važi u M.** Ako $A$ ne važi u M, pišemo M $\not\models A$.

**Primer 2.6.1** Neka je dat model M = $\{p_1, p_2\}$. Tada važi M $\vDash p_1 \vee p_2$, jer imamo $\{p_1, p_2\} \vDash p_1 \vee p_2$ akko $\{p_1, p_2\} \vDash p_1$ ili $\{p_1, p_2\} \vDash p_2$ akko $p_1 \in \{p_1, p_2\}$ ili $p_2 \in \{p_1, p_2\}$ što je tačno.

**Primer 2.6.2** Za sve $p \in S$ i sve $M \in Mod$ važi sledeće: M $\vDash p \vee \neg p$.

**Napomena:** Nije teško videti da

- M $\vDash A \wedge B$ akko (M $\vDash A$ i M $\vDash B$),
- M $\vDash A \Rightarrow B$ akko ( iz M $\vDash A$ sledi M $\vDash B$),
- M $\vDash A \Leftrightarrow B$ akko (M $\vDash A$ akko M $\vDash B$).

**Definicija 2.6.3** Neka je dat model M . Valuaciju $\tau_M : \mathrm{S} \to \{\top, \bot\}$ definišemo na sledeći način:

$$\tau_{\mathrm{M}}(p_i) = \top \text{ akko } p_i \in \mathrm{M}$$

**Teorema 2.6.1** Za svaki model M i svaku formulu $A$ važi sledeće:

$$M \vDash A \text{ akko } v_{\tau M}(A) = \top.$$

($v_{\tau M}(A)$ je vrednost formule $A$ u valuaciji pridruženoj modelu M.)

**Dokaz.** Dokaz izvodimo indukcijom po složenosti formule $A$.
*Indukcijska baza.* Neka je $A \equiv p_i$. Tada:

M $\vDash p_i$ akko $p_i \in M$ (po definiciji)
akko $\tau_{\mathrm{M}}(p_i) = \top$. (1)

*Indukcijska hipoteza.* Pretpostavimo da tvrđenje važi za formule $A$ i $B$.
*Indukcijski korak.* Pokažimo da tvrđenje važi za formule $\neg A$ i $A \vee B$. Tada:

M $\vDash \neg A$ akko nije (M $\vDash A$) (po definiciji)
akko nije ($v_{\tau M}(A) = \top$) (2)

akko $v_{\tau M}(A) = \perp$ (po definiciji)
akko $v_{\tau M}(\neg A) = \top$. (po definiciji)

M $\models A \vee B$ akko (M $\models A$ ili M $\models B$) (po definiciji)
akko ($v_{\tau M}(A) = \top$ ili $v_{\tau M}(B) = \top$) (2)
akko ($v_{\tau M}(A \vee B) = \top$). (po definiciji)

■

**Posledica 2.6.1** Ako je formula $A$ tautologija, onda M $\models A$ za sve modele M.

**Posledica 2.6.2** Formula $A$ ima model akko nije kontradikcija.

## 2.7 Iskazna logika kao formalna teorija. Teorema kompletnosti i teorema kompaktnosti za iskazni račun.

**Definicija 2.7.1 Iskazni račun $\mathbf{I_L}$ (Lukašijevičeva logika)** je formalna teorija $T = \langle X, Form, Ax, R \rangle$ gde je

- $X = S$ (skup iskaznih slova) $\cup \{\neg, \Rightarrow, (, )\}$
- *Form* skup formula, koje se definišu kao u Definiciji 2.2.1 sa odgovarajućim veznicima
- *Ax* skup aksioma kojih ima beskonačno mnogo i raspoređene su u tri šeme:

  $Ax1 \quad A \Rightarrow (B \Rightarrow A), \qquad A, B \in Form$

  $Ax2 \quad (A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C)), \quad A, B, C \in Form$

  $Ax3 \quad (\neg A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow (B \Rightarrow A), \qquad A, B \in Form$

- $R$ = {modus ponens} (modus ponens ćemo kraće označiti sa M.P.)

$$\text{M.P.:} \quad \frac{A, A \Rightarrow B}{B}, \qquad A, B \in Form.$$

Da bismo dokazali teoremu kompletnosti za iskazni račun, navešćemo niz lema koje su nam potrebne za dokaz.

**Lema 2.7.1** Za proizvoljnu formulu $A$ važi $\vdash A \Rightarrow A$.

**Dokaz.**

*1.* $A \Rightarrow ((A \Rightarrow A) \Rightarrow A)$ $Ax1$ za $B = A \Rightarrow A$

*2.* $A \Rightarrow ((A \Rightarrow A) \Rightarrow A) \Rightarrow ((A \Rightarrow (A \Rightarrow A)) \Rightarrow (A \Rightarrow A))$
$Ax2$ za $B = A \Rightarrow A$
$C = A$

3. $((A \Rightarrow (A \Rightarrow A)) \Rightarrow (A \Rightarrow A))$ M.P. za 1. i 2.

*4.* $A \Rightarrow (A \Rightarrow A)$ $Ax1$ za $B = A$

5. $A \Rightarrow A$ M.P za 3. i 4.

■

**Teorema 2.7.1 (Teorema dedukcije)** Neka $F \subseteq Fom$, $A, B \in Form$. Tada:

$$F \cup \{A\} \vdash B \text{ akko } F \vdash A \Rightarrow B.$$

**Dokaz.** $(\Rightarrow)$ Neka je $B \in Ax \cup F \cup \{A\}$. Tada postoji dokazni niz $A_1, ..., A_n \equiv B$ po hipotezama skupa $F \cup A$. Tvrđenje pokazujemo indukcijom po dužini dokaza, *n*.

*Indukcijska baza.* Neka je $n$ = 1. Tada imamo $A_1 \equiv B$. Odatle sledi $B \in F \cup Ax \cup \{A\}$. Ako je $B$ aksioma ili hipoteza iz $F$ onda je traženi dokazni niz za $A \Rightarrow B$ iz $F$ :

*1.* $B$ aksioma ili hipoteza iz $\Phi$

2. $B \Rightarrow (A \Rightarrow B)$ $Ax1$

3. $A \Rightarrow B$ M.P. za 1. i 2.

Ako je $B \equiv A$, tada prema Lemi 2.7.1 važi $\vdash A \Rightarrow A$, pa onda važi i $F \vdash A \Rightarrow A$, tj. F $\vdash A \Rightarrow B$.

*Indukcijska hipoteza.* Pretpostavimo da tvrđenje važi za sve $k < n, n > 1$. To znači $\Phi \vdash A \Rightarrow A_i$ za $i = 1,\dots,n-1$.

*Indukcijski korak.* Pokažimo da tvrđenje važi za *n*. Tada je $A_n \equiv B$, pa za formulu $B$ sada postoje četiri mogućnosti:

*a)* $B \in Ax$

*b)* $B$ je formula iz $F$

*c)* $B$ je upravo $A$

d) $B \notin Ax \cup F \cup \{A\}$ tj. $B$ sledi iz ranijih formula prema pravilu izvođenja.

Za a), b) i c) dokaz je analogan dokazu iznad. Razmotrimo slučaj d). Tada za neko $i, j < n$ postoje formule $A_i \equiv A_j \Rightarrow B$ i $A_j$, pri čemu je formula *B* dobijena pomoću njih. Tražimo dokaz iz $F$ za formulu $A \Rightarrow B$. Po indukcijskoj hipotezi važi $F \vdash A \Rightarrow A_j$, $F \vdash A \Rightarrow (A_j \Rightarrow B)$ tj. postoji dokazni niz iz *F*, $B_1,\dots,B_k$ gde je

$$B_{k-1} : A \Rightarrow A_j$$

$$B_k : A \Rightarrow (A_j \Rightarrow B)$$

Produžimo ovaj dokaz sledećim formulama:

$$B_{k+1} : (A \Rightarrow (A_j \Rightarrow B)) \Rightarrow ((A \Rightarrow A_j) \Rightarrow (A \Rightarrow B)) \qquad Ax2$$

$$B_{k+2} : (A \Rightarrow A_j) \Rightarrow (A \Rightarrow B) \qquad \text{M.P. za } B_k \text{ i } B_{k+1}$$

$$B_{k+3} : A \Rightarrow B \qquad \text{M.P. za } B_{k+1} \text{ i } B_{k+2}.$$

Tako dobijamo dokaz $B_1,\dots,B_k, B_{k+1}, B_{k+2}, B_{k+3}$ za formulu $A \Rightarrow B$ po hipotezama iz Φ, tj. F $\vdash A \Rightarrow B$.

$(\Leftarrow)$ Neka je F $\vdash A \Rightarrow B$. Tada postoji dokazni niz $A_1, ..., A_n$ formule $A \Rightarrow B$ po hipotezama iz Φ. Tada je dokaz za formulu $B$ po hipotezama iz $F \cup \{A\}$ sledeći:

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $A$ | hipoteza |
| 2. | $A \Rightarrow B$ | dokazano iz Φ |
| 3. | $B$ | M.P. na 1. i 2. |

■

**Lema 2.7.2** $A \Rightarrow B, B \Rightarrow C \vdash A \Rightarrow C$.

**Dokaz.** Dokazujemo $A \Rightarrow B, B \Rightarrow C, A \vdash C$ pa prema teoremi dedukcije sledi dokaz tvrđenja.

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $A \Rightarrow B$ | hipoteza |
| 2. | $B \Rightarrow C$ | hipoteza |
| 3. | $A$ | hipoteza |
| 4. | $B$ | M.P. za 1. i 3. |
| 5. | $C$ | M.P. za 2. i 4. |

■

**Lema 2.7.3** $\vdash A \Rightarrow (A \Rightarrow B)$.

**Dokaz.** Dokazujemo $\neg A, A \vdash B$ i koristimo teoremu dedukcije.

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $\neg A$ | hipoteza |
| 2. | $A$ | hipoteza |
| 3. | $\neg A \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$ | $Ax1$ |
| 4. | $\neg B \Rightarrow \neg A$ | M.P. za 1. i 3. |
| 5. | $(\neg B \Rightarrow \neg A) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$ | $Ax3$ |

6. $A \Rightarrow B$ M.P. za 4. i 5.
7. $B$ M.P. za 2. i 6.

■

**Lema 2.7.4** Za proizvoljne formule *A*,*B*, sledeće formule su teoreme računa $I_L$:

*1)* $\neg\neg A \Rightarrow A$

*2)* $A \Rightarrow \neg\neg A$

3) $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$

4) $A \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg(A \Rightarrow B))$

**Dokaz.**

1) Dokažimo $\neg\neg A \vdash A$ i iskoristimo Teoremu 2.7.1.

1. $\neg\neg A$ hipoteza
2. $\neg\neg A \Rightarrow (\neg A \Rightarrow \neg\neg\neg A)$ Lema 2.7.3
3. $\neg A \Rightarrow \neg\neg\neg A$ M.P. za 1. i 2.
4. $(\neg A \Rightarrow \neg\neg\neg A) \Rightarrow (\neg\neg A \Rightarrow A)$ $Ax3$
5. $\neg\neg A \Rightarrow A$ M.P. za 3. i 4.
6. $A$ M.P. za 1. i 5.

2) Ovaj deo tvrđenja dokazujemo direktno.

1. $(\neg\neg\neg A \Rightarrow \neg A) \Rightarrow (A \Rightarrow \neg\neg A)$ $Ax3$
2. $\neg\neg\neg A \Rightarrow \neg A$ Lema 2.7.4, 1)
3. $A \Rightarrow \neg\neg A$ M.P. za 1. i 2.

3) Pokažimo $A \Rightarrow B \vdash \neg B \Rightarrow \neg A$ i iskoristimo teoremu dedukcije.

1. $A \Rightarrow B$ hipoteza
2. $\neg\neg A \Rightarrow A$ Lema 2.7.4, 1)
3. $\neg\neg A \Rightarrow B$ Lema 2.7.2 za 1. i 2.

4. $B \Rightarrow \neg\neg B$ Lema 2.7.4, 2)
5. $\neg\neg A \Rightarrow \neg\neg B$ Lema 2.7.2 za 3. i 4.
6. $(\neg\neg A \Rightarrow \neg\neg B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$ $Ax3$
7. $\neg B \Rightarrow \neg A$ M.P. za 5. i 6.

4) Pokažimo $A, \neg B \vdash \neg(A \Rightarrow B)$ i primenimo teoremu dedukcije dva puta. Kako je $A, A \Rightarrow B \vdash B$ (M.P.), to onda primenom dva puta teoreme dedukcije dobijamo $\vdash A \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow B)$. To će nam biti prva hipoteza.

1. $A \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow B)$ hipoteza
2. $A$ hipoteza
3. $(A \Rightarrow B) \Rightarrow B$ M.P. za 1. i 2.
4. $((A \Rightarrow B) \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg(A \Rightarrow B))$ Lema 2.7.4, 3)
5. $\neg B \Rightarrow \neg(A \Rightarrow B)$ M.P. za 3. i 4.
6. $\neg B$ hipoteza
7. $\neg(A \Rightarrow B)$ M.P. za 5. i 6.

■

**Lema 2.7.5** $A \Rightarrow B, \neg A \Rightarrow B \vdash B$.

**Lema 2.7.6**

*1)* $A, B \vdash A \Rightarrow B$

2) $A, \neg B \vdash \neg(A \Rightarrow B)$

*3)* $\neg A, B \vdash A \Rightarrow B$

4) $\neg A, \neg B \vdash A \Rightarrow B$.

**Dokaz.**

1) Pokazaćemo $B \vdash A \Rightarrow B$, odakle će direktno slediti traženo tvrđenje.

1. $B$ hipoteza
2. $B \Rightarrow (A \Rightarrow B)$ $Ax1$
3. $A \Rightarrow B$ M.P. za 1. i 2.

2) Prema Lemi 2.7.4, 4) imamo $\vdash A \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg(A \Rightarrow B))$, pa kada na to dva puta primenimo teoremu dedukcije, dobijamo $A, \neg B \vdash \neg(A \Rightarrow B)$.

3) Iz dokaza pod 1) imamo $B \vdash A \Rightarrow B$, odakle sledi i $\neg A, B \vdash A \Rightarrow B$.

4) Pokažimo $\neg A \vdash A \Rightarrow B$, odakle će slediti i $\neg A, \neg B \vdash A \Rightarrow B$.
1. $\neg A$ hipoteza
2. $\neg A \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$ $Ax1$
3. $\neg B \Rightarrow \neg A$ M.P. za 1. i 2.
4. $(\neg B \Rightarrow \neg A) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$ $Ax3$
5. $A \Rightarrow B$ M.P. za 3. i 4.

■

**Lema 2.7.7** Neka je $A(p_1, ..., p_n)$ formula čija su sva iskazna slova među slovima $p_1, ..., p_n$. Tada

$$p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2}, ..., p_n^{\alpha_n} \vdash A^{\alpha}$$

gde je

$$p^{\alpha} = p \text{ ako je } \alpha = \top$$
$$p^{\alpha} = \neg p \text{ ako je } \alpha = \bot$$

i za vrednost $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$, $\alpha_i \in \{\top, \bot\}$ je $\alpha = A(\alpha_1, ..., \alpha_n)$.

**Dokaz.** Dokaz izvodimo indukcijom po broju logičkih veznika $\neg, \Rightarrow$ u formuli $A$.

*Indukcijska baza.* Tada je formula $A$ oblika $p_i$ tj. $A$ je iskazno slovo. Uzmimo, bez umanjenja opštosti, $A \equiv p_1$. Tada je

$$p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2}, \ldots, p_n^{\alpha_n} \vdash p_1^{\alpha_1}$$

tačno, jer prema Lemi 2.7.1 važi $p_1^{\alpha_1} \vdash p_1^{\alpha_1}$.

*Indukcijska hipoteza.* Neka tvrđenje važi za sve $j < n, n > 0$.

*Indukcijski korak.* Pokažimo tačnost tvrđenja za *n*. Razlikujemo dva slučaja:

1. Formula $A$ je oblika $\neg B$. Tada za $B$ važi tvrđenje tj. prema indukcijskoj hipotezi imamo:

$$p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2}, \ldots, p_n^{\alpha_n} \vdash B^\beta, \qquad \beta = B(\alpha_1, \ldots, \alpha_n).$$

Pokažimo sledeće: $B^\beta \vdash A^\alpha$, tj. $B^\beta \vdash (\neg B)^\alpha, \alpha = \neg\beta$. Ako je $\beta = \top$ tj. formula $B$ ima vrednost $\top$ u tački $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, tada imamo $B \vdash \neg\neg B$ što je tačno prema Lemi 2.7.4, 2). Ako je $\beta = \perp$, onda je $\neg B \vdash \neg B$ što važi prema Lemi 2.7.1. Dakle,

$$p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2}, \ldots, p_n^{\alpha_n} \vdash A^\alpha.$$

2. Formula $A$ je oblika $B \Rightarrow C$. Tada za formule $B$ i $C$ važi tvrđenje tj. prema indukcijskoj hipotezi imamo:

$$p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2}, \ldots, p_n^{\alpha_n} \vdash B^\beta, \qquad \beta = B(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$$

$$p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2}, \ldots, p_n^{\alpha_n} \vdash C^\gamma, \qquad \gamma = C(\alpha_1, \ldots, \alpha_n).$$

Dokažimo $B^\beta, C^\gamma \vdash A^\alpha$, tj. $B^\beta, C^\gamma \vdash (B \Rightarrow C)^\alpha$, gde je $\alpha \equiv \beta \Rightarrow \gamma$. Tada za $\beta, \gamma \in \{\top, \perp\}$ važi:

$B, C \vdash B \Rightarrow C$, za $\beta = \top$, $\gamma = \top$

$B, \neg C \vdash \neg(B \Rightarrow C)$, za $\beta = \top$, $\gamma = \perp$

$\neg B, C \vdash B \Rightarrow C$, , za $\beta = \bot$, $\gamma = \top$

$\neg B, \neg C \vdash B \Rightarrow C$, za $\beta = \bot$, $\gamma = \bot$

što je u svim slučajevima tačno, prema Lemi 2.7.6. Dakle,

$$p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2}, \ldots, p_n^{\alpha_n} \vdash A^{\alpha}$$

■

**Teorema 2.7.2** (**Mala teorema kompletnosti za iskazni račun**) Formula $A$ iskazne logike $I_L$ je tautologija akko je formula $A$ teorema iskazne logike $I_L$.

**Dokaz.** $(\Rightarrow)$ Neka $\models A$. Tada prema Lemi 2.7.7 važi $p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2}, \ldots, p_n^{\alpha_n} \vdash A$, gde su $p_1, \ldots, p_n$ sva slova formule $A$. (Ovde je, zbog pretpostavke $\models A$, $\alpha = A(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \top$ za sve vrednosti $\alpha_i \in \{\top, \bot\}$, pa je $A^{\alpha}$ ustvari $A$.) Za $\alpha_n$ imamo dve mogućnosti: $\alpha_n = \top$ i $\alpha_n = \bot$. Za ta dva slučaja dobijamo:

$$p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2}, \ldots, p_{n-1}^{\alpha_{n-1}}, p_n \vdash A$$

$$p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2}, \ldots, p_{n-1}^{\alpha_{n-1}}, \neg p_n \vdash A.$$

Prema teoremi dedukcije imamo:

$$p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2}, \ldots, p_{n-1}^{\alpha_{n-1}} \vdash p_n \Rightarrow A$$

$$p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2}, \ldots, p_{n-1}^{\alpha_{n-1}} \vdash \neg p_n \Rightarrow A$$

Koristeći Lemu 2.7.5, dobijamo:

$$p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2}, \ldots, p_{n-1}^{\alpha_{n-1}} \vdash A.$$

Sledi analogno razmatranje za $\alpha_{n-1}$. Time dobijamo:

$$p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2}, \ldots, p_{n-2}^{\alpha_{n-2}} \vdash A.$$

Nastavljajući ovaj postupak, nakon konačno mnogo koraka dobijamo $\vdash A$.

$(\Leftarrow)$ Neka je $\vdash A$. Tada postoji dokaz $A_1, \ldots, A_n \equiv A$ formule $A$. Za $n = 1$ je $A$ aksioma. Kako je svaka aksioma tautologija, imamo $\models A$. Neka je sada $n > 1$ i neka $\models A_i$, za sve $i < n$. Tada za formulu $A_n$ postoje dve mogućnosti: ili je aksioma, ili je dobijena iz prethodnih formula u nizu prema modus ponensu tj. postoje formule $A_i$ i $A_j \equiv A_i \Rightarrow A_n$, za $i, j < n$. U prvom slučaju razmatranje je analogno kao za $n = 1$. U drugom slučaju je na osnovu pretpostavke $\models A_i$, $\models A_i \Rightarrow A_n$. Tada $\models A_n$ .

■

**Posledica 2.7.1** Formula $A$ teorije iskazne logike je tautologija akko važi u svim modelima te teorije.

**Teorema 2.7.3** Za svaki skup formula Φ i svaku formulu $A$ važi da je $A$ semantička posledica skupa Φ akko $A$ važi na svakom modelu skupa Φ.

**Dokaz.** $(\Rightarrow)$Neka je $A$ semantička posledica skupa Φ. Tada po definiciji sledi da za sve valuacije $\tau$ važi

$$(\forall B \in \mathsf{F})v_\tau(B) = \mathsf{T} \Rightarrow v_\tau(A) = \mathsf{T}$$

Treba pokazati da za sve modele teorije $I_L$, M, važi:

ako M $\models$ Φ onda M $\models A$.

Neka M $\models$ Φ. To znači da za sve $B \in F$ važi M $\models B$. Treba pokazati M $\models A$. Uzmimo valuaciju $\tau_M$, pri čemu znamo da je $v_{\tau M}(B) = \mathsf{T}$ za sve $B \in F$ (jer

M $\models B$). Dakle, svaka formula iz Φ je tačna. Kako je $A$ semantička posledica skupa Φ, to je $v_{\tau M}(A) = \top$. Odatle sledi M $\models A$ (zbog veze između definicije valuacije i važenja u modelu).

$(\Leftarrow)$ Neka $A$ važi na svakom modelu skupa Φ. Uzmimo valuaciju $\tau$ takvu da je $v_\tau(B) = \top$, za sve $B \in F$. Treba pokazati $v_\tau(A) = \top$. Znamo da je svaki model od Φ model i za $A$. Konstruišimo model M skupa Φ na sledeći način:

$$p_i \in M \text{ akko } \tau(p_i) = \top.$$

Prema definiciji valuacije koja odgovara modelu, jasno je $\tau_M = \tau$. Imamo M $\models$ Φ, odakle je M $\models A$. Odatle sledi $v_{\tau M}(A) = \top$, a zbog $\tau_M = \tau$ konačno važi $v_\tau(A) = \top$.

■

**Definicija 2.7.3** Za skup formula Φ kažemo da je **konzistentan (neprotivrečan)** ako ne postoji formula $A$ takva da važi $\Phi \vdash A$ i $\Phi \vdash \neg A$.

**Teorema 2.7.4 (Saglasnost iskazne logike)** Za svaki skup formula Φ i svaku formulu $A$ važi: ako je $A$ sintaktička posledica skupa Φ, onda je $A$ semantička posledica skupa Φ tj.

$$\text{ako } \Phi \vdash A \text{ onda } \Phi \models A.$$

**Dokaz.** Neka $\Phi \vdash A$. Tada postoji dokazni niz $A_1, \ldots, A_n \equiv A$ za $A$, tako da je svaka formula u tom nizu:

1) aksioma ili
2) hipoteza iz skupa Φ ili
3) sledi iz ranijih formula u tom nizu po nekom pravilu izvođenja.

Dokaz tvrđenja izvodimo indukcijom po dužni dokaza, *n*.

*Indukcijska baza.* Neka je $n = 1$. Tada je $A_1 \equiv A$, tj. dokazni niz je jedna formula. Tada je moguće:

- $A \in Ax$. Tada trivijalno važi $\Phi \models A$.
- $A \in F$. Tada trivijalno važi $\Phi \models A$.

*Indukcijska hipoteza.* Pretpostavimo da tvrđenje važi za svaki dokazni niz dužine $< n$.

*Indukcijski korak.* Posmatrajmo dokazni niz dužine $n$: $A_1,..., A_{n-1}, A_n \equiv A$, pri čemu su sve formule $A_1,..., A_{n-1}$ semantičke posledice skupa $\Phi$ (prema indukcijskoj hipotezi). Posmatrajmo formulu $A_n \equiv A$. Moguće je:

- $A \in Ax$. Tada trivijalno važi $\Phi \models A$.
- $A \in F$. Tada trivijalno važi $\Phi \models A$.
- $A$ sledi iz ranijih formula u nizu prema modus ponensu. To znači da negde ranije u nizu postoje formule $A_i, A_i \Rightarrow A$. Za njih važi indukcijska hipoteza tj. imamo $\Phi \models A_i$, $\Phi \models A_i \Rightarrow A$, ali tada imamo i $\Phi \models A$.

■

**Teorema 2.7.5** Ako skup formula Φ ima model, onda je Φ konzistentan.

**Dokaz.** Neka je M model skupa Φ tj. M $\models$ Φ. Pretpostavimo suprotno, Φ nije konzistentan. Tada postoji formula $A$ takva da je $\Phi \vdash A$ i $\Phi \vdash \neg A$. Prema Teoremi 2.7.4 sledi $\Phi \models A$ i $\Phi \models \neg A$. Ali onda bismo imali M $\models A$ (zbog M $\models$ Φ i $\Phi \models A$) i M $\models \neg A$ tj. M $\models A$ i *nije* M $\models A$, što je kontradikcija. Dakle, Φ je konzistentan skup formula.

■

**Definicija 2.7.5** Za skup formula Φ kažemo da je **maksimalno konzistentan** ako je Φ konzistentan i ne postoji konzistentan skup koji sadrži skup Φ a različit je od Φ tj. ako postoji konzistentan skup $\Phi_1$ i $F \subseteq F_1$ onda $\Phi = \Phi_1$.

**Teorema 2.7.6** Ako je Φ maksimalno konzistentan skup formula, onda je Φ deduktivno zatvoren.

**Dokaz.** Neka je Φ maksimalno konzistentan skup formula. Znamo da važi $F \subseteq Cons(F)$. Zato, da bi važilo $F = Cons(F)$, treba pokazati da je $Cons(F)$ konzistentan skup. Pretpostavimo suprotno, da postoji formula $A$ takva da važi $Cons(F) \vDash A$ i $Cons(F) \vDash \neg A$. No, tada imamo:

$$A \in Cons(Cons(F)) = Cons(F) \text{ tj. } \Phi \vdash A \tag{1}$$

$$\neg A \in Cons(Cons(F)) = Cons(F) \text{ tj. } \Phi \vdash \neg A \tag{2}$$

Sada (1) i (2) daju kontradikciju, jer je Φ po pretpostavci konzistentan skup.

■

**Teorema 2.7.7 (Lema Lindenbauma)** Svaki konzistantan skup formula je sadržan u nekom maksimalno konzistentnom skupu formula.

**Dokaz.** Polazimo od prebrojivog skupa promenljivih $S = \{p_0, p_1, ..., p_n, ...\}$. Znamo da formula ima samo prebrojivo mnogo. Poređajmo formule u beskonačan niz $A_0, A_1, ..., A_n, ...$. Imamo konzistentan skup formula Φ. Konstruisaćemo neopadajući niz skupova formula $F_0, F_1, ..., F_n, ...$ na sledeći način:

$F_0 = F$

$F_1 = F_0 \cup \{A_0\}$ ako je taj skup konzistentan, ili $F_1 = F_0$ u suprotnom

$F_2 = F_1 \cup \{A_1\}$ ako je taj skup konzistentan, ili $F_2 = F_1$ u suprotnom

$\vdots$

$F_{k+1} = F_k \cup \{A_k\}$ ako je taj skup konzistentan, ili $F_{k+1} = F_k$ u suprotnom.

Dakle, dobili smo neopadajući niz skupova

$$F_0 \subseteq F_1 \subseteq F_2 \subseteq ... \subseteq F_k \subseteq F_{k+1} \subseteq ....$$

Pokažimo da je $G = \bigcup_{k\geq 0} F_k$ maksimalno konzistentan skup koji sadrži Φ. Važi sledeće:

- $F \subseteq G$ po definiciji skupova $\Phi_k$, $k = 0, 1, 2,\ldots$ i skupa $\Gamma$.
- $\Gamma$ je konzistentan. Pretpostavimo suprotno, da postoji formula $A$ takva da je $\Gamma \vdash A$ i $\Gamma \vdash \neg A$ tj. postoji konačan niz formula iz $\Gamma$ za $A$, $A_{ij} \vdash A$ i postoji konačan niz formula iz $\Gamma$ za $\neg A$, $A_{ik} \vdash \neg A$. Neka je $k$ maksimalan indeks u tim nizovima. Uzmimo $\Phi_{k+1.}$ Po definiciji on sadrži sve pomenute formule pa tada $\Phi_{k+1} \vdash A$ i $\Phi_{k+1} \vdash \neg A$ što je nemoguće jer je $\Phi_{k+1}$ konzistentan po konstrukciji.
- $\Gamma$ je maksimalno konzistentan skup koji sadrži Φ. Pretpostavimo suprotno, da postoji konzistentan skup $G_1$ takav da je $G \subseteq G_1$. Odatle sledi da postoji formula $A_k \in G_1 / G$ tj. $A \notin G$. To znači da, u polaznoj konstrukciji, $A_k$ nismo dodavali jer skup $\Phi_k$ nije bio konzistentan. Sada imamo $F_k \subseteq G$, odakle sledi

  $$F_k \cup \{A_k\} \subseteq G \cup \{A_k\} \subseteq G_1.$$

  No, $F_k \cup \{A_k\}$ nije konzistentan skup tj. $G_1$ sadrži skup koji nije konzistentan, odakle sledi da $G_1$ nije konzistentan. Kontradikcija.

■

Sledeću lemu dajemo bez dokaza.

**Lema 2.7.8**

*1)* $A \wedge B \vdash A$

*2)* $A \wedge B \vdash B$

3) $A, B \vdash A \wedge B$.

**Teorema 2.7.8** Neka je Φ maksimalno konzistentan skup formula. Tada:

1) Za svaku formulu *A* važi da tačno jedna od formula $A$ ili $\neg A$ pripada Φ tj. $A \in F \vee \neg A \in F$.
2) Za svake dve formule $A$ i $B$ važi: (($A \wedge B \in F$) akko ($A \in F$ i $B \in F$)).

**Dokaz.** 1) Jasno je da ne mogu obe formule $A$ i $\neg A$ pripadati Φ, jer je Φ konzistentan skup. Sada pretpostavimo $A \notin F$ i pokažimo da tada mora važiti $\neg A \in F$. Primetimo da skup $F \cup \{A\}$ nije konzistentan, jer bi u suprotnom to bio konzistentan skup koji je veći od Φ, što je u kontradikciji sa maksimalnošću skupa Φ. Odatle sledi da postoji formula $B$ takva da je

$$F \cup \{A\} \vdash \neg B$$
$$F \cup \{A\} \vdash B.$$

Prema Lemi 2.7.3, zatim, važi $F \cup \{A\} \vdash \neg A$, a prema teoremi dedukcije je dalje

$$\Phi \vdash A \Rightarrow \neg A \qquad (1)$$

Prema Lemi 2.7.1 važi

$$\Phi \vdash \neg A \Rightarrow \neg A \qquad (2)$$

Sada (1) i (2), prema Lemi 2.7.5, daje $\Phi \vdash \neg A$, tj. $\neg A \in Cons(F) = F$, tj. $\neg A \in F$.

2) $(\Rightarrow)$ Neka $A \wedge B \in F$ tj. $\Phi \vdash A \wedge B$. Prema Lemi 2.7.8 važi $A \wedge B \vdash A$ i $A \wedge B \vdash B$. Odatle sledi $\Phi \vdash A$ i $\Phi \vdash B$.

$(\Leftarrow)$ Neka je $\Phi \vdash A$ i $\Phi \vdash B$. Prema Lemi 2.7.8 važi $A, B \vdash A \wedge B$ pa imamo $\Phi \vdash A \wedge B$ tj. $A \wedge B \in Cons(F) = F$, tj. $A \wedge B \in F$.

**Teorema 2.7.9** Ako je Φ konzistentan skup formula, onda Φ ima model.

**Dokaz.** Zbog Leme Lindenbauma, znamo da sigurno postoji maksimalno konzistentan skup formula *G* takav da $F \subseteq G$. Jasno, ako M$\models G$ onda M$\models \Phi$, za svaki model M. Definišimo model M za skup *G* na sledeći način:

$$p \in M \text{ akko } p \in G, \quad \text{za iskazno slovo } p.$$

Treba pokazati da je M model za $G$ tj. M$\models G$. Pokazaćemo više:

$$\mathrm{M} \models A \text{ akko } A \in G, \quad \text{za sve formule } A.$$

Napomenimo da bi bilo dovoljno pokazati samo smer $(\Leftarrow)$. Dokaz izvodimo indukcijom po složenosti formule $A$.

*Indukcijska baza.* Neka je $A \equiv p$ tj. $A$ je iskazno slovo. Tada M $\models p$ akko $p \in G$ važi, jer je M $\models p$ ekvivalentno sa $p \in M$, što je po definiciji ekvivalentno sa $p \in G$.

*Indukcijska hipoteza.*Pretpostavimo da za formule $A$ i $B$ važi tvrđenje tj.

$$\mathrm{M} \models A \text{ akko } A \in G$$
$$\mathrm{M} \models B \text{ akko } B \in G.$$

*Indukcijski korak.* Dokažimo da tvrđenje važi za formule $\neg A$ i $A \wedge B$.

M $\models \neg A$ akko *nije* (M $\models A$)
akko *nije* ($A \in G$)
akko $\neg A \in G$ (prema Teoremi 2.7.8).

M $\models A \wedge B$ akko (M $\models A$ i M $\models B$)
akko ($A \in G$ i $B \in G$)
akko $A \wedge B \in G$ (prema Teoremi 2.7.8).

Kako smo našli model za skup *Γ*, i kako je $F \subseteq G$, to je onda M model za skup Φ.

■

**Teorema 2.7.10** Za svaki skup formula Φ i svaku formulu $A$ važi:

$\Phi \vdash A$ akko skup $F \cup \{\neg A\}$ nije konzistentan.

**Dokaz.** $(\Rightarrow)$ Neka $\Phi \vdash A$. Tada $F \cup \{\neg A\} \vdash A$, ali važi i $F \cup \{\neg A\} \vdash \neg A$ dakle, skup $F \cup \{\neg A\}$ nije konzistentan.

$(\Leftarrow)$ Neka skup $F \cup \{\neg A\}$ nije konzistentan. To znači da se iz $F \cup \{\neg A\}$ može dokazati "bilo šta", pa važi $F \cup \{\neg A\} \vdash A$. Prema teoremi dedukcije odatle sledi $\Phi \vdash \neg A \Rightarrow A$. Kako važi i $\Phi \vdash A \Rightarrow A$ (Lema 2.7.1), onda prema Lemi 2.7.5 imamo $\Phi \vdash A$.

■

**Teorema 2.7.11 (Potpunost iskazne logike)** Za svaki skup formula Φ i svaku formulu $A$ važi: ako je $A$ semantička posledica skupa Φ, onda je $A$ sintaktička posledica skupa Φ, tj.

$$\text{ako } \Phi \models A \text{ onda } \Phi \vdash A.$$

**Dokaz.** Neka važi $\Phi \models A$ . Pretpostavimo suprotno, da nije $\Phi \vdash A$. Tada, prema kontrapoziciji Teoreme 2.7.9, sledi da je skup $F \cup \{\neg A\}$ konzistentan. Kako svaki konzistentan skup formula ima model, ima ga i skup $F \cup \{\neg A\}$. Neka je M taj model, dakle M $\models F \cup \{\neg A\}$. No, tada M $\models \Phi$ i M $\models \neg A$, a zbog $\Phi \models A$ dalje sledi M $\models A$ i M $\models \neg A$. Kontradikcija.

■

Konačno smo u mogućnosti da u potpunosti formulišemo teoremu kompletnosti za iskazni račun:

**Teorema 2.7.12 (Teorema kompletnosti za iskazni račun)** Za svaki skup formula $\Phi$ i svaku formulu $A$ važi: $A$ je semantička posledica skupa $\Phi$ akko je $A$ sintaktička posledica skupa $\Phi$ tj.

$$\Phi \models A \text{ akko } \Phi \vdash A.$$

■

Jednako važan rezultat je i teorema kompaktnosti za iskazni račun, kao posledica teoreme kompletnosti:

**Teorema 2.7.13 (Teorema kompaktnosti za iskazni račun)** Skup formula $\Phi$ ima model akko svaki konačan podskup skupa $\Phi$ ima model.

**Dokaz.** $(\Rightarrow)$ Ovaj smer trivijalno važi. Ako je M $\models \Phi$, onda jasno M $\models \Phi_0$, za svaki konačan skup $F_0 \subseteq F$ .

$(\Leftarrow)$ Neka svaki konačan skup $F_0 \subseteq F$ ima model. Pretpostavimo suprotno, da skup $\Phi$ nema model. Tada $\Phi$ nije konzistentan skup tj. postoji formula $A$ takva da je F$\vdash A \wedge \neg A$. To znači da postoji konačan dokazni niz za

$A \wedge \neg A$, $A_1,\ldots,A_n \equiv A \wedge \neg A$. Dakle, imamo konačno mnogo formula iz Φ iz kojih možemo dokazati $A \wedge \neg A$, pa i za neki konačan skup $F_0 \subseteq F$ za koji važi $\Phi_0 \vdash A \wedge \neg A$. No, tada $\Phi_0$ nema model. Kontradikcija.

■

# 3. Sintaksa logike prvog reda

## 3.1 Jezici prvog reda

Da bismo imali teoriju, moramo imati inicijalni koncept teorije. Prvo primetimo da jedan koncept može biti definisan pomoću termina drugog koncepta, npr. $x - y$ jeste jedinstven broj $z$ takav da je $y + z = x$; ili ako su x i y skupovi onda je $x < y$ ako je za svaki element $z$, $z < x$ implicira $z < y$. Dakle, "oduzimanje" se može "definisati" pomoću "sabiranja", a "biti podskup $(\subset)$" pomoću "pripadanja $(\in)$".

Teorija se razvija uvođenjem novih koncepata i dokazivanjem što većeg broja teorema. Jasno, da bismo razvili teoriju moramo imati jezik te teorije. Pre nego što damo precizne definicije, daćemo primere tvrđenja nekih teorija koji su nam poznati.

**Primer 3.1.1** Posmatrajmo sledeće tvrđenje teorije grupa: "Za svako $x$ postoji $y$ tako da je $x \cdot y = e$". Ovde je $\cdot$ simbol za binarnu operaciju a $e$ je neutralni element. Ako "za svako" označimo simbolom $\forall$ a "postoji" simbolom $\exists$, onda gornje tvrđenje možemo prezentovati na sledeći način:

$$(\forall x)(\exists y)(x \cdot y = e).$$

**Primer 3.1.2** Slede dva tvrđenja iz teorije skupova:

$$(\forall x)(\forall y)(\exists z)(x \in z \wedge y \in z),$$

i

$$(\neg \exists x)(\forall y)(y \in x).$$

Prvi izraz je simbolima prezentovana tvrdnja: "Za svaka dva skupa $x$ i $y$, postoji skup $z$ koji sadrži i skup $x$ i skup $y$", a drugi izraz znači: "Ne postoji skup $x$ koji sadrži svaki skup $y$".

Vidimo da jezik teorije ima "promenljive" kojima će se predstavljati objekti izučavanja, npr. skupovi u teoriji skupova, elementi grupe u teoriji grupa itd., i logičke simbole kao što su $\exists$ (postoji), $\wedge$ (i), $\neg$ (negacija), = (jednakost). Ovi simboli su zajednički za sve teorije. S druge strane, za označavanje nedefinisanih koncepata određene teorije, koriste se simboli alfabeta, npr. *e* koristimo kao oznaku za neutralni element u teoriji grupa.

**Definicija 3.1.1 Jezik prvog reda** (tj. jezik predikatske logike) Svaki jezik prvog reda ima dve vrste simbola: ***logičke simbole*** (isti su za sve jezike I reda) i ***nelogičke simbole*** (svaki jezik I reda ima specifične nelogičke simbole).

- **Logički simboli :**

- ***skup promenljivih,*** uobičajeno je da za skup promenljivih uzmemo $X = \{x_0, x_1, ..., x_n, ...\}$(po dogovoru, možemo koristiti i druge simbole za označavanje promenljivih, recimo $x, y, z, ...$)

- ***logički veznici***: $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, $\neg$, $\forall$, $\exists$ (ponekad uzmemo manji skup logičkih veznika, a ostale uvedemo kao «skraćene zapise» za neke formule)

- ***pomoćni znaci***: (, ), i zarez (,).

- **Nelogički simboli:** delimo ih na tri grupe:

***C – simboli konstanti***

***R – relacijski simboli***

***F- funkcijski simboli*** (ili ***operacijski*** simboli)

Svakom nelogičkom simbolu *s* dodeljen je prirodan broj $ar(s)$ tzv. ***arnost*** (dužina) tog simbola, tako da svi simboli konstanti imaju arnost 0, i svi relacijski i funkcijski simboli imaju pozitivnu arnost. Sa $R_n$ odnosno $F_n$ obeležavamo sve relacijske (odnosno funkcijske) simbole arnosti *n*. Jezik prvog reda obeležićemo sa *L*.

Dakle, da bi se zadala neka specifična teorija (logika), dovoljno je navesti nelogičke simbole. Možemo obeležiti:

$$L = C \cup F \cup R..$$

Slede primeri na koji način možemo zadati jezik prvog reda.

**Primer 3.1.3** Jezik prvog reda možemo zadati na sledeći način:

$$C = \varnothing$$
$$\Phi = \Phi_2 = \{+, \cdot\}$$
$$R = \varnothing.$$

**Primer 3.1.4** Jezik prvog reda moguće je zadati ovako:

$$C = \varnothing$$
$$\Phi = \Phi_2 = \{+, \cdot\}$$
$$R = R_2 = \{\approx\}$$

**Primer 3.1.5** Jezik teorije skupova ima samo jedan nelogički simbol: binarni relacijski simbol $\in$ za "pripadati".

**Primer 3.1.6** Jezik teorije grupa sastoji se od konstantnog simbola $e$ i binarnog simbola $\cdot$ .

Jezik prvog reda zovemo **prebrojivim** ako ima samo prebrojivo mnogo nelogičkih simbola, a ako ima konačno mnogo nelogičkih simbola zovemo ga **konačnim**.

## 3.2 Termi jezika prvog reda

**Definicija 3.2.1** Neka je $L = C \cup F \cup R.$ jezik prvog reda. **Terme** nad $L$ definišemo induktivno na sledeći način:

1) sve promenljive $x_0, x_1, x_2, \ldots$ su termi
2) ako su $t_1, \ldots, t_n$ termi i $f \in F_n$, tada je i $f(t_1, \ldots, t_n)$ term
3) termi se dobijaju isključivo konačnom primenom koraka 1) i 2).

**Napomena.** Za *n*-arni funkcijski simbol $f$, umesto prefiksne notacije koristićemo infiksnu notaciju npr.za binarni funkcijski simbol + ćemo umesto $+(x, y)$ pisati $x + y$.

**Primer 3.2.1** Neka je *L* jezik teorije prstena sa sledećim osobinama: *L* sadrži dva konstantna simbola, 0 i 1, i dva binarna funkcijska simbola, + i · . Neka je sa $\underline{m}$ označen term dobijen "dodavanjem" elementa 1 na samog sebe m puta. Neka je $t^n$ oznaka za term dobijen "množenjem" *t* sa samim sobom *n* puta, za bilo koje *t*. Tada su $\underline{m}$ i $t^n$ termi jezika *L*.

## 3.3 Formule jezika prvog reda

U daljem radu sa logikom prvog reda, neophodan nam je logički simbol kojim ćemo označavati relaciju jednakosti. Taj simbol označićemo sa "$\approx$".

**Definicija 3.3.1** Neka je $L = C \cup F \cup R$. jezik prvog reda. Logika prvog reda sa jednakošću tipa *L* je $L = \langle\, L', Form, Mod_L, \models \rangle$ gde je:

- $L' = L \cup X \cup \{\exists, \forall, \Rightarrow, \neg, (, ), \approx\}$
- $Form$ - formule se definišu kao u običnoj logici prvog reda, jedina razlika je u tome što imamo dodatne elementarne formule oblika
  $t_1 \approx t_2$ za $t_1, t_2 \in Form$.
- $Mod_L$ definiše se kao u običnoj logici prvog reda
- $\models$ se definiše kao u običnoj logici prvog reda, pri čemu još treba definisati M$\models_\tau$ $t_1 \approx t_2$ za valuaciju $\tau : X \to M$. Važi sledeće: M$\models_\tau$ $t_1 \approx t_2$ akko $t_1^M[\tau] = t_2^M[\tau]$, gde je sa $t^M[\tau]$ označena vrednost terma t za valuaciju τ u modelu M. Dalje, M$\models$ $t_1 \approx t_2$ akko M$\models_\tau$ $t_1 \approx t_2$ za sve $\tau : X \to M$.

**Definicija 3.3.2** Neka je $L = C \cup F \cup R$ jezik prvog reda. **Elementarne formule** definišu se na sledeći način: ako su *t* i *s* termi jezika *L*, onda je

$t \approx s$ elementarna formula jezika L; ako je $\rho$ $n$-arni relacijski simbol jezika $L$ i $t_1,...,t_n$ su termi, onda je $\rho(t_1,...,t_n)$ elementarna formula.

**Primer 3.3.1** Posmatrajmo sledeći jezik prvog reda sa jednakošću:

$$C = \emptyset$$
$$F = F_2 = \{+,\cdot\}$$
$$R = R_2 = \{\approx\}.$$

Elementarne formule su $x_1 \approx x_1, x_1 + x_2 \approx x_2 + x_1, x_1 \cdot x_2 \approx x_2 \cdot x_1,...$.

**Definicija 3.3.3** Neka je $L = C \cup F \cup R$ jezik prvog reda. **Formule** jezika $L$ definišu se induktivno na sledeći način:

1) svaka elementarna formula je formula
2) ako su $A_1$ i $A_2$ formule i $x$ je promenljiva, onda su $\neg A_1$, $(\exists x)A_1$ i $A_1 \vee A_2$ formule
3) formule se dobijaju isključivo konačnom primenom koraka 1) i 2).

Ako su dve formule $A_1$ i $A_2$ **sintaksno identične** (tj. ako su jednake kao nizovi simbola), onda to označavamo sa $A_1 = A_2$. Ako $A_1$ i $A_2$ nisu sintaksno identične, to označavamo sa $A_1 \neq A_2$.

**Primer 3.3.2** Posmatrajmo sledeći jezik prvog reda:

$$C = \emptyset$$
$$F = F_2 = \{+,\cdot\}$$
$$R = R_2 = \{\approx\}.$$

Formule su $(\forall x_1)(\forall x_2)x_1 + x_2 \approx x_2 \cdot x_1, (\exists x_1)(\forall x_5)x_1 + x_5 \approx x_1,...$.

**Napomena.**Formula $(\forall x)A_1$ se zove **generalizacija** formule $A_1$.

**Definicija 3.3.4** Pojavljivanje promenljive $x$ u formuli $A_1$ je **vezano** ako se $x$ pojavljuje u potformuli u obliku $(\exists x)A_2$ ; u suprotnom kažemo da se promenljiva $x$ pojavljuje **slobodno**.

**Primer 3.3.3** U formuli $x \in y \vee (\exists x)(x \in y)$, sva pojavljivanja promenljive $y$ su slobodna, prvo pojavljivanje promenljive $x$ je slobodno a ostala pojavljivanja $x$ su vezana.

**Definicija 3.3.5** Promenljiva je **vezana** (**slobodna**) u formuli ako i samo ako ima vezano (slobodno) pojavljivanje u toj formuli.

Primetimo da promenljiva može biti i slobodna i vezana u jednoj formuli.

**Primer 3.3.4** U formuli $(\forall x)\rho_1(x, y) \Rightarrow (\forall x)\rho_2(x)$, prvo pojavljivanje promenljive $x$ je slobodno, a drugo i treće je vezano. To znači da je u toj formuli promenljiva $x$ i slobodna i vezana.

**Definicija 3.3.6** Formula u kojoj ne postoji nijedna slobodna promenljiva zove se **zatvorena formula** ili **rečenica**. Formula koja ne sadrži nijedan kvantifikator zovemo **otvorenom formulom**.

**Definicija 3.3.7** Za term $t$ kažemo da je **slobodan za *x* u formuli *A*(*x*)** ako nijedno slobodno pojavljivanje promenljive $x$ u $A(x)$ nije pod uticajem kvantifikatora koji za promenljivu ima promenljivu iz terma $t$.

**Primer 3.3.5** Posmatrajmo formulu $(\forall z)(x + z < y) \wedge (\forall x)(x \approx x)$.Tada term $t \approx y + z$ nije slobodan za $x$ u datoj formuli. (U prvom delu formule, slobodno pojavljivanje promenljive $x$ je pod uticajem kvantifikatora koji za promenljivu ima promenljivu $z$ iz terma $t$.)

**Primer 3.3.6** Term $t \approx x$ je uvek slobodan za $x$ u proizvoljnoj formuli tj. uvek važi

$$(\forall x)A(x) \Rightarrow A(x).$$

**Primer 3.3.7** Ako term $t$ nema promenljivih, on je slobodan za $x$ u svakoj formuli $A(x)$ tj. uvek važi

$$(\forall x)A(x) \Rightarrow A(c).$$

**Primer 3.3.8** Ako formula $A(x)$ nema kvantifikatora, onda je svaki term $t$ slobodan za $x$ u $A(x)$, npr. u sledećoj formuli

$$(x < y) \wedge (y < z \Rightarrow x < z),$$

ne postoji nijedan term koji nije slobodan u njoj.

## 3.4 Teorije prvog reda

U ovom poglavlju daćemo primere pojedinih teorija prvog reda sa jednakošću. Termima i formulama teorije prvog reda $T$ podrazumevaćemo terme i formule jezika te teorije, respektivno. Teoriju zovemo **prebrojivom** ako je njen jezik prebrojiv, a **konačnom** ako je skup svih nelogičkih simbola konačan. Uopšte, teoriju $T$ čiji je skup nelogičkih simbola kardinalnosti $k$, $k$-beskonačni kardinal, zovemo ***k*-teorijom**.

**Primer 3.4.1 Teorija grupa** je teorija prvog reda sa jednakošću čiji su nelogički simboli konstantni simbol $e$ i binarni funkcijski simbol $\cdot$ , i čije su aksiome sledeće formule:

1) $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(x \cdot (y \cdot z) \approx (x \cdot y) \cdot z)$
2) $(\forall x)(x \cdot e \approx x \wedge e \cdot x \approx x)$
3) $(\forall x)(\exists y)(x \cdot y \approx e \wedge y \cdot x \approx e).$

**Primer 3.4.2 Teorija Abelovih grupa** je teorija prvog reda sa jednakošću čiji su nelogički simboli konstantni simbol 0 i binarni funkcijski simbol + i čije su aksiome sledeće formule:

1) $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(x+(y+z)\approx(x+y)+z)$
2) $(\forall x)(x+0\approx x\wedge 0+x\approx x)$
3) $(\forall x)(\exists y)(x+y\approx 0\wedge y+x\approx 0)$
4) $(\forall x)(\forall y)(x+y\approx y+x)$.

**Primer 3.4.3 Jezik teorije prstena sa jedinicom** sadrži dva konstantna simbola, 0 i 1, i dva binarna funkcijska simbola, + i $\cdot$ . Aksiome ove teorije prvog reda sa jednakošću su aksiome teorije Abelovih grupa sa četiri nove aksiome:

5) $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(x\cdot(y\cdot z)\approx(x\cdot y)\cdot z)$
6) $(\forall x)(x\cdot 1\approx x\wedge 1\cdot x\approx x)$
7) $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(x\cdot(y+z)\approx x\cdot y+x\cdot z)$
8) $(\forall x)(\forall y)(\forall z)((y+z)\cdot x\approx y\cdot x+z\cdot x)$.

**Primer 3.4.4 Teorija polja** ima isti jezik kao teorija prstena sa jedinicom; a aksiome ove teorije prvog reda sa jednakošću su aksiome 1) - 8) sa dvema novim aksiomama:

9) $(\forall x)(\forall y)(x\cdot y\approx y\cdot x)$
10) $(\forall x)(\neg(x\approx 0\Rightarrow(\neg y)x\cdot y\approx 1\wedge y\cdot x\approx 1))$.

**Primer 3.4.5** Neka je $L$ jezik sa samo jednim nelogičkim simbolom- binarnim relacijskim simbolom <. **Teorija linearno uređenih skupova** je teorija prvog reda sa jednakošću čiji jezik je $L$ i čije su aksiome:

1) $(\forall x)\neg(x<x)$
2) $(\forall x)(\forall y)(\forall z)((x<y\wedge y<z)\Rightarrow x<z)$ $(\forall x)(\forall y)(\forall z)$

3) $(\forall x)(\forall y)(x < y \vee x \approx y \vee y < x)$.

**Primer 3.4.6** Sada ćemo dati aksiome **teorije brojeva**, koje igraju važnu ulogu u logici. Ovu teoriju označavamo sa *N*. Njeni nelogički simboli su konstantni simbol 0, unarni funkcijski simbol *S* (koji označava sledbenika date promenljive *x*), dva binarna funkcijska simbola + i · , i binarni relacijski simbol <. Aksiome ove teorije prvog reda sa jedhakošću su:

1) $(\forall x)(\neg(Sx \approx 0))$
2) $(\forall x)(\forall y)(Sx \approx Sy \Rightarrow x \approx y)$
3) $(\forall x)(x + 0 \approx x)$
4) $(\forall x)(\forall y)(x + Sy \approx S(x + y))$
5) $(\forall x)(x \cdot 0 \approx 0)$
6) $(\forall x)(\forall y)(x \cdot Sy \approx (x \cdot y) + x)$
7) $(\forall x)(\neg(x < 0))$
8) $(\forall x)(\forall y)(x < Sy \Leftrightarrow (x < y \vee x \approx y))$
9) $(\forall x)((\forall y)(x < y \vee x \approx y \vee y < x))$.

**Primer 3.4.7 Peanova aritmetika** (*PA*) je teorija prvog reda sa jednakošću dobijena pomoću teorije *N* odbacivanjem poslednje aksiome i dodavanjem sledeće aksiome nazvane indukcijskom aksiomom:

za svaku formulu $A(x_0, ..., x_n)$ gde $A$ sadrži vezano pojavljivanje promenljive $x_0$ važi:

$$(A(0, x_1, ..., x_n) \wedge (\forall x_0)(A(x_0, ..., x_n) \Rightarrow A(Sx_0, ..., x_n))) \Rightarrow (\forall x_0)A(x_0, x_1, ..., x_n)$$

gde je $A(0, x_1, ..., x_n)$ baza indukcije.

**Primer 3.4.8 Zermelo - Fraenkel-ova teorija skupova** (*ZF*) sastoji se od sledećih aksioma:

1) **Aksioma skupa.** *Postoji skup.* Ovu aksiomu možemo izraziti i na sledeći način:

$$(\exists x)(x \approx x).$$

2) **Aksioma ekstenzionalnosti.** *Dva skupa su jednaka ako su im odgovarajući elementi jednaki*:

$$(\forall x)(\forall y)((\forall z)(z \in x \Leftrightarrow z \in y) \Rightarrow x \approx y).$$

3) **Aksioma podskupa.** Za svaku formulu $A(x, y_1, ..., y_n)$, sledeća formula je aksioma:

$$(\forall z)(\forall y_1)...(\forall y_n)((\exists y)(\forall x)(x \in y \Leftrightarrow x \in z \wedge A)).$$

Ova aksioma kaže da za bilo koju "osobinu skupova" izraženu formulom $A(x, y_1, ..., y_n)$, za fiksirane parametre $y_1, ..., y_n$ i za bilo koji skup *z*, postoji skup *y* kojem su elementi isključivo takvi $x \in z$ koji zadovoljavaju $A(x, y_1, ..., y_n)$.

4) **Aksioma zamene.** Za svaku formulu $A(x, y, z, u_1, ..., u_n)$, sledeća formula je aksioma:

$$(\forall z)(\forall u_1)...(\forall u_n)((\forall x \in z)(\exists! y)A \Rightarrow (\exists v)(\forall x)(x \in z \Rightarrow (\exists y)(y \in v \wedge A)))$$

gde je $(\exists! y)A$ zamena za formulu $A \wedge (\forall u)(A_y(u) \Rightarrow u \approx y)$.

5) **Aksioma para.** *Za date skupove x i y, postoji skup z koji sadrži oba skupa x i y*:

$$(\forall x)(\forall y)(\exists z)(x \in z \wedge y \in z).$$

Ova aksioma nam zajedno sa aksiomom podskupa pomaže da govorimo o skupovima oblika $\{x\}, \{x, y\}, \{x, y, z\}, \ldots$.

6) **Aksioma unije.** *Za dati skup x, postoji skup y čiji su elementi takvi z koji pripadaju elementima skupa x:*

$$(\forall x)(\exists y)(\forall z)((u \in x \wedge z \in u) \Rightarrow z \in y).$$

Ova aksioma zajedno sa aksiomom podskupa implicira da je unija familija skupova opet skup.

7) **Aksioma partitivnog skupa.** *Za dati skup x, postoji skup y koji sadrži sve podskupove z skupa x*:

$$(\forall x)(\exists y)(\forall z)((\forall u)(u \in z \Rightarrow u \in x) \Rightarrow z \in y).$$

Ova aksioma zajedno sa aksiomom podskupa će nam omogućiti definisanje partitivnog skupa datog skupa.

8) **Aksioma praznog skupa.** Bazirajući se na prethodnim aksiomama, može se "dokazati" da prazan skup postoji, označimo ga sa $\varnothing$. Sledeća formula je aksioma:

$$(\exists x)(\varnothing \in x \wedge (\forall y)(y \in x \Rightarrow y \cup \{y\} \in x)).$$

Bez ove aksiome ne možemo dokazati egzistenciju "beskonačnog skupa", niti bismo mogli dokazati da postoji skup koji sadrži sve prirodne brojeve.

9) **Aksioma fundacije.** Ova aksioma kaže da je binarna relacija $\in$ dobro utvrđena na svakom nepraznom skupu. Ona glasi:

$$(\forall x)\big((\exists y)(y \in x) \Rightarrow (\exists y)(y \in x \wedge \neg(\exists z)(z \in x \wedge z \in y))\big).$$

# 4. Semantika logike prvog reda

Semantički aspekt logike prvog reda govori o *značenju* formula. U ovom odeljku definisaćemo strukturu jezika, istinitost i zadovoljenje u strukturi i model teorije

## 4.1 Model jezika prvog reda

**Definicija 4.1.1** Neka je $L = C \cup F \cup R$ neki jezik prvog reda. ***Model jezika L*** je uređena dvojka $M = (M, I)$, gde je M neprazan skup, a I preslikavanje sa domenom *L*, definisano na sledeći način:

- ako je $c \in C$ onda $I(c) \in M$
- ako $\rho \in R_n$, onda $I(\rho) \subseteq M^n$
- ako $f \in F_n$, onda $I(f): M^n \to M$ .

Po dogovoru, umesto $I(s)$, za $s \in L$, pišemo $s^M$, i zovemo ga ***interpretacijom simbola s u modelu M.***

**Napomena**. Radi lakšeg zapisa, interpretacije odgovarajućih simbola u modelu *M* obeležavaćemo sa:

1) $I(c) \approx c^M$
2) $I(f) \approx f^M$
3) $I(\rho) \approx \rho^M$ .

Za interpretaciju simbola $\approx$ se uvek uzima da je to relacija jednakosti na *M.*
Bilo koja grupa je model jezika teorije grupa; uobičajeni skup realnih brojeva sa uobičajenom 0, 1, +, $\cdot$ i $<$ jeste model jezka teorije uređenih polja.

**Primer 4.1.1** Neka je $\mathbb{N}$ skup prirodnih brojeva i neka je dato 0, 1, +, $\cdot$ i $<$ sa uobičajenim značenjem. Dalje, neka je $S(n) = n + 1$, $n \in \mathbb{N}$. Ovo je model za jezik teorije *N* definisane u prethodnom poglavlju (Primer 3.4.6). Dati model zvaćemo **standardnim modelom teorije N**.

## 4.2 Istinitost u strukturi

U ovom odeljku ćemo objasniti kada je formula jezika *L* tačna a kada je netačna u modelu jezika *L*. Koncept tačnosti formule biće definisan tako što ćemo definisati funkciju iz skupa svih zatvorenih formula jezika *L* u skup {tačno, netačno}.

**Definicija 4.2.1** Neka je $\tau = \langle a_0, a_1, a_2, ... \rangle$ beskonačan niz elemenata iz domena modela *M.* Taj niz zovemo **valuacijom** u *M.* Drugim rečima, valuacija u $M$ je svako preslikavanje $\tau : \omega \to D$, gde je $\omega = \{0,1,2,...\}$ skup prirodnih brojeva, a $D$ domen modela *M.* Promenljive $x_i \ (i = 0,1,2,...)$ u valuaciji $\tau$ uzimaju vrednosti $a_i$. Sa $\tau(a / x_i)$označavamo valuaciju koja se dobija iz $\tau$ zamenom promenljive $x_i$ sa $a$.

**Definicija 4.2.2** Neka je $L = C \cup F \cup R$ neki jezik prvog reda, *M*= $(M, I)$ neki model tog jezika, a τ neka valuacija, $\tau : X \to M$. ***Vrednost terma t u modelu A za valuaciju*** $\tau$, u oznaci $t^M[\tau]$ se definiše indukcijom po složenosti terma *t*:

- ako je term *t* promenljiva *x*, onda je $t^M[\tau] \approx \tau(x)$
- ako je term *t* simbol konstante *c*, onda je $t^M[\tau] \approx c^M$ ako je $t \approx f(t_1, t_2, ..., t_n)$, onda je $t^M[\tau] \approx f^M \ (t_1{}^M[\tau], t_2{}^M[\tau], ..., t_n{}^M[\tau])$.

**Primer 4.2.1** Neka je $\Phi$ = {+, ·}, neka je $\omega$ univerzum modela i pri tome su $+, \cdot, \approx$ interpretirane na uobičajen način. Neka je data sledeća valuacija τ:

$$\tau(x_1) \approx 1, \tau(x_2) \approx 5 .$$

Tada je vrednost terma $t \approx (x_1 + x_2) \cdot x_1$ u valuaciji $\tau$ : $(1 + 5) \cdot 1 \approx 6$.

**Definicija 4.2.3** Neka je $L = C \cup F \cup R$ neki jezik prvog reda, a $\mathcal{M} = (M, I)$ neki model tog jezika, a τ neka valuacija. Definišimo relaciju $\models_\tau$ između modela jezika L i formula istog jezika indukcijom po složenosti formula:

- ako je $\rho(t_1, t_2, ..., t_n)$ elementarna formula, onda $\mathcal{M} \models_\tau \rho(t_1, t_2, ..., t_n)$ ako važi $\rho^M(t_1^M[\tau], t_2^M[\tau], ..., t_n^M[\tau])$
- $\mathcal{M} \models_\tau A \wedge B$ akko $\mathcal{M} \models_\tau A$ i $\mathcal{M} \models_\tau B$
- $\mathcal{M} \models_\tau A \vee B$ akko $\mathcal{M} \models_\tau A$ ili $\mathcal{M} \models_\tau B$,
- $\mathcal{M} \models_\tau A \Rightarrow B$ akko ( iz $\mathcal{M} \models_\tau A$ sledi $\mathcal{M} \models_\tau B$) ,
- $\mathcal{M} \models_\tau A \Leftrightarrow B$ akko ($\mathcal{M} \models_\tau A$ akko $\mathcal{M} \models_\tau B$ ),
- $\mathcal{M} \models_\tau \neg A$ akko nije $\mathcal{M} \models_\tau A$,
- $\mathcal{M} \models_\tau (\forall x)A$ akko $\mathcal{M} \models_\sigma A$, za sve valuacije σ, koje se od τ razlikuju eventualno u vrednosti promenljive *x*,
- $\mathcal{M} \models_\tau (\exists x)A$ akko $\mathcal{M} \models_\sigma A$, za neku valuaciju σ, koja se od τ razlikuje eventualno u vrednosti promenljive *x*.

**Definicija 4.2.4** Formula *A* jezika *L* ja **valjana** ako je tačna u svim interpretacijama.

**Primer 4.2.2** Neka je dat jezik prvog reda $L = C \cup F \cup R$ pri čemu je *C* prazan skup, *R* sadrži relacijski simbol $\leq$ , a *F* se sastoji od dva funkcijska simbola + i $\cdot$. Neka je univerzum modela skup $\mathbb{N}$. Data je sledeća valuacija τ,

$$\tau(x_0) \approx 1, \tau(x_1) \approx 2, \tau(x_2) \approx 5, \tau(x_3) \approx 4, \tau(x_5) \approx ... \approx 0 .$$

Tada je formula $x_1 + x_2 \leq x_1 \cdot x_2$ tačna za datu valuaciju u datom modelu, jer je $2 + 5 \leq 2 \cdot 5$ tačna nejednakost.

Ako pak uzmemo da je valuacija τ data sa:

$$\tau(x_0) \approx \tau(x_1) \approx \tau(x_2) \approx \ldots \approx 1,$$

onda ista ta formula nije tačna za tu valuaciju u modelu, jer $1+1 \leq 1 \cdot 1$ nije tačna nejednakost.

**Definicija 4.2.5** Neka je $\Phi$ skup formula i $A$ je formula. Kažemo da je $A$ **semantička posledica** skupa $\Phi$ ako za svaki model $M$ važi:

$$\text{ako } M \vDash \Phi \text{ onda } M \vDash A.$$

Pre nego što damo naredne teoreme, napomenimo da ćemo znak $\approx$ interpretirati sa uobičajenom jednakošću =.

**Teorema 4.2.1** (*Vrednost terma ne zavisi od vrednosti onih promenljivih koje ne učestvuju u termu*) Neka je $L$ jezik prvog reda, $t$ term, $M$ model jezika $L$ a $\tau$ i $\tau'$ dve valuacije u M tako da je

$$\tau(x_i) = \tau'(x_i),$$

za sve promenljive $x_i$ koje se pojavljuju u termu $t$. Tada je

$$t^M[\tau] = t^M[\tau'].$$

**Dokaz**. Dokaz izvodimo indukcijom po složenosti terma $t$. Ako je term $t$ iskazno slovo, $t = x_i$, onda imamo sledeće:

$$t^M[\tau] = \tau(x_i) = \tau'(x_i) = t^M[\tau'].$$

Ako je dati term konstanta, $t = c$ za $c \in C$, onda važi sledeće:

$$t^M[\tau] = c^M = t^M[\tau'].$$

Pretpostavimo da za terme $t_1,...,t_n$ važi tvrđenje i posmatrajmo term $t = f(t_1,...,t_n)$ za $f \in F_n$. Tada, na osnovu indukcijske hipoteze, važi sledeća jednakost:

$$t^M[\tau] = f^M\left(t_1{}^M[\tau],....,t_n{}^M[\tau]\right) = f^M\left(t_1{}^M[\tau'],...,t_n{}^M[\tau']\right) = t^M[\tau'].$$

■

**Teorema 4.2.2** (*Važenje formule za datu valuaciju zavisi samo od vrednosti slobodne promenljive u formuli*) Neka je $L$ jezik prvog reda, $M$ njegov model, $A$ formula jezika $L$. Neka su τ i τ' dve valuacije u $M$ takve da je

$$\tau(x_i) = \tau'(x_i),$$

za sve promenljive $x_i$ koje se u formuli $A$ javljaju kao slobodne promenljive. Tada

$$M \models_\tau A \text{ akko } M \models_{\tau'} A.$$

**Dokaz**. Dokaz izvodimo indukcijom po složenosti formule $A$. Ako je $A$ elementarna formula oblika $\rho(t_1,...,t_n)$ za $\rho \in R_n$ i terme $t_1,...,t_n$, onda važi:

$M \models_\tau \rho(t_1,...,t_n)$

akko važi $\rho^M\left(t_1{}^M[\tau],...,t_n{}^M[\tau]\right)$ (po definiciji)

akko važi $\rho^M\left(t_1{}^M[\tau'],...,t_n{}^M[\tau']\right)$ (Teorema 4.2.1)

akko važi $M \models_{\tau'} \rho(t_1,...,t_n)$ (po definiciji).

Neka je $A$ oblika $A_1 \Rightarrow A_2$, i pretpostavimo da za $A_1$ i $A_2$ važi tvrđenje. Tada imamo:

$M \models_\tau A_1 \Rightarrow A_2$

akko ($M \models_\tau A_1$ onda $M \models_\tau A_2$) (po definiciji)

akko ($M \models_{\tau'} A_1$ onda $M \models_{\tau'} A_2$) (po indukcijskoj hipotezi)

akko $M \models_{\tau'} A_1 \Rightarrow A_2$ (po definiciji).

Ako je $A$ oblika $\neg A_1$, dokaz je analogan dokazu iznad.

Neka je $A$ oblika $(\forall x)A_1$, i pretpostavimo da za $A_1$ važi tvrđenje .Tada:

$M \models_\tau (\forall x)A_1$

akko $M \models_{\tau(a/xi)} A_1$, za svako $a \in M$ (po definiciji)

akko $M \models_{\tau'(a/xi)} A_1$, za svako $a \in M$ (po indukcijskoj hipotezi)

akko $M \models_{\tau'} (\forall x)A_1$ (po definiciji)

gde je $\tau(a/x_i)$ valuacija u kojoj je svako $x_i$ zamenjeno sa $a$.

■

**Teorema 4.2.3** Neka je $L$ jezik prvog reda, $M$ njegov model, $A$ formula jezika $L$ i $\tau$ valuacija. Neka je term $t$ slobodan za promenljivu $x_i$ u formuli $A(x_i)$. Tada

$$M \models_\tau A(t) \text{ akko } M \models_{\tau(b/xi)} A(x_i), \qquad b = t^M[\tau].$$

**Dokaz**. Neka su $x_{i1},\dots,x_{ik}$ sve promenljive terma $t$. Kako je term $t$ slobodan za promenljivu $x_i$ u formuli $A$, to onda nijedno pojavljivanje $x_i$ u $A$ nije pod dejstvom kvantifikatora $(\forall x_{ij})$, $j = 1,\dots,k$. Moguće je da neke promenljive $x_{ij}$ u $A$ budu vezane. U tom slučaju sve vezane promenljive u $A(x_i)$ zamenimo novim promenljivim $x_{rj}$ koje se ne nalaze u $A(x_i)$ ili $t$, pa time dobijamo formulu koju ćemo označiti sa $A^*(x_i)$. Na osnovu pretpostavke o termu $t$ imamo

$$M \models_{\tau(b/x_i)} A(x_i) \text{ akko } M \models_{\tau(b/x_i)} A^*(x_i)$$

i

$$M \models_{\tau} A(t) \text{ akko } M \models_{\tau} A^*(t).$$

Dokažimo $M \models_{\tau} A^*(t)$ akko $M \models_{\tau(b/x_i)} A^*(x_i)$, $b = t^M[\tau]$. Dokaz izvodimo indukcijom po složenosti formule $A^*(x_i)$. Pokažimo da za svaku potformulu $B$ formule $A^*(x_i)$ važi

$$M \models_{\tau} B(t) \text{ akko } M \models_{\tau(b/x_i)} B(x_i),\ b = t^M[\tau].$$

Ako je $B$ formula oblika $\rho(t_1,...,t_n)$, onda imamo

$$M \models_{\tau} \rho(t_1,...,t_n) \text{ akko } \rho^M\left(t_1^M[\tau],...,t_n^M[\tau]\right) \qquad \text{(po definiciji).}$$

Ako je $B$ oblika:

1) $\neg B_1$, pretpostavimo za $B_1$ važi tvrđenje, pa imamo:

$$M \models_{\tau} \neg B_1 \text{ akko } nije\ M \models_{\tau} B_1.$$

2) $B_1 \Rightarrow B_2$, onda je razmatranje slično prethodnom.

3) $(\forall x_s)B_1$ pri čemu $x_s$ nije promenljiva terma $t$ (jer je promenljiva $x_s$ vezana u $A^*(x_i)$), tada na osnovu indukcijske hipoteze, za proizvoljnu valuaciju τ imamo:

$$M \models_{\tau} B_1(x_s, t) \text{ akko } M \models_{\tau(b/x_i)} B_1(x_s, x_i),\ b = t^M[\tau].$$

Kako $x_s$ nije promenljiva terma $t$, to na osnovu Teoreme 4.2.1 imamo

$$t^M[\tau] = t^M[\tau(m/x_s)], \text{ za sve } m \in M\ .$$

■

**Posledica 4.2.1** Ako je term $t$ slobodan za promenljivu $x$ u formuli $A(x)$, onda je formula $(\forall x)A(x) \Rightarrow A(t)$ valjana.

**Dokaz.** Dokaz sledi direktno iz prethodne teoreme.

■

# 5. Predikatski račun kao formalna teorija

## 5.1 Teoreme kompletnosti i kompaktnosti za predikatski račun

**Definicija 5.1.1** Neka je $L$ jezik prvog reda. **Kvantifikatorski račun tipa $L$** je formalna teorija $\mathcal{K}_L = \langle L', Form, Ax, R \rangle$ gde je:

- $L' = L \cup X \cup \{\Rightarrow, \neg, (\ ,\ ), ,\ \forall\}$ jezik predikatskog računa
- *Form* skup formula koje se definišu na uobičajeni način sa odgovarajućim veznicima
- *Ax* skup aksioma kojih ima beskonačno mnogo a raspoređene su u pet šema:

$$Ax1 \quad A \Rightarrow (B \Rightarrow A) \qquad A, B \in Form$$

$$Ax2 \quad (A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C)) \qquad A, B, C \in Form$$

$$Ax3 \quad (\neg A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow (B \Rightarrow A) \qquad A, B \in Form$$

$$Ax4 \quad (\forall x)(A \Rightarrow B(x)) \Rightarrow (A \Rightarrow (\forall x)B(x))\,(\forall x)(A \Rightarrow B(x)),$$

*x nije slobodna promenljiva u A*

$$Ax5 \quad (\forall x)A(x) \Rightarrow A(t),$$

*term t nije slobodan za promenljivu x u* $A(x)$.

- R = {M.P., Gen.}, gde je M.P.opet skraćeni zapis za modus ponens, a Gen. će biti skraćenica za pravilo generalizacije

$$\text{M.P.:} \quad \frac{A, A \Rightarrow B}{B}, \qquad A, B \in Form\,.$$

$$\text{Gen.:} \quad \frac{A}{(\forall x)A}, \qquad A \in Form\,.$$

Kako je $\mathcal{K}_L$ jedna specijalna formalna teorija, poznate su nam definicije sledećih pojmova: sintaktičke posledice u oznaci $\Phi \vdash A$, teoreme u oznaci $\vdash A$, skupa svih sintaktičkih posledica, oznaka *Cons*(Φ), i deduktivno zatvorenog skupa.

Obzirom na to da sada veznici $\neg, \Rightarrow$ čine bazu, navešćemo šta označavaju ostali veznici kao i egzistencijalni kvantifikator:

| | | |
|---|---|---|
| $(\exists x)A(x)$ | je zamena za | $\neg(\forall x)\neg A(x)$, |
| $A \wedge B$ | je zamena za | $\neg(A \Rightarrow B)$, |
| $A \vee B$ | je zamena za | $\neg A \Rightarrow B$, |
| $A \Leftrightarrow B$ | je zamena za | $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$. |

**Teorema 5.1.2** Za svaki skup formula $F$ i svaku formulu $A$ važi: ako je $A$ sintaktička posledica skupa $F$, onda je $A$ semantička posledica skupa $F$ tj.

$$\Phi \vdash A \Rightarrow \Phi \models A.$$

**Dokaz.** Neka je $\Phi \vdash A$. To znači da postoji dokazni niz $A_1, ..., A_n \equiv A$ za $A$ iz Φ. Dokaz tvrđenja izvešćemo indukcijom po dužini dokaza, $n$.

*Indukcijska baza.* Neka je $n = 1$. Tada imamo $A_1 \equiv A$, pa je $A$ ili aksioma ili iz Φ, no u oba slučaja trivijalno važi $\Phi \models A$.

*Indukcijska hipoteza.* Pretpostavimo da tvrđenje važi za sve formule čiji je dokazni niz dužine $< n$.

*Indukcijski korak.* Posmatrajmo dokazni niz dužine $n$, $A_1, ..., A_n \equiv A$. Za formulu $A$ je moguće:

1. $A$ je aksioma
2. $A \in F$
3. $A$ sledi iz ranijih formula u nizu prema modus ponensu ili generalizaciji.

Dokaz za 1. i 2. je analogan dokazu u indukcijskoj bazi. Razmotrimo slučaj 3.:

- $A$ sledi prema modus ponensu: tada ranije u nizu postoje formule $A_i$, $A_i \Rightarrow A$ i za njih važi indukcijska hipoteza tj. $\Phi \models A_i$ i $\Phi \models A_i \Rightarrow A$. Treba pokazati $\Phi \models A$ tj. za svaki model $M$, ako $M \models \Phi$ onda $M \models A$. Imamo sledeće:

$$M \models \Phi \text{ i } \Phi \models A_i \text{, odakle sledi } M \models A_i$$

$$M \models \Phi \text{ i } \Phi \models A_i \Rightarrow A \text{, odakle sledi } M \models A_i \Rightarrow A.$$

Dakle, dobili smo da za svaku valuaciju $\tau$ važi $M \models_\tau A_i \Rightarrow A$. Takođe važi $M \models_\tau A_i$. Zato imamo $M \models_\tau A$, za za svaku valuaciju $\tau$, iz čega sledi $M \models A$.

- $A$ sledi prema generalizaciji: tada imamo $(\forall x)A_i \equiv A$ pri čemu za $A_i$ važi indukcijska hipoteza tj. $\Phi \models A_i$. Uzmimo model $M$ skupa $\Phi$. Tada imamo $M \models \Phi$ i $\Phi \models A_i$, odakle sledi $M \models A_i$. To znači da za svaku valuaciju $\tau$ važi $M \models_\tau A_i$. Jasno, tada $M \models_\tau (\forall x)A_i$ za svaku valuaciju $\tau$ pa imamo $M \models_\tau A$ za svako $\tau$ tj. $M \models A$.

■

**Teorema 5.1.2 (Teorema dedukcije za predikatski račun)**

1) ako je $\Phi \vdash A \Rightarrow B$ onda je $F \cup \{A\} \vdash B$
2) neka je $F \cup \{A\} \vdash B$ i neka postoji takav dokaz za $B$ iz $F \cup \{A\}$ u kojem nema generalizacije po slobodnim promenljivama formule $A$. Tada $\Phi \vdash A \Rightarrow B$.

**Dokaz.** 1) Neka važi $\Phi \vdash A \Rightarrow B$. Tada postoji dokaz $A_1,...,A_n \equiv A \Rightarrow B$ po hipotezama iz Φ. Dokaz za $B$ iz $F \cup \{A\}$ je $A_1,...,A_n \equiv A \Rightarrow B, A, B$, pri čemu $B$ sledi prema modusu ponensu.

2) Neka važi $F \cup \{A\} \vdash B$. Tada postoji dokazni niz za $B$, $B_1,...,B_n \equiv B$ koji zadovoljava uslov teoreme. Tvrđenje pokazujemo indukcijom po dužini dokaza, *n*.

*Indukcijska baza.* Neka je $n = 1$. Tada je moguće:

- $B$ je aksioma. Tada je dokaz iz Φ za $A \Rightarrow B$:

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $B$ | aksioma |
| 2. | $B \Rightarrow (A \Rightarrow B)$ | $Ax1$ |
| 3. | $A \Rightarrow B$ | M.P. za 1. i 2. |

- $B \in F$. Dokaz za $A \Rightarrow B$ je tada:

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $B$ | hipoteza |
| 2. | $B \Rightarrow (A \Rightarrow B)$ | $Ax1$ |
| 3. | $A \Rightarrow B$ | M.P. za 1. i 2. |

- $B = A$. Tada nam treba dokaz za $A \Rightarrow A$ što važi zbog Leme 2.7.1.

*Indukcijska hipoteza.*Pretpostavimo da tvrđenje važi za svaki dokaz dužine < *n*.

*Indukcijski korak.* Posmatrajmo dokaz $B_1,...,B_n \equiv B$. Za svako $B_i$, $i < n$ važi indukcijska hipoteza tj. $\Phi \vdash A \Rightarrow B_i$. Za formulu $B$ je moguće:

- $B$ je aksioma. Dokaz je analogan dokazu iznad.
- $B \in F$. Dokaz sledi kao u indukcijskoj bazi.
- $B = A$. Dokaz sledi analogno dokazu iznad.
- $B$ sledi iz ranijih formula u nizu prema nekom pravilu izvođenja. Razmotrimo ovaj slučaj.

$B$ sledi prema modus ponensu. Tada postoje formule $A_i, A_i \Rightarrow B$ ranije u nizu, i za njih važi indukcijska hipoteza tj. $\Phi \vdash A \Rightarrow A_i$ i $\Phi \vdash A \Rightarrow (A_i \Rightarrow B)$. To znači da postoji dokaz $B_1,...,B_k$ po hipotezama iz $\Phi$ gde je:

$$B_{k-1} \equiv A \Rightarrow A_i$$

$$B_k \equiv A \Rightarrow (A_i \Rightarrow B).$$

Produžimo ovaj dokaz sledećim formulama:

$$B_{k+1} \equiv (A \Rightarrow (A_i \Rightarrow B)) \Rightarrow ((A \Rightarrow A_i) \Rightarrow (A \Rightarrow B)) \qquad Ax2$$

$$B_{k+2} \equiv (A \Rightarrow A_i) \Rightarrow (A \Rightarrow B) \qquad \text{M.P. za } B_k \text{ i } B_{k+1}$$

$$B_{k+3} \equiv A \Rightarrow B \qquad \text{M.P. za } B_{k-1} \text{ i } B_{k+2}$$

.

Tako dobijamo dokaz $B_1,...,B_{k+3}$ za formulu $A \Rightarrow B$ po hipotezama iz $\Phi$ tj. $F \vdash A \Rightarrow B$.

$B$ sledi prema generalizaciji. Na osnovu indukcijske hipoteze imamo $\Phi \vdash A \Rightarrow A_i$, pa na osnovu generalizacije sledi $\Phi \vdash (\forall x)(A \Rightarrow A_i)$ gde $x$ nije slobodna promenljiva u formulama iz $F \cup \{A\}$, dakle ni u formuli $A$. To znači da postoji dokaz $B_1,...,B_s \equiv (\forall x)(A \Rightarrow A_i)$. Produžavajući ovaj dokaz formulama:

$$B_{s+1} \equiv (\forall x)(A \Rightarrow A_i) \Rightarrow (A \Rightarrow (\forall x)A_i) \qquad Ax4$$

$$B_{s+2} \equiv A \Rightarrow (\forall x)A_i \qquad \text{M.P. za } B_s \text{ i } B_{s+1}$$

Dobijamo dokaz $B_1,...,B_{s+2}$ formule $A \Rightarrow (\forall x)A_i$ tj. formule $A \Rightarrow B$ po hipotezama $\Phi$. Dakle $\Phi \vdash A \Rightarrow B$.

■

**Teorema 5.1.3** Neka je $A$ zatvorena formula, a $\Phi$ skup formula. Tada važi

$$F \vdash A \text{ akko } F \cup \{\neg A\} \text{ nije konzistentan skup.}$$

Dokaz. $(\Leftarrow)$Neka $F \cup \{\neg A\}$ nije konzistentan skup. To znači da postoji formula $B$ tako da je $F \cup \{\neg A\} \vdash B \wedge \neg B$, tj. iz $F \cup \{\neg A\}$ se može dokazati "bilo šta" tj. $F \cup \{\neg A\} \vdash A$. Prema teoremi dedukcije imamo:

$$\Phi \vdash \neg A \Rightarrow A. \qquad (1)$$

Uvek važi sledeće:

$$\Phi \vdash A \Rightarrow A. \qquad (2)$$

Sada (1) i (2) prema Lemi 2.7.5 daju $\Phi \vdash A$.

$(\Rightarrow)$ Neka važi $\Phi \vdash A$. Tada važi i $F \cup \{\neg A\} \vdash A$. Kako važi još i $F \cup \{\neg A\} \vdash \neg A$, to onda sledi da skup $F \cup \{\neg A\}$ nije konzistentan.

■

Zbog obimnosti dokaza, za sledeće dve teoreme dajemo samo formulaciju.

**Teorema 5.1.4 (Lema Lindenbauma)** Svaki konzistantan skup formula je sadržan u nekom maksimalno konzistentnom skupu formula.

**Teorema 5.1.5** Svaki maksimalno konzistentan skup formula ima model.

**Teorema 5.1.6** Za svaki skup formula $\Phi$ i svaku formulu $A$ važi: ako je $A$ semantička posledica skupa $\Phi$, onda je $A$ sintaktička posledica skupa $\Phi$ tj.

$$\Phi \vDash A \;\Rightarrow\; \Phi \vdash A.$$

**Dokaz** Neka važi $\Phi \vDash A$. Pretpostavimo suprotno, da *nije* $\Phi \vdash A$. Tada je, prema teoremi 5.1.3, skup $F \cup \{\neg A\}$ konzistentan. Kako svaki konzistentan skup formula ima model, ima ga i skup $F \cup \{\neg A\}$. Neka $M \vDash F \cup \{\neg A\}$. Tada $M \vDash \Phi$ i $M \vDash \neg A$. Dalje, imamo $M \vDash \Phi$ i $\Phi \vDash A$ odakle sledi $M \vDash A$. Tada, pošto važi i $M \vDash \neg A$, imamo kontradikciju. Zato je $\Phi \vdash A$.

■

**Teorma 5.1.7 (Teorema kompletnosti za predikatski račun)** Za svaki skup formula $\Phi$ i svaku formulu $A$ važi: $A$ je semantička posledica skupa $\Phi$ akko $A$ je sintaktička posledica skupa $\Phi$ tj.

$$\Phi \vDash A \Leftrightarrow \Phi \vdash A.$$

**Posledica 5.1.1 (Teorema kompletnosti za predikatski račun za $\Phi = \varnothing$)** Za svaku formulu $A$ važi: $A$ je teorema teorije predikatskog računa akko je $A$ valjana formula tj.

$$\vDash A \Leftrightarrow \vdash A.$$

**Teorma 5.1.7 (Teorema kompaktnosti za predikatski račun)** Skup formula $\Phi$ ima model akko svaki konačan podskup od $\Phi$ ima model.

**Dokaz.** $(\Rightarrow)$ Ovaj smer trivijalno važi.

$(\Leftarrow)$Neka svaki konačan $F_0 \subseteq F$ ima model. Neka je $M \vDash F_0$. Pretpostavimo suprotno, da $\Phi$ nema model. Tada, prema Teoremi 5.1.3, skup $\Phi$ nije konzistentan tj. postoji formula $A$ takva da je $\Phi \vdash A \wedge \neg A$. Tada postoji konačan skup $F_0 \subseteq F$ takav da je $F_0 \vdash A \wedge \neg A$. Dalje, prema teoremi kompletnosti sledi $F_0 \vDash A \wedge \neg A$. Tako dobijamo $M \vDash F_0$ i $F_0 \vDash A \wedge \neg A$ odakle sledi $M \vDash A \wedge \neg A$. Kontradikcija.

■

# 6. Snaga jezika prvog reda

## 6.1 Elementarna klasa modela. Uopštena osobina prvog reda.

Jezik prvog reda tj. jezik logike prvog reda vrlo je pogodan i najviše korišćen jezik u matematici. No, i pored svih njegovih dobrih osobina pokazalo se da je u mnogim situacijama vrlo slab. Te probleme bismo mogli nazvati „problemima aksiomatizabilnosti“.

**Definicija 6.1.1** Klasa K modela jezika $L$ je **elementarna klasa**, ako postoji takva teorija (skup rečenica) $T$ na jeziku $L$ da je K klasa svih modela od $T$.

**Definicija 6.1.2** Klasa K je **bazna elementarna** ako postoji rečenica $A$ da je K klasa svih modela od $A$.

Elementarne klase su ustvari klase algebarskih sistema koje su aksiomatizovane u logici prvog reda tj. „opisive“ formulama prvog reda. Bazne elementarne klase su konačno opisive na jeziku prvog reda. Kažemo još da su one konačno aksiomatizovane. Mnoge klase algebarskih sistema su „po definiciji“ elementarne ili bazno elementarne (grupe, polja, mreže...). No, sledeće klase nisu elementarne: klasa konačnih Abelovih grupa, klasa konačnih polja, klasa konačnih uređenih skupova, klasa konačnih mreža itd.

**Teorema 6.1.1** Teorija $T$, koja ima modele ma koliko velike konačne kardinalnosti, ima i beskonačni model.

**Dokaz.** Neka je T teorija na jeziku $L$ koja ima modele ma koliko velike konačne kardinalnosti. Neka je jezik $L'$ dat sa:

$$L' = L \cup \{c_n : n \in \omega\},$$

gde je $\{c_n : n \in \omega\}$niz različitih konstantnih simbola koji ne pripadaju jeziku $L$. Posmatrajmo proširenje $T'$ teorije $T$ na jeziku $L'$:

$$T' = T \cup \{\neg(c_n = c_m) : m < n < \omega\},$$

dobijeno dodavanjem svakog elementa $c_n$ kao novog konstantnog simbola, i dodavanjem formule $\neg(c_n = c_m)$ kao nove aksiome za svako $m < n$.

U svakom konačnom podskupu $T''$ skupa $T'$ figuriše samo konačno mnogo konstanti, recimo $c_0,...,c_m$. Neka je $M$ model za $T$ koji sadrži bar $m+1$ elemenata i neka su $a_0,...,a_m$ različiti elementi modela *M*. Lako se vidi da je model $(M, a_0,...,a_m)$ model za $T''$ (na jeziku $L'' = L \cup \{c_0,...,c_m\}$). No, tada na osnovu teoreme kompaktnosti i $T'$ ima model. Osiromašenje tog modela do modela jezika *L* daje nam model za $T$. Jasno, svaki model od $T'$ je beskonačan, i model je za $T$.

■

Dakle, klasa konačnih modela mogih elementarnih klasa nije ponovo elementarna; osobina „konačnosti modela“ unutar elementarne klase je neopisiva formulama prvog reda. Teorema 6.1.1 pokazuje da ne postoji teorija $T$ čiji modeli su isključivo konačne kardinalnosti.

**Definicija 6.1.3** Neka je K klasa modela teorije Π i neka je P osobina od K. Kažemo da je P **uopštena osobina prvog reda** ako postoji skup rečenica Φ tako da je za sve modele $M \in K$:

M ima osobinu P akko M⊨ Φ.

Naprimer, „biti ciklična grupa“, „biti periodična Abelova grupa“, „biti polje konačne karakteristike“ nisu uopštene osobine prvog reda (u odgovarajućim klasama). Pošto su dokazi slični za sve te osobine, dokazaćemo tvrđenje za poslednju od njih:

**Teorema 6.1.2** Neka je $T$ neka teorija na jeziku α = {+, ·, 0, 1}, koja za svoje modele ima polja koliko god hoćemo velike karakteristike. Tada je i neko polje karakteristike 0 model za $T$.

**Dokaz.** Neka je $T'$ obična teorija polja. Dovoljno je uočiti teoriju

$$\Phi = T \cup T' \cup \{p \cdot 1 \neq 0,\ p \text{ je prost broj}\}.$$

Lako je videti da svaki konačan skup $F_0 \subseteq F$ ima model pa na osnovu teoreme kompaktnosti i Φ ima model- to je polje karakteristike 0.

■

Pomoću teoreme kompaktnosti možemo dokazati analogne rezultate za bazne elementarne klase. Recimo, sledeće klase nisu bazne elementarne: klasa beskonačnih Abelovih grupa, klasa klasa beskonačnih polja, klasa beskonačnih uređenih skupova itd.

**Teorema 6.1.3** Ako teorija $T$ ima konačne modele koliko god hoćemo velike kardinalnosti, onda klasa beskonačnih modela nije bazna elementarna klasa.

**Dokaz.** Pretpostavimo da je $K = Mod(\{A\})$, gde je $Mod(F)$oznaka za klasu svih modela teorije Φ, klasa svih beskonačnih modela teorije $T$. Jezik $L$ teorije $T$ proširimo novim konstantnim simbolima $\{c_i : i \in \omega\}$, i formirajmo teoriju

$$T' = \{\neg A\} \cup \{\neg(c_i \equiv c_j) : i < j < \omega\} \cup T .$$

Pošto za svaki konačan model $M$ teorije $T$ važi $M \vDash \neg A$, onda svaki konačan podskup teorije $T'$ ima model, pa po teoremi kompaktnosti i $T'$ ima model $M_1$. No $M_1$, tačnije restirkcija od $M_1$ na jezik $L$, jeste beskonačan model teorije $T$ u kojem važi $\neg A$, što je kontradikcija sa polaznom pretpostavkom.

■

U opštem slučaju možemo govoriti o osobini koja je opisiva formulom prvog reda unutar neke elementarne klase:

**Definicija 6.1.4** Neka je K klasa modela teorije Π i P osobina od K. Kažemo da je P osobina prvog reda ako postoji rečenica *A* takva da je za sve modele M $\in$ K važi:

$$\mathrm{M} \models A \text{ akko M ima osobinu P.}$$

Na primer, osobina „imati tačno *n* elemenata" jeste osobina prvog reda, a „imati beskonačno mnogo elemenata" u mnogim klasama nije osobina prvog reda. Pomoću teoreme kompaktnosti se može dokazati da sledeće osobine *nisu* osobine prvog reda: „biti polje karakteristike 0", „biti realno zatvoreno polje", „biti algebarsko zatvoreno polje", „biti deljiva Abelova grupa" itd.

## 6.2 Teorema Löwenheim-Skolem-Tarski

Mnogi matematičari smatraju da se „klasična" matematika završava pronalaskom neeuklidske geometrije u XIX veku od strane Bolyaia (1802-1860) i Lobačevskog (1793-1856). Posle toga Frege formalno konstruiše logiku predikata, a Cantor (1845-1918) naivnu teoriju skupova. Tada se počinju masovno javljati i „nestandardni" modeli: kad god se neki „standardni" sistem pokušao aksiomatizovati unutar predikatskog računa prvog reda, videlo se da ta aksiomatizacija nije kategorična i da data aksiomatska teorija ima modele koji nisu izomorfni sa polaznim sistemom. Možemo sprovesti jedno veoma opšte razmatranje: neka je M neki beskonačni algebarski sistem. Tada klasa { $\mathrm{M}_1$: $\mathrm{M}_1 \cong \mathrm{M}$ } nikad nije elementarna! To znači da ni za jednu beskonačnu relacijsko-operacijsku strukturu ne postoji skup formula prvog reda, kojem bi ta struktura bila (do na izomorfizam) jedinstveni model.

**Teorema 6.2.1 (Löwenheim-Skolem-Tarski)** Ako teorija $T$ ima beskonačan model, onda ima beskonačne modele proizvoljne zadate kardinalnosti

$$\alpha \geq \|\mathscr{L}\|.$$

**Dokaz.** Neka je $c_\xi$, $\xi < \alpha$ niz različitih konstantnih simbola koji ne pripadaju jeziku $\mathscr{L}$. Neka je T′ proširenje teorije T dato sa:

$$T' = T \cup \{\neg(c_\xi \equiv c_\eta) : \eta < \xi < \alpha\}.$$

Svaki konačan podskup od $T'$ ima model (to je onaj beskonačni model za $T$, tačnije obogaćenje tog modela). Prema teoremi kompaktnosti onda i $T$ ima model i njegova kardinalnost ne premašuje

$$\| \mathcal{L} \cup \{c_\xi : \xi < \alpha\} \| = \alpha.$$

Pošto su interpretacije konstanti u $\mathcal{M}$ različiti elementi skupa M, onda $\alpha \leq |M|$ tj. $|M| = \alpha$ .

∎

Prve aksiomatizacije teorije brojeva potiču još iz 1861, kad je Hermann Grassmann izdao knjigu u kojoj se na aksiomatskoj osnovi zasniva teorija celih brojeva. Zatim, 1888. godine Richard Dedekind daje aksiomatizaciju teorije brojeva, koja je danas poznata pod nazivom "Peanove aksiome". Naime, Peano 1891. godine preuzima ovu aksiomatiku i uvodi znatno pogodniju simboliku. Pokušaji da se Dedekindove aksiome pretoče u potpuno formalnu teoriju, i da se prirodni brojevi opišu do izomorfizma teorijom predikatskog računa prvog reda nisu uspeli. Svaki formalni jezik ograničava aksiomu indukcije na svojstva koje je moguće definisati tim jezikom. Jedna takva formalna teorija je tzv. Peanova aritmetika ili teorija brojeva. *Standardni model* teorije brojeva je $\langle N,+,\cdot,S,0\rangle$ gde je $N$ skup prirodnih brojeva, S funkcija sledbenik a +, $\cdot$ i 0 imaju svoje uobičajeno značenje. Sve druge (neizomorfne standardnom) modele nazivamo *nestandardnim modelima*. Nazovimo kompletnom teorijom brojeva skup svih rečenica $A$ jezika $L$ koje su tačne u standardnom modelu. Postojanje nestandardnih modela kompletne teorije brojeva ustanovio je Skolem. Posredstvom prethodne teoreme, sledeća teorema je takođe jedna od posledica teoreme kompaktnosti:

**Teorema 6.2.2** Kompletna teorija brojeva ima nestandardne modele.

**Dokaz.** Kako ta teorija ima beskonačan (standardan) model, prema Teoremi 6.2.1 ta teorija ima modele ma koje kardinalnosti. Svaki neprebrojivi model kompletne teorije brojeva je nestandardni.

∎

Intuitivna predstava o beskonačno malim i beskonačno velikim brojevima je na neki način osnova diferencijalnog i integralnog računa. Još pre 300 godina Leibniz je pretpostavljao da se “račun” može strogo razviti u jednom proširenom sistemu skupa realnih brojeva, koji bi sadržao beskonačno male brojeve kao “korisnu fikciju” a ne kao metafizički fakt. On je formulisao princip da “idealni brojevi” moraju imati ista svojstva kao i “konačni brojevi” ali nije precizirao na koja svojstva se to odnosi. Taj problem je ostao nerešen sve do 1960. godine, kada je teorija modela dala jedan od najlepših rezultata matematičkoj analizi. Abraham Robinson je u svom radu dao tačnu formalizaciju matematičkog principa predloženog od strane Leibniza. Polazna tačka je sledeća teorema, takođe posledica teoreme kompaktnosti:

**Teorema 6.2.3** Postoji nearhimedovo uređeno polje elementarno ekvivalentno uređenom polju realnih brojeva.

*Napomena.* Teorija uređenih polja je teorija prvog reda na jeziku $\{\leq, +, \cdot, 0, 1\}$. Ona ima sve aksiome teorije polja (Primer 2.4.4), linearnog uređenja(Primer 2.4.5) i još:

$$x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$$
$$x \leq y \Rightarrow x \cdot z \leq y \cdot z, z \geq 0\,.$$

Uređeno polje $\langle F, \leq, +, \cdot, 0, 1 \rangle$ zovemo *Arhimedovim*, ako za svaka dva pozitivna elementa $a$ i $b$ postoji prirodan broj $n$ tako da je $n \cdot a \geq b\,n$. Teorema 6.2.3 u stvari pokazuje da ta osobina nije uopštena osobina prvog reda.

**Dokaz.** Neka je $T$ skup svih rečenica jezika $\alpha = \{\leq, +, \cdot, 0, 1\}$, koje su tačne u uređenom polju realnih brojeva. Neka je $c$ neki konstantni simbol, različit od 0 i 1. Neka je proširenje $T'$ skupa $T$ dato sa:

$$T' = T \cup \{n \cdot 1 \leq c : n \in \omega\}.$$

Za svaki konačan podskup $T'' \subseteq T'$ postoji model (to je baš uređeno polje realnih brojeva). Prema teoremi kompaktnosti onda $T'$ ima model, koji naravno nije arhimedovo uređeno polje.

■

Na kraju ovog poglavlja ćemo dati još neke teoreme, čiji se dokazi bitno oslanjaju na teoremu kompaktnosti. Tok dokaza i primena pomenute teoreme ide vrlo prirodno, tako da ćemo dokaze izostaviti. Prvo ćemo dati dva primera.

**Primer 6.2.1** Grupa $G$ se može urediti akko se svaka njena konačno generisana grupa može urediti.

*Napomena.* Grupa $(G,\cdot)$ je uređena relacijom $\rho$ skupa $G$ ako je $\rho$ relacija totalnog poretka i za sve $x, y, u, v \in G$ važi:

$$x \,\rho\, y \;\wedge\; u \,\rho\, v \Rightarrow x\cdot y \;\rho\; u\cdot v \qquad \text{(„kongruentnost“).}$$

**Primer 6.2.2** Neka je $(G,*)$ grupoid. Za relaciju $\rho$ skupa $G$ kažemo da je istaknuta relacija ako za sve $x, y, z \in G$ važi:

$$x \,\rho\, x$$
$$x * y \;\;\rho\;\; u * v \Rightarrow \;\neg\; x \,\rho\, y.$$

Grupoid $G$ ima neku istaknutu relaciju akko svaki njegov konačno generisan podgrupoid ima istaknutu relaciju.

Primetimo da ove primere možemo obuhvatiti sledećim tvrđenjem:

**Teorema 6.2.4** Neka je $M$ relacijsko- operacijska struktura i Φ skup univerzalnih formula na jeziku te strukture proširenim izvesnim relacijskim simbolima $\rho_i$ (nekih dužina). Tada se u skupu M mogu definisati relacije $\rho_i$ takve da važe formule Φ akko je to moguće učiniti u svakoj konačno generisanoj podstrukturi od *M*.

Ovo poglavlje zatvorićemo još jednim primerom:

**Primer 6.2.3** Neka je $M = \langle M, \leq, ... \rangle$ beskonačan model, takav da je $\leq$ dobro uređenje na M. Tada postoji model $M' = \langle M', \leq', ... \rangle$ elementarno ekvivalentan sa , takav da $\leq$ nije nije dobro uređenje. Drugim rečima, osobina „biti dobro uređen" je neopisiva jezikom prvog reda.

# 7. Šta dalje?

Predikatski račun prvog reda je od tridesetih godina XX veka zauzimao centralno mesto u matematičkoj logici. Ali, nije uvek bilo tako. Naime, do početka XX veka, predikatski račun prvog reda vodio je oštru borbu sa tzv. predikatskim računom drugog reda. Međutim, ubrzo se uvidelo da taj račun nema a predikatski račun prvog reda ima neke dobre osobine, veoma važne za primenu logike.

Za razliku od predikatskog računa prvog reda, predikatski račun drugog reda dozvoljava kvantifikovanje po relacijskim i funkcijskim simbolima, što ga već na prvi pogled čini nadmoćnim. Tako, na primer, ako bi se $X(x)$ interpretiralo kao „element $x$ je u relaciji $X$ “, odnosno „element $x$ ima svojstvo $X$ “ i slobodnije se zapisivalo sa $x \in X$, onda bi formula $(\exists X)(\exists x) x \in X$ bila tačna u svakom modelu čiji je univerzum neprazan. S druge strane, formula $(\exists X)(x \in X \wedge x \notin X)$ bi uvek bila netačna. Dalje, formula $(\exists \prec)(11 \prec 2)$ je tačna u skupu prirodnih brojeva (dovoljno je uzeti obrnuti poredak: $a \prec b$ akko $b < a$, gde je $<$ „prirodni“ poredak prirodnih brojeva), dok je $(\forall \prec)(1 \prec 2)$ netačna formula.

Pojavljivanje predikatskog računa prvog i drugog reda se, istorijski gledano, vezuje za problem zasnivanja matematike, koji se pojavio u drugoj polovini XIX veka. Posebno je bio važan i problem aksiomatizacije strukture prirodnih brojeva, kao osnove za dalja zasnivanja.

Đuzepe Peano je krajem XIX veka dao sledeću aksiomatizaciju prirodnih brojeva:

- $Ax1$ Nijedan broj nema nulu kao sledbenika (sledbenik broja $n$ je $n+1$).
- $Ax2$ Dva različita broja imaju dva različita sledbenika.
- $Ax3$ Ako neko svojstvo $T$ važi za nulu i ako, kad god važi za $n$, važi i za $n+1$, tada $T$ važi za svaki prirodan broj.

Ove tri aksiome čine tzv. Peanovu aritmetiku drugog reda. Prve dve aksiome su vrlo jednostavne, i nikad nisu dovođene u pitanje. No, sa trećom aksiomom je situacija drugačija. Da bismo nju do kraja sagledali, uvedimo pojam induktivnog skupa. Kažemo da je skup brojeva $I$ induktivan ako:

1. $0 \in I$
2. $n \in I \Rightarrow n+1 \in I$ .

(Tako su, na primer, skupovi celih, racionalnih i realnih brojeva induktivni.) Treća aksioma tvrdi da je skup prirodnih brojeva najmanji induktivni skup, tj. sadržan u svakom drugom induktivnom skupu. Ona predstavlja osnovu za svaki dokaz izveden matematičkom indukcijom. Danas je jezik Peanove aritmetike nešto širi (vidi Primer 3.4.6 i Primer 3.4.7) Pretpostavlja se da aksioma matematičke indukcije uz pomoć ostalih dveju aksioma ne samo važi, već i do kraja (rekli bismo kategorički, do na izomorfizam itd.) opisuje strukturu prirodnih brojeva $N$ , ali i svih njegovih podskupova $P(N)$. To možemo zapisati kao

$$(N, P(N), s(\ ), 0, +, \cdot, \leq) \models \text{“aksioma indukcije"}$$

gde je $s(\ )$ operacija dodavanja jedinice. Očekivalo se da nijedna druga struktura ne zadovoljava aksiome prirodnih brojeva, ali i da se iz tih aksioma (u okviru predikatskog računa drugog reda) može izvesti svako tvrđenje o prirodnim brojevima. Da bi se to pokazalo, bilo je nužno prvo pokazati tzv. *stav kompletnosti za predikatski račun drugog reda* (primenjenog na Peanovu aritmetiku) koji glasi:

*Sve što važi za* $(N, P(N), s(\ ), 0, +, \cdot, \leq)$ *i izrazivo je u predikatskom računu drugog reda, može se dokazati iz Peanovih aksioma drugog reda.*

Međutim, nije moguće jedinstveno opisati prirodne brojeve, niti je moguće dokazati gornje tvrđenje. Dokaz da ne postoji stav kompletnosti za Peanovu aritmetiku ekvivalentan je sa propašću pokušaja da se do kraja opišu prirodni brojevi. Označimo sa $T$ skup (zatvorenih) formula u predikatskom računu prvog ili drugog reda koji može biti i beskonačan. Pri tome je od ranije poznat pojam neprotivrečnog i protivrečnog skupa. Takođe znamo da $T$ ima model ako postoji struktura (model) u kojem važe sve formule iz $T$ . Tako, na primer, $(N, P(N), s(\ ), 0, +, \cdot, \leq)$ čini model za sve aksiome Peanove aritmetike.

Primer jedne „dobre“ logike, kako je to pokazao Gödel 1930., je predikatski račun prvog reda. Činjenica da za predikatski račun prvog reda važi stav kompletnosti, kao i nemogućnost istog za predikatski račun drugog reda (što ćemo uskoro pokazati), označio je pobedu predikatskog računa prvog reda nad predikatskim računom drugog reda. Ne postoji željeni, potpun i jednoznačan opis prirodnih brojeva u predikatskom računu prvog reda.

Postavlja se pitanje: da li je logika prvog reda dovoljna za sva matematička rasuđivanja? Postoje mišljenja da sve matematički jasno formulisane rečenice možemo izraziti u logici prvog reda, a neformalan pojam dokazivosti poklapa se sa formalnim pojmom dokaza u logici prvog reda. No, ako se ta teza i prihvati teorijski, još je daleko od toga da se ona primeni u praksi. Recimo, ako bismo hteli tu tezu primeniti na teoriju periodičnih Abelovih grupa, morali bismo aksiomatizovati ne samo teoriju grupa nego i osobine prirodnih brojeva, koje su neophodne za izvođenje rasuđivanja. Takvi primeri nisu retki, naime, nijedna beskonačna struktura ne poseduje potpun opis na jeziku predikatskog računa prvog reda. Dakle, postoji dovoljno razloga za uvođenje drugih logičkih sistema kao što su višesortna logika prvog reda, ω- logika, slaba logika drugog reda, razne beskonačne logike kao i logike sa novim kvantifikatorom. Kao ilustraciju, potrebićemo primer proširenja logike prvog reda novim kvantifikatorom.

## 7.1 Jezik L(Q)

Posmatrajmo logiku L(Q) sa kvantifikatorom „ postoji neprebrojivo mnogo“. Ovaj jezik je prvi izučavao Mostowski, koji je predložio da se nađe „Gödelovska“ teorema kompletnosti za L(Q). I. Keisler u svom radu između ostalog dokazuje teoremu kompletnosti za L(Q). Njegova teorema o kompletnosti pokazuje da takav jedan kvantifikator predstavlja ustvari matematički tačan model za neformalan pojam „mnogo“. U toj logici teorema kompaktnosti sledi iz teoreme kompletnosti na savršeno analogan način kao u logici prvog reda.

**Definicija 7.1.1** Neka je *L* logika prvog reda sa jednakošću sa prebrojivo mnogo predikatskih, funkcijskih i konstantnih simbola. **Jezik L(Q)** se dobija dodavanjem novog kvantifikatora (Q*x*), koji čitamo „postoji neprebrojivo mnogo *x*“, jeziku L logike prvog reda *L*.

**Definicija 7.1.2 Logika $\mathscr{L}$(Q)** se definiše kao uređena trojka ($\mathbb{G}$,⊧, Sent) gde je $\mathbb{G}$ tzv. *semantički domen* tj. familija svih modela jezika L,⊧ *relacija zadovoljenja*, Sent *skup rečenica* tj. skup formula bez slobodnih promenljivih na jeziku L(Q).

**Definicija 7.1.3 Formule** jezika L(Q), u oznaci *Form*(L(Q)), definišemo kao najmanji skup $F$ koji sadrži sve elementarne formule jezika $L$ i ima osobinu:
ako $A, B \in F$ i $y$ je promenljiva, onda formule $A \wedge B, \neg A, (\exists y)A, (\forall y)A, (Qy)A \in F$.

**Definicija 7.1.4 Relacija zadovoljenja** ⊧ je binarna relacija između objekata semantičkog domena $\mathfrak{S}$ i elemenata skupa Sent, i definišemo je u nekoliko koraka: *slab model* za L(Q) jeste uređen par $(M, q)$ tako da je $M$ model jezika L, a $q$ je skup podskupova od $F$ (nosač za *M*). Neka je $(a_1,...,a_n)$ data valuacija, $A(v_1,...,v_n) \in Form(L(q))$. Pojam „$A$ važi na $(M, q)$ za valuaciju $(a_1,...,a_n)$“, u oznaci $(M, q) \models A[a_1,...,a_n]$ definišemo indukcijom po složenosti formule $A$. Za sve veznike i kvantifikatore sem $(Qx)$ važe uobičajene definicije, a za $(Qx)$ važi:
$(M, q) \models (Qv_m)A[a_1,...,a_n]$ akko
$\{b \in M : (M, q) \models A[a_1,...,a_{m-1}, b, a_{m+1},...,a_n]\} \in q$.

Neka je $M$ model za L tj. $M \in \mathfrak{S}$, $A(v_1,...,v_n) \in Form(L(q))$, $(a_1,...,a_n)$ valuacija. Tada definišemo M $\models A[a_1,...,a_n]$ akko $(M, q) \models A[a_1,...,a_n]$, gde je $q$ skup svih neprebrojivih podskupova od $F$. Konačno, ako je $A \in Sent$, $M \in \mathfrak{S}$, onda relaciju zadovoljenja ⊧ definišemo: M ⊧ $A$ akko M ⊧ $A$ u gore definisanom smislu. Tada je **standardan model** za *A*.

**Definicija 7.1.5 Aksiome (šeme)** za L(Q) su:

$Ax0$ sve aksiome šeme za $\mathcal{L}$ zajedno sa aksiomama jednakosti

$Ax1$ $\neg(Qx)(x = y \vee x = z)$

$Ax2$ $(\forall x)(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((Qx)A \Rightarrow (Qx)B)$, gde $A, B \in Form(L(Q))$

$Ax3$ $(Qx)A(x,...) \Leftrightarrow (Qy)A(y,...)$, gde je $A(x,...)$formula jezika L(Q) u kojoj se *y* ne pojavljuje, a $A(y,...)$ je dobijeno od nje zamenom svakog slobodnog pojavljivanja *x* sa *y*

$Ax4$ $(Qy)(\exists x)A \Rightarrow (\exists x)(Qy)A \vee (Qx)(\exists y)A$, gde $A \in Form(L(Q))$.

**Napomena.** Nije teško videti da svaki model $M$ jezika L jeste standardan model za aksiome jezika L(Q). S druge strane, može se naći slab model koji ne zadovoljava sve aksiome. No, ako je q skup svih *beskonačnih* podskupova od $F$, onda je $(M, q)$ slab model za aksiome od L(Q).

**Definicija 7.1.6 Pravila izvođenja** za L(Q) su modus ponens i generalizacija.

**Definicija 7.1.7 Relacija konsekvencije** $\vdash$ na *Form*(L(Q)) definiše se na potpuno analogan način kao za logiku prvog reda.

Primetimo da, ako važi (uopštena) teorema kompletnosti za logiku L(Q), onda za nju važi i *teorema kompaktnosti*: neka je $F \in Sent$, tada Φ ima standardan model akko svaki konačan podskup od Φ ima model. Dokaz je analogan dokazu u slučaju logike prvog reda.

**Teorema 7.1.1 (Teorema kompletnosti za L(Q))** Neka je Φ skup rečenica od L(Q). Tada Φ ima standardan model akko je Φ konzistentno u L(Q).

Prateći razvoj matematike uopšte, može se primetiti jedna zakonitost: kad god se neka oblast matematike izuči dovoljno detaljno, javlja se tendencija ka stvaranju obuhvatnije teorije, koja je po pravilu za jedan stepen apstraktnosti iznad stare teorije. To se desilo i sa teorijom modela: poslednjih godina se rađa tzv. apstraktna teorija modela. Ona se počinje stvarati u radovima Barwisea, koji 1974. stavlja apstraktnu teoriju modela na čvrstu osnovu i daje precizne aksiome.

Pitanje koje se postavlja je: koje uslove treba zadovoljavati jezik L da bi se osigurala egzistencija „prirodne“ osobine kompaktnosti? Jedna od najdubljih teorema na tu temu glasi:

**Teorema 7.1.2** Logika prvog reda je jedina logika koja je zatvorena u odnosu na $\wedge$, $\neg$, $\exists$ i zadovoljava teoremu kompaktnosti i teoremu Löwenheim-Skolema.

# Literatura


[1] S.M. Srivastava, *A Course on Mathematical Logic*, New York, 2008.

[2] Э. Мендельсон, *Введение в математическую логику*, Москва, 1976.

[3] Г.Дж. Кейслер, Чэн Чень-Чунь, *Теория непрерывных моделей*, Москва, 1971.

[4] Douglas Hofstadter, *Gödel, Escher, Bach*, New York, 1979.

[5] P. Janičić, *Matematička logika u računarstvu*, Beograd, 2008.

[6] V. Devidé, *Matematika kroz kulture i epohe*, Zagreb, 1979.

[7] R.Madaràsz, *Od skupova do univerzalnih algebri*, Novi Sad, 2006.

[8] B. Šešelja, Algebra I,

[9] Kac- Ulam, *Matematika i logika- retrospektiva i perspektiva*, Zagreb, 1977.

[10] S. Milić, *Elementi matematičke logike i teorije skupova*, Beograd, 2001.

# Kratka biografija

Zorica Borčić rođena je 14.marta 1984. godine u Vukovaru. Osnovnu školu završila je u Čelarevu, te školovanje nastavila u gimnaziji “20. Oktobar” u Bačkoj Palanci. Gimnaziju je završila sa prosekom ocena 5,00 u svim razredima i nosilac je Vukove diplome. Na Prirodno-matematički-fakultet Univerziteta u Novom Sadu upisala se 2003. godine, smer Diplomirani matematičar - profesor matematike. Sve ispite predviđene planom i programom položila je u junskom ispitnom roku 2009. godine i time stekla uslov za odbranu diplomskog rada.

Novi Sad, septembar 2009. Zorica Borčić

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

| | |
|---|---|
| Redni broj:<br>**RBR** | |
| Identifikacioni broj:<br>**IBR** | |
| Tip dokumentacije:<br>**TD** | monografska dokumentacija |
| Tip zapisa:<br>**TZ** | tekstualni štampani materijal |
| Vrsta rada:<br>**VR** | diplomski rad |
| Autor:<br>**AU** | Zorica Borčić |
| Mentor:<br>**MN** | dr Rozàlia Sz. Madaràsz |
| Naslov rada:<br>**NR** | Snaga formalnih sistema |

Jezik publikacije: srpski (latinica)
**JP**

Jezik izvoda: s/ en
**JI**

Zemlja publikovanja: Republika Srbija
**ZP**

Uže geografsko područje: Vojvodina
**UGP**

Godina: 2009.
**GO**

Izdavač: autorski reprint
**IZ**

Mesto i adresa: Novi Sad, Trg D. Obradovića 4
**MA**

Fizički opis rada: (7/93/0/1/1/0/0)
(broj poglavlja/strana/lit. citata/tabela/slika/grafika/priloga)
**FO**

Naučna oblast: matematika
**NO**

Naučna disciplina: matematička logika
**ND**

Predmetne odrednice, ključne reči: Formalne teorije, iskazna logika, logika prvog reda, algebra

**PO**
**UDK**

Čuva se:
**ČU**

Važna napomena:
**VN**

Izvod: Ovaj rad proučava formalne teorije, iskaznu logiku i logiku prvog reda. U njemu je sadržano i jedno proširenje logike prvog reda. Rad će pokušati da pruži uvid u snagu formalnih sistema pri formalizaciji u matematici.
**IZ**

Datum prihvatanja teme od strane
NN veća: septembar 2009.
**DP**

Datum odbrane: septembar 2009.
**DO**

Članovi komisije:

**KO**

| | |
|---|---|
| Predsednik: | dr Branimir Šešelja, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu |
| Član: | dr Siniša Crvenković, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u novom sadu |
| Mentor: | dr Rozàlia Sz. Madaràsz, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu |

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE
KEY WORD DOCUMENTATION

| | |
|---|---|
| Acession number:<br>**ANO** | |
| Identification number:<br>**INO** | |
| Document type:<br>**DT** | monograph type |
| Type of record:<br>**TR** | printed text |
| Contents code:<br>**CC** | graduation thesis |
| Author:<br>**AU** | Zorica Borčić |
| Mentor:<br>**MN** | dr Rozàlia Sz. Madaràsz |
| Title:<br>**TI** | Power of formal systems |
| Language of text:<br>**LT** | Serbian (Latin) |

| | |
|---|---|
| Language of abstract: **LA** | s/ en |
| Country of publication: **CP** | Republic of Serbia |
| Locality of publication: **LP** | Vojvodina |
| Publication year: **PY** | 2009. |
| Publisher: **PU** | author’s reprint |
| Publication place: **PP** | Novi Sad, Trg D. Obradovića 4 |
| Physical description: **PD** | (7/93/0/1/1/0) |
| Scientific field: **SF** | mathematics |
| Scientific discipline: **SD** | mathematical logic |
| Subject, key words: **SKW** | Formal theories, propositional logic, first order logic, algebra |

**UC**

Holding data:
**HD**

Note:
**N**

Abstract: This thesis is about formal theories, propositional and first order logic. It also contains one expansion of first order logic. This paper should try to give an insight to power of formal systems in formalisation in mathematics.
**AB**

Accepted on Scientific board on: September 2009
**AS**

Defended: September 2009.
**DE**

Thesis Defend board:
**DB**

President: Dr Branimir Šešelja, full professor, Faculty of Science, Novi Sad

Member: Dr Siniša Crvenković, full professor, Faculty of Science, Novi Sad

Mentor: Dr Rozàlia Sz. Madaràsz, full professor, Faculty of Science, Novi Sad