UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA
MATEMATIKU I INFORMATIKU

Tatjana Đurin

KOMPOZICIJE RASPLINUTIH RELACIJA I RELACIJSKE JEDNAČINE

-diplomski rad-

Novi Sad, 2014

Sadržaj

Predgovor

U savremenoj eri informacija javlja se potreba za teorijom koja sistematski može da formuliše ljudsko znanje. Prilikom modeliranja netrivijalnih pojava, kao što su upravljanje sistemima, teorija odlučivanja, ekstrakcija znanja, optimizacija i dr. prisutna je izvesna neodređenost. Pored potpune tačnosti (ili pripadanja nekoj kolekciji) i potpune netačnosti (ili nepripadanja) potrebno je uzeti u obzir i druge ocene, tj. stepene tačnosti ili pripadanja.
Šezdesetih godina prošlog veka nastaje rasplinuta (eng. fuzzy) logika, teorija čiji je cilj unapređenje dotadašnjeg načina formiranja modela realnosti. Začetnik rasplinute logike je Lotfi A. Zadeh. On je u [6] istakao potrebu za „drugačijom matematikom", kako bi se sagledali određeni aspekti složenih sistema. Zadeh uvodi rasplinute skupove čije granice nisu jasno određene. Ovakav pristup koji priznaje postepeni prelaz od pripadanja do nepripadanja nekoj kolekciji, od tačnog do netačnog, od biti u relaciji do toga da elementi dva ili više skupova nisu u relaciji, veliku primenu ima u modeliranju ljudskog rezonovanaja.
Tema ovog rada su kompozicije rasplinutih relacija i rasplinute relacijske jednačine. Pojam rasplinutog skupa, osnovne operacije u teoriji rasplinutih skupova i njihove osobine navedeni su u prvom delu ovog rada.
Drugo poglavlje posvećeno je logičkim operacijama u teoriji rasplinutih skupova, negaciji, implikaciji i ekvivalenciji, kao i trougaonim normama i konormama. Kao što je rasplinuti skup uopštenje klasičnog skupa, tako se i pojam relacije generalizuje pojmom rasplinute relacije. Glavni deo ovog rada jeste treće poglavlje u kome su obrađene rasplinute relacije, kompozicije rasplinutih relacija i njihova svojstva. U ovom delu takođe se razmatraju i rasplinute relacijske jednačine, pitanje njihove rešivosti i postojanje najvećeg, odnosno najmanjeg rešenja.

Zahvaljujem se dr Branimiru Šešelji i dr Ivici Bošnjaku na korisnim primedbama i sugestijama, msc Samiru Zahiroviću na neiscrpnim idejama i predlozima. Najveću zahvalnost dugujem svom mentoru, dr Rozáliji Madarász Szilágyi, na usmeravanju u svim fazama izrade ovog rada.

Tatjana Đurin

Glava 1

Rasplinuti skupovi

1.1 Klasični i rasplinuti skupovi

Skup je fundamentalan pojam u matematici. Intuitivno se može opisati kao kolekcija objekata povezanih nekim svojstvima. Jasno je da neki element pripada ili ne pripada klasičnom skupu; svaka druga mogućnost se isključuje. Klasični skupovi i njihove operacije mogu se predstaviti pomoću karakterističnih funkcija.

Neka je X skup i A podskup od X. Karakteristična funkcija skupa A se definiše sa

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & ako\ \ x \in A \\ 0, & ako\ \ x \notin A \end{cases} .$$

Rasplinute (eng. fuzzy) skupove definisao je L. Zadeh u radu [7] kao klasu sa kontinuum mnogo stepena pripadnosti. Dakle, rasplinuti skup A u referentnom nosaču X karakteriše funkcija pripadnosti A koja svakom elementu $x \in X$ dodeljuje realan broj $A(x) \in [0,1]$, pri čemu je $A(x)$ stepen pripadnosti elementa x rasplinutom skupu A.

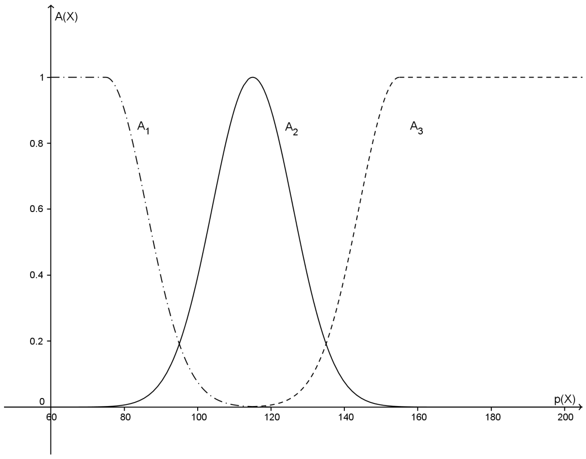
Definicija 1.1 Rasplinuti (fuzzy) skup A *(rasplinuti podskup od* X *) je preslikavanje*

$$A : X \to [0,1],$$

gde je $A(x)$ *stepen pripadnosti elementa* x *rasplinutom skupu* A.
Kolekciju svih rasplinutih podskupova skupa X *obeležavamo sa* $\mathcal{F}(X)$.

Rasplinuti skupovi su generalizacije klasičnih skupova koje predstavljamo pomoću karakterističnih funkcija $\chi_A : X \to \{0,1\}$. U ovom slučaju, $A(x) = 0$ znači da element x ne pripada skupu A, dok $A(x) = 1$ predstavlja njegovu potpunu pripadnost. Nasuprot klasičnom slučaju, kod rasplinutih skupova dozvoljeni su i drugi stepeni pripadnosti.
Sledeći primer ilustruje kako fazi skupovi mogu modelirati lingvističku nepouzdanost.

Primer 1.2 *Rasplinuti skupovi se od nedavno koriste u kontroli kardiovaskularne varijabilnosti.*



Na primer, neka su A_1, A_2, A_3 rasplinuti skupovi definisani tako da je stepen pripadanja osobe X skupu A_1, A_2 ili A_3 izražen na sledeći način

$$A_1(X) = \begin{cases} 1, & ako\ 60 \leq p(X) < 75 \\ e^{-\frac{(75-p(X))^2}{242}}, & ako\ 75 \leq p(X) < 115 \\ 0, & ako\ 115 \leq p(X) \end{cases},$$

$$A_2(X) = \begin{cases} 0, & ako\ 60 \leq p(X) < 75 \\ e^{-\frac{(115-p(X))^2}{242}}, & ako\ 75 \leq p(X) < 155 \\ 0, & ako\ 155 \leq p(X) \end{cases},$$

$$A_3(X) = \begin{cases} 0, & ako\ 60 \leq p(X) < 115 \\ e^{-\frac{(155-p(X))^2}{242}}, & ako\ 115 \leq p(X) < 155 \\ 1, & ako\ 155 \leq p(X) \end{cases},$$

pri čemu je $p(X)$ gornji krvni pritisak osobe X. Dakle, stepen pripadanja osobe X skupu A_1, A_2 ili A_3 je veći ukoliko je njegov gornji krvni pritisak nizak, normalan ili povišen.

1.2 Osnovne operacije sa rasplinutim skupovima

Neka je $\mathcal{F}(X)$ kolekcja rasplinutih skupova na datom nosaču skupa X.

Definicija 1.3 *Neka $A, B \in \mathcal{F}(X)$. Kažemo da je rasplinuti skup A* **podskup** *rasplinutog skupa B ako*

$$A(x) \leq B(x), \forall x \in X,$$

što označavamo sa $A \leq B$. Prazan (rasplinuti) skup $\emptyset$ je definisan kao preslikavanje $\emptyset$ tako da važi $\emptyset(x) = 0, \forall x \in X$, a ceo skup X kao preslikavanje X tako da je $X(x) = 1, \forall x \in X$.

Posmatrajmo prvo klasične skupove A i B.

Unija skupova A i B je $A \cup B = \{x \in X \mid x \in A \ \ ili \ \ x \in B\}$. Njena karakteristična funkcija je

$$\chi_{A \cup B}(x) = max\{\chi_A(x), \chi_B(x)\}.$$

Za presek $A \cap B = \{x \in X \mid x \in A \ \ i \ \ x \in B\}$ karakteristična funkcija je

$$\chi_{A \cap B}(x) = min\{\chi_A(x), \chi_B(x)\}.$$

Karakteristična funkcija komplementa od A u X, $\overline{A} = \{x \in X \mid x \notin A\}$ je

$$\chi_{\overline{A}}(x) = 1 - \chi_A(x).$$

Osnovne operacije u rasplinutoj logici i teoriji rasplinutih skupova su unija, presek i komplement. Ove operacije se izvode na funkcijama pripadnosti koje predstavljaju rasplinute skupove. Presek i unija zasnivaju se na operacijama minimuma i maksimuma, koje se kasnije generalizuju i detaljno proučavaju.

Definicija 1.4 *Neka $A, B \in \mathcal{F}(X)$.* **Presek** *rasplinutih skupova A i B je rasplinuti skup C definisan kao*

$$C(x) = min\{A(x), B(x)\}, \forall x \in X,$$

što označavamo sa $C = A \wedge B$.

Definicija 1.5 *Neka su $A, B \in \mathcal{F}(X)$.* **Unija** *rasplinutih skupova A i B je rasplinuti skup C definisan kao*

$$C(x) = max\{A(x), B(x)\}, \forall x \in X,$$

što označavamo sa $C = A \vee B$.

Definicija 1.6 *Neka je $A \in \mathcal{F}(X)$ rasplinuti skup.* **Komplement** *od A je rasplinuti skup B,*

$$B(x) = 1 - A(x), \forall x \in X,$$

u oznaci $B = \overline{A}$.

Napomena 1.7 *Operacije između rasplinutih skupova su definisane poelementno na intervalu $[0, 1]$. U daljem tekstu koristimo oznake $min\{x, y\} = x \wedge y$, $max\{x, y\} = x \vee y$, za $x, y \in [0, 1]$.*

1.3 Osobine operacija sa rasplinutim skupovima

Propozicija 1.8 *U teoriji rasplinutih skupova sa osnovnim operacijama važe sledeće osobine:*
1. Asocijativnost

$$A \wedge (B \wedge C) = (A \wedge B) \wedge C$$
$$A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C$$

2. Komutativnost

$$A \wedge B = B \wedge A$$
$$A \vee B = B \vee A$$

3. Identički elementi

$$A \wedge X = A$$
$$A \vee \emptyset = A$$

4. Apsorpcija $\emptyset$ *i* X

$$A \wedge \emptyset = \emptyset$$
$$A \vee X = X$$

5. Idempotentnost

$$A \wedge A = A$$
$$A \vee A = A$$

6. De Morganovi zakoni

$$\overline{A \wedge B} = \overline{A} \vee \overline{B}$$
$$\overline{A \vee B} = \overline{A} \wedge \overline{B}$$

7. Distributivnost

$$A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$$
$$A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$$

8. Involucija

$$\overline{\overline{A}} = A$$

9. Apsorpcija

$$A \wedge (A \vee B) = A$$
$$A \vee (A \wedge B) = A.$$

Dokaz.

1.

$$A(x) \wedge (B \wedge C)(x) = min\{A(x), B \wedge C(x)\} = min\{A(x), min\{B(x), C(x)\}\}$$

$$= min\{min\{A(x), B(x)\}, C(x)\} = min\{A(x) \wedge B(x)\}, C(x)\} = (A \wedge B)(x) \wedge C(x)$$

Slično se dokazuje $A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C$.

2.

$$A(x) \wedge B(x) = min\{A(x), B(x)\} = min\{B(x), A(x)\} = B(x) \wedge A(x)$$

Slično se dokazuje i $A \vee B = A \vee B$.

3.

$$A(x) \wedge X(x) = min\{A(x), X(x)\} = min\{A(x), 1\} = A(x)$$

$$A(x) \vee \emptyset(x) = max\{A(x), \emptyset(x)\} = max\{A(x), 0\} = A(x).$$

4.

$$A(x) \wedge \emptyset(x) = min\{A(x), \emptyset(x)\} = min\{A(x), 0\} = 0 = \emptyset(x)$$

$$A(x) \vee X(x) = max\{A(x), X(x)\} = max\{A(x), 1\} = 1 = X(x)$$

5.

$$A(x) \wedge A(x) = min\{A(x), A(x)\} = A(x)$$

Slično se dokazuje i $A \vee A = A$.

6.

$$\overline{A \wedge B}(x) = 1 - min\{A(x), B(x)\}$$

$$= max\{1 - A(x), 1 - B(x)\} = \overline{A}(x) \vee \overline{B}(x)$$

Slično se dokazuje i $\overline{A \vee B} = \overline{A} \wedge \overline{B}$.

7.

$$(A \wedge B)(x) \vee (A \wedge C)(x) = max\{min\{A(x), B(x)\}, min\{A(x), C(x)\}\} =$$

$$min\{A(x), max\{B(x), C(x)\}\} = min\{A(x), B(x) \vee C(x)\} = A(x) \wedge (B \vee C)(x).$$

Slično se dokazuje $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$.

8.

$$\overline{\overline{A}}(x) = 1 - \overline{A}(x) = 1 - (1 - A(x)) = A(x)$$

9.

$$A(x) \wedge (A \vee B)(x) = (A \wedge A)(x) \vee (A \wedge B)(x) = max\{A(x) \wedge A(x), A(x) \wedge B(x)\}$$

$$= max\{min\{A(x), A(x)\}, min\{A(x), B(x)\}\} = A(x)$$

Slično se dokazuje i $A \vee (A \wedge B) = A$.

□

Zakon kontrapozicije i zakon isključenja trećeg („tertium non datur") ne važe, u šta se možemo uveriti na osnovu sledećeg primera:

Primer 1.9 *Neka je A pravi rasplinuti skup, $A : X \to [0,1]$ (tj. postoji $x \in X$, tako da $A(x) \notin \{0,1\}$). Tada važi*

$$A \wedge \overline{A} \neq \emptyset$$

$$A \vee \overline{A} \neq X.$$

Zaista, ako je $x \in X$ takvo da $0 < A(x) < 1$, onda važi i $0 < \overline{A}(x) < 1$, a tada je $0 < A \wedge \overline{A} < 1$ i $0 < A \vee \overline{A} < 1$.
Još konkretnije, za $X = \{a,b\}, A(a) = \frac{1}{2}, A(b) = \frac{1}{3}$ imamo $\overline{A}(a) = \frac{1}{2}$ i $\overline{A}(b) = \frac{2}{3}$, pa je $(A \wedge \overline{A})(a) = \frac{1}{2}$ i $(A \wedge \overline{A})(b) = \frac{1}{3}$.

Glava 2

Logičke operacije u teoriji rasplinutih skupova

2.1 Negacija

Prilikom definisanja unije, preseka i komplementa rasplinutih skupova, uloge logičkih operacija $\wedge$, $\vee$ i $\neg$ su preuzele operacije min, max, i $1-x$ na intervalu $[0,1]$. No, to su samo specijalni slučajevi opštije definisanih logičkih operacija u slučaju rasplinute logike.

Definicija 2.1 *Funkcija $N : [0,1] \to [0,1]$ je* **negacija** *ako je $N(0) = 1$, $N(1) = 0$ i N je opadajuća ($x \leq y \Rightarrow N(x) \geq N(y)$).*
Negacija je **stroga** *ako je strogo opadajuća ($x < y \Rightarrow N(x) > N(y)$) i neprekidna.*
Stroga negacija je **jaka** *ako je još i involutivna, tj. $N(N(x)) = x$.*

Primer 2.2 *Standardna negacija $N(x) = 1 - x$ je jaka negacija.*

Primer 2.3 *Neka je $N_\lambda : [0,1] \to [0,1]$ tako da je $N_\lambda(x) = \frac{1-x}{1+\lambda x}$. Tada je N_λ jaka negacija za $\lambda > -1$.*

Definicija 2.4 *Neka je $N : [0,1] \to [0,1]$ neka negacija. N-***komplement** *je preslikavanje $\mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(X)$ definisano poelementno: ako $A \in \mathcal{F}(X)$ onda $N(A)(x) = N(A(x))$.*

Neka je $\varphi : [0,1] \to [0,1]$ rastuća funkcija, tj. za sve x, y važi $x \leq y \Rightarrow \varphi(x) \leq \varphi(y)$. Kažemo da je φ **automorfizam** od $([0,1], \leq)$ ako je bijekcija.

Teorema 2.5 *Funkcija $N : [0,1] \to [0,1]$ je jaka negacija akko postoji neprekidni automorfizam $\varphi : [0,1] \to [0,1]$ tako da je*

$$N(x) = \varphi^{-1}(1 - \varphi(x)).$$

Dokaz. „$\Rightarrow$" Kako je N stroga negacija, onda je $f(x) = N(x) - x$ neprekidno preslikavanje, $f(0) = 1$, a $f(1) = -1$. Tada postoji $x^* \in (0,1)$ tako da je $f(x^*) = 0$, ili ekvivalentno $N(x^*) = x^*$, tj. N ima fiksnu tačku.

Neka su sada N_1, N_2 dve stroge negacije. Tada postoje $s_1, s_2 \in (0,1)$ tako da je $N_1(s_1) = s_1$ i $N_2(s_2) = s_2$. Neka je $t = \frac{s_2}{s_1}$ i $\varphi, \psi : [0,1] \to [0,1]$ tako da

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{x}{t}, ako & x \leq s_2 \\ N_1^{-1}(\frac{N_2(t)}{t}), ako & x > s_2, \end{cases},$$

$$\psi(x) = \begin{cases} tx, ako & x \leq s_1 \\ N_2(tN_1^{-1}(x)), ako & x > s_1. \end{cases}.$$

Primetimo da su φ i ψ definisane na ovaj način neprekidna preslikavanja. Tvrdimo da $N_2 = \psi \circ N_1 \circ \varphi$. Zaista, ako je $x < s_2$, onda $\frac{x}{t} < \frac{s_2}{t} = s_1$ i $N_1(\frac{x}{t}) > N_1(s_1) = s_1$. Imamo

$$\psi \circ N_1 \circ \varphi(x) = \psi(N_1(\tfrac{x}{t}))$$

$$= N_2(t \cdot N_1^{-1}(N_1(\tfrac{x}{t}))) = N_2(t \cdot \tfrac{x}{t}) = N_2(x).$$

Ako je $x \geq s_2$, onda $N_2(x) \leq N_2(s_2) = s_2 = s_1 t$. Tada dobijamo $\frac{N_2(x)}{t} \leq s_1$. Imamo

$$\psi \circ N_1 \circ \varphi(x) = \psi(N_1(N_1^{-1}(\tfrac{N_2(x)}{t})))$$

$$= \psi(\tfrac{N_2(x)}{t}) = t \cdot \tfrac{N_2(x)}{t} = N_2(x).$$

Kao zaključak dobijamo $\psi \circ N_1 \circ \varphi = N_2$. Neka je N_1 standardna negacija, $N_1(x) = 1 - x$. Tada imamo

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{x}{t}, ako & x \leq s_2 \\ 1 - (\frac{N_2(x)}{t}), ako & x > s_2 \end{cases},$$

$$\psi(x) = \begin{cases} tx, ako & x \leq \frac{1}{2} \\ N_2(t(1-x)), ako & x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

i $t = 2s_2$.
Ako je $x \leq s_2$, onda $\frac{x}{t} \leq \frac{s_2}{t} = \frac{1}{2}$, tj. $\varphi(x) \leq \frac{1}{2}$ i tada imamo

$$\psi \circ \varphi(x) = t\varphi(x) = t \cdot \tfrac{x}{t} = x.$$

Ako je $x > s_2$, onda $N_2(x) < N_2(s_2) = s_2$ i imamo $1 - \frac{N_2(x)}{t} > 1 - \frac{s_2}{t} = \frac{1}{2}$, tj. $\varphi(x) > \frac{1}{2}$. Tada dobijamo

$$\psi \circ \varphi(x) = N_2(t(1 - \varphi(x))) = N_2\Big(t\Big(\tfrac{N_2(x)}{t}\Big)\Big) = N_2(N_2(x)).$$

Ako je N_2 jaka negacija, onda je $N_2(N_2(x)) = x$, tj. $\psi \circ \varphi(x) = x$, pa je $\psi \circ \varphi = id$.
Sada razmatramo $\varphi \circ \psi$.
Ako je $x \leq \frac{1}{2}$, onda je $xt \leq \frac{t}{2}$, tj. $\psi(x) \leq s_2$. Tada je $\varphi \circ \psi(x) = \varphi(xt) = \frac{xt}{t} = x$.

Ako je $x > \frac{1}{2}$, onda je $1 - x < \frac{1}{2}$, pa je tada $t(1-x) < \frac{t}{2} = s_2$ i $N_2(t(1-x)) > N_2(s_2) = s_2$. Dobijamo

$$\varphi \circ \psi(x) = \varphi(N_2(t(1-x))) = 1 - \frac{N_2(N_2(t(1-x)))}{t}.$$

Ako je N_2 jaka negacija, dobijamo

$$\varphi \circ \psi(x) = 1 - \frac{t(1-x)}{t} = x.$$

Kako važi $\psi \circ \varphi = \varphi \circ \psi = id$, dobijamo da su φ i ψ jedna drugoj inverzne ($\psi = \varphi^{-1}$).
Dakle, ako je N jaka negacija, postoji neprekidni automorfizam $\varphi : [0,1] \to [0,1]$ tako da je $N(x) = \varphi^{-1}(1 - \varphi(x))$.

„$\Leftarrow$" Neka je dat neprekidni automorfizam φ nad $[0,1]$. Posmatramo $N(x) = \varphi^{-1}(1 - \varphi(x))$. Tada je N neprekidna. Takođe imamo

$$N(0) = \varphi^{-1}(1 - \varphi(0)) = \varphi^{-1}(1) = 1$$

$$N(1) = \varphi^{-1}(1 - \varphi(1)) = \varphi^{-1}(0) = 0,$$

i

$$N(N(x)) = \varphi^{-1}(1 - \varphi(\varphi^{-1}(1 - \varphi(x))))$$

$$= \varphi^{-1}(1 - 1 + \varphi(x)) = \varphi^{-1}(\varphi(x)) = x.$$

Da bismo pokazali da je N strogo opadajuća, primetimo da je φ rastuća, pa je $1 - \varphi$ opadajuća i φ^{-1} je rastuća. Tada je $\varphi^{-1}(1 - \varphi(x))$ strogo opadajuća. Dakle, N je jaka negacija.

□

Napomena 2.6 *Neka je φ neprekidni automorfizam. Tada negaciju $N(x) = \varphi^{-1}(1 - \varphi(x))$ nazivamo* **φ-transformacija standardne negacije**.

Primer 2.7 $N(x) = (1 - x^{\alpha})^{\frac{1}{\alpha}}$, *za sve $\alpha \in (0, \infty)$, je jedna parametarska familija jakih negacija.*

2.2 Trougaone norme i konorme

U rasplinutoj logici, trougaone norme i konorme predstavljaju uopštenja konjunkcije i disjunkcije klasične logike.

Definicija 2.8 **Trougaona norma** *(t-norma) je funkcija $\tau : [0,1]^2 \to [0,1]$ koja zadovoljava sledeće osobine:*
$T_1 : \tau(x, 1) = x$ *(identičnost)*
$T_2 : \tau(x, y) = \tau(y, x)$ *(komutativnost)*
$T_3 : \tau(x, \tau(y, z)) = \tau(\tau(x, y), z)$ *(asocijativnost)*
$T_4 :$ *Ako je $x \leq u$ i $y \leq v$, onda je $\tau(x, y) \leq \tau(u, v)$ (monotonost)*

Definicija 2.9 Trougaona konorma *(t-konorma ili s-norma) je funkcija* $\sigma : [0,1]^2 \to [0,1]$ *koja zadovoljava sledeće osobine:*
$S_1 : \sigma(x,0) = x$ *(identičnost)*
$S_2 : \sigma(x,y) = \sigma(y,x)$ *(komutativnost)*
$S_3 : \sigma(x,\sigma(y,z)) = \sigma(\sigma(x,y),z)$ *(asocijativnost)*
$S_4 :$ *Ako je* $x \leq u$ *i* $y \leq v$, *onda je* $\sigma(x,y) \leq \sigma(u,v)$ *(monotonost)*

Koriste se i oznake $x\tau y = \tau(x,y)$, $x\sigma y = \sigma(x,y)$.

Primer 2.10 *Operacija min* $(\wedge)$ *na* $[0,1]$ *je primer jedne t-norme, a operacija max* $(\vee)$ *je primer jedne t-konorme. Zaista, za sve* $x,y,z \in [0,1]$ *imamo*
$x \wedge 1 = x$
$x \wedge y = y \wedge x$
$x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$
Ako su $u,v \in [0,1]$ *tako da važi* $x \leq u$ *i* $y \leq v$, *onda je* $x \wedge y \leq u \wedge v$.
Slično, važi i
$x \vee 0 = x$
$x \vee y = y \vee x$
$x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$
Ako su $u,v \in [0,1]$ *tako da važi* $x \leq u$ *i* $y \leq v$, *onda je* $x \vee y \leq u \vee v$.

Definicija 2.11 *Neka su* $\tau, \sigma : [0,1]^2 \to [0,1]$. *Odgovarajuće indukovane operacije* $\tau, \sigma : \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(X)$ *definišemo poelementno: ako* $A, B \in \mathcal{F}(X)$, *onda*

$$(A\tau B)(x) = A(x)\tau B(x)$$

$$(A\sigma B)(x) = A(x)\sigma B(x)$$

za sve $x \in X$.

Propozicija 2.12 *Za datu t-normu* τ *i t-konormu* σ *važi* $\tau(x,0) = 0$ *i* $\sigma(x,1) = 1$, *za sve* $x \in [0,1]$.

Dokaz. Iz T_1 imamo $\tau(0,1) = 0$. Zatim iz T_4 sledi da

$$\tau(0,x) \leq \tau(0,1) = 0, \forall x \in [0,1],$$

tj. $\tau(0,x) = 0$, pa iz T_2 dobijamo $\tau(x,0) = 0$.
Slično, imamo $\sigma(1,0) = 1$, pa je

$$1 = \sigma(1,0) \leq \sigma(1,x),$$

a tada $\sigma(1,x) = 1 = \sigma(x,1), \forall x \in [0,1]$. $\square$

Propozicija 2.13 *Za svaku t-normu* τ *i t-konormu* σ *važi* $\tau(x,y) \leq x \wedge y$ *i* $\sigma(x,y) \geq x \vee y$ *za sve* $x,y \in [0,1]$.

Dokaz. Imamo

$$\tau(x,y) \leq \tau(x,1) = x.$$

Takođe je

$$\tau(x,y) = \tau(y,x) \leq \tau(y,1) = y.$$

Kao zaključak dobijamo $\tau(x,y) \leq x \wedge y$. Slično se dokazuje $\sigma(x,y) \geq x \vee y$.

□

Veza između t-normi i t-konormi ostvaruje se preko jakih negacija, kao u sledećoj definiciji.

Definicija 2.14 *Trojka* (σ, τ, N) *je* **De Morganova** *ako je* τ *t-norma,* σ *t-konorma,* N *jaka negacija i ako je zadovoljen De Morganov zakon*

$$\sigma(x,y) = N(\tau(N(x), N(y))).$$

Primer 2.15 *Minimum i maksimum*

$$x \wedge y = min\{x,y\}$$

$$x \vee y = max\{x,y\}$$

zajedno sa standardnom negacijom $N(x) = 1 - x$, *čine De Morganovu trojku.*

Primer 2.16 *t-norma i t-konorma Lukašijevića*

$$x\tau_L y = (x + y - 1) \vee 0$$

$$x\sigma_L y = (x + y) \wedge 1$$

zajedno sa standardnom negacijom $N(x) = 1 - x$ *formiraju De Morganovu trojku. Algebarska struktura nad intervalom* $[0,1]$ *sa ovim operacijama zove se MV-algebra (eng. Multivalued).*

Napomena 2.17 *Ako je* (σ, τ, N) *De Morganova trojka, imamo* $\tau(x,y) = N(\sigma(N(x), N(y)))$. *Zaista,*

$$\sigma(N(x), N(y)) = N(\tau(N(N(x)), N(N(y)))).$$

Tada je

$$N(\sigma(N(x), N(y))) = N(N(\tau(x,y))) = \tau(x,y).$$

2.3 Rasplinute implikacije

Definicija 2.18 *Za funkciju* $I : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ *kažemo da je* **rasplinuta implikacija** *ako ispunjava sledeće uslove:*
I_1*: Ako je* $x \leq y$*, onda* $I(x,z) \geq I(y,z)$*, tj.* I *je opadajuća po prvom argumentu;*
I_2*: Ako je* $y \leq z$*, onda* $I(x,y) \leq I(x,z)$*, tj.* I *je rastuća po drugom argumentu;*
I_3*:* $I(1,0) = 0$*,* $I(0,0) = I(1,1) = 1$ *.*

Primer 2.19 *Operacije*

$$I_1(x,y) = max\{1-x, y\},$$

$$I_2(x,y) = min\{1-x+y, 1\}$$

i

$$I_3(x,y) = \begin{cases} 1, & x \leq y \\ \frac{y}{x}, & x > y \end{cases}$$

su rasplinute implikacije.

Rasplinute implikacije se često obeležavaju sa $\to$.

Propozicija 2.20 *Ako je* I *rasplinuta implikacija, onda*
(i) $I(0,x) = 1, \forall x \in [0,1]$*;*
(ii) $I(x,1) = 1, \forall x \in [0,1]$.

Dokaz. (i) :

$$1 = I(0,0) \leq I(0,x) \leq I(0,1).$$

Iz toga sledi da je $I(0,x) = 1$ za sve $x \in [0,1]$, kao i $I(0,1) = 1$.

(ii) :

$$1 = I(0,1) \geq I(x,1) \geq I(1,1) = 1.$$

Tada je $I(x,1) = 1, \forall x \in [0,1]$.

□

Definicija 2.21 *Neka je* σ *t-konorma i* N *stroga negacija.* **S-implikacija** *je operacija* $I : [0,1] \to [0,1]$ *definisana sa*

$$I(x,y) = \sigma(N(x), y).$$

Propozicija 2.22 *Neka je* σ *t-konorma i* N *stroga negacija. Tada je* $I(x,y) = \sigma(N(x), y)$ *implikacija.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $x \leq z$. Tada je $N(x) \geq N(z)$, pa je $\sigma(N(x), y) \geq \sigma(N(z), y)$, iz čega sledi da je I opadajuća po prvom argumentu. Da je I rastuća po drugom argumentu je očigledno. Zatim imamo

$$I(1,0) = \sigma(N(1),0) = \sigma(0,0) = 0,$$

$I(0,0) = \sigma(1,0) = 1$ i $I(1,1) = \sigma(0,1) = 1$.

□

Primer 2.23 *Neka je $\sigma = max$, $N(x) = 1-x$. Tada je pridružena S-implikacija $I(x,y) = max\{1-x, y\}$.*

Primer 2.24 *Neka je $\sigma(x,y) = min\{x+y, 1\}$ i uzmimo standardnu negaciju. Tada imamo S-implikaciju $I(x,y) = min\{1-x-y, 1\}$.*

Lema 2.25 *Ako je $I(x,y)$ S-implikacija, onda je i $I'(x,y) = I(N(y), N(x))$ S-implikacija.*

Dokaz. Kako je I S-implikacija, važi

$$I(N(y), N(x)) = \sigma(N(N(y)), N(x)) = \sigma(y, N(x)) = \sigma(N(x,y)).$$

□

Definicija 2.26 *Neka je τ t-norma.* **Reziduirana implikacija** (R**-implikacija**) *pridružena t-normi τ je preslikavanje $I_\tau : [0,1]^2 \to [0,1]$ definisano sa*

$$I_\tau(x,y) = sup\{z \mid \tau(x,z) \leq y\}.$$

Propozicija 2.27 *Reziduirana implikacija I_τ je implikacija, za svaku t-normu τ.*

Dokaz. Neka je $x_1 \leq x_2$. Tada je $\tau(x_1, z) \leq \tau(x_2, z), \forall z \in [0,1]$. Ako je $z_0 \in \{z \mid \tau(x_2, z) \leq y\}$, onda $z_0 \in \{z \mid \tau(x_1, z) \leq y\}$ tj.

$$\{z \mid \tau(x_2, z) \leq y\} \subseteq \{z \mid \tau(x_1, z) \leq y\}.$$

Tada imamo

$$I_\tau(x_2, y) = sup\{z \mid \tau(x_2, z) \leq y\}$$

$$\leq sup\{z \mid \tau(x_1, z) \leq y\} = I_\tau(x_1, y).$$

Lako je dokazati da važi i uslov I_3 definicije rasplinute implikacije.

□

Napomena 2.28 *Ako je τ neka t-norma, onda je uvek $I_\tau(x,x) = 1, \forall x \in [0,1]$. Zaista, kako je $I_\tau(x,x) = sup\{z \mid \tau(x,z) \leq x\}$ i kako je $\tau(x,1) = x$ imamo $I_\tau(x,x) = 1$.*

2.4 Rasplinuta ekvivalencija

Uopštimo sada klasičnu logičku operaciju $\Leftrightarrow$.

Definicija 2.29 *Funckija* $E : [0,1]^2 \to [0,1]$ *je* **rasplinuta ekvivalencija** *ako zadovoljava sledeće uslove:*
$E_1 : E(x,y) = E(y,x)$
$E_2 : E(0,1) = E(1,0) = 0$
$E_3 : E(x,x) = 1, \forall x \in [0,1]$
$E_4 :$ *Ako je* $x \leq x' \leq y' \leq y$, *onda* $E(x,y) \leq E(x',y')$.

Rasplinuta ekvivalencija se često označava sa $\leftrightarrow$.

Teorema 2.30 *Sledeća tvrđenja su ekvivalentna:*
(a) E *je rasplinuta ekvivalencija.*
(b) Postoji rasplinuta implikacija I *sa osobinom* $I(x,x) = 1, \forall x \in [0,1]$ *tako da je*

$$E(x,y) = min\{I(x,y), I(y,x)\}.$$

(c) Postoji rasplinuta implikacija I *sa osobinom* $I(x,x) = 1, \forall x \in [0,1]$ *tako da je*

$$E(x,y) = I(max\{x,y\}, min\{x,y\}).$$

Dokaz. $(b) \Rightarrow (a)$. Neka je $E(x,y) = min\{I(x,y), I(y,x)\}$. Osobine $E_1 - E_3$ se lako proveravaju. Za dokaz svojstva E_4 pretpostavimo $x \leq x' \leq y' \leq y$. Tada imamo

$$I(y,x) \leq I(x,x) \leq I(x,y)$$

pa je $E(x,y) = I(y,x)$. Slično $E(x',y') = I(y',x')$. Takođe je $I(y',x') \geq I(y',x) \geq I(y,x)$. Tada je $E(x,y) \leq E(x',y')$.

$(a) \Rightarrow (b)$. Posmatramo

$$I(x,y) = \begin{cases} 1, & x \leq y \\ E(x,y), & x > y. \end{cases}$$

Tada je I rasplinuta implikacija. Pokazaćemo da je I opadajuća po prvom argumentu. Neka je $x \leq z$. Ako je $x \leq y$, onda $I(x,y) = 1 \geq I(z,y)$. Ako je $x > y$, onda $y < x \leq z$ i tada imamo

$$I(x,y) = E(x,y) \geq E(z,y) = I(z,y).$$

Dokažimo sada da je I rastuća po drugom argumentu. Neka je $y \leq z$. Ako je $x > z$, onda

$$I(x,y) = E(x,y) \leq E(x,z) = I(x,z).$$

Ako je $x \leq z$, onda je $I(x, z) = 1$, pa je $I(x, y) \leq I(x, z)$.
Sada pokazujemo

$$E(x, y) = min\{I(x, y), I(y, x)\}.$$

Zaista, kako je

$$I(x, y) = \begin{cases} 1, & x \leq y \\ E(y, x) = E(x, y), & x > y \end{cases}$$

imamo

$$E(x, y) = \begin{cases} I(x, y), & x > y \\ I(y, x), & x \leq y. \end{cases}$$

Takođe, ako je $x > y$ važi

$$min\{I(x, y), I(y, x)\} = I(x, y).$$

Zaista, ako je $x > y$, onda

$$I(x, y) \leq I(y, y) \leq I(y, x).$$

Slično za $x < y$. Ako je $x = y$, onda je $I(x, y) = I(y, x) = 1$.
Kod ekvivalencije $(b) \Leftrightarrow (c)$ koristimo da ako je $x > y$, onda $max\{x, y\} = x$ i $min\{x, y\} = y$. Tada imamo

$$I(x, y) \leq I(y, y) \leq I(y, x)$$

i

$$E(x, y) = I(x, y) = I(max\{x, y\}, min\{x, y\}).$$

Kada je $x < y$, slično se pokazuje. U slučaju $x = y$ imamo

$$E(x, y) = I(x, y) = I(max\{x, y\}, min\{x, y\}) = 1.$$

□

Primer 2.31 *Rasplinuta ekvivalencija izvedena od Lukašijevičeve t-norme je* $x \leftrightarrow y = min\{1 - x + y, 1 - y + x\}$.

Glava 3

Rasplinute relacije

3.1 Rasplinute relacije

Neka su X i Y (klasični) skupovi. Klasična relacja R između X i Y je svaki podskup od $X \times Y$.

Klasična relacija se može predstaviti kao preslikavanje $R : X \times Y \to \{0, 1\}$,

$$R(x, y) = \begin{cases} 1, & (x, y) \in R \\ 0, & (x, y) \notin R. \end{cases}$$

Definicija 3.1 *Neka su X i Y dva (klasična) skupa. Svako preslikavanje $R : X \times Y \to [0, 1]$ zovemo* **rasplinuta relacija** *između X i Y.*
Broj $R(x, y) \in [0, 1]$ se može interpretirati kao stepen povezanosti elementa x sa y.

Dakle, rasplinuta relacija je rasplinuti podskup skupa $X \times Y$. Sa $\mathcal{F}(X \times Y)$ označavamo familiju svih rasplinutih relacija između X i Y.

Rasplinuta relacija između elemenata dva konačna skupa $X = \{x_1, x_2, ..., x_m\}$ i $Y = \{y_1, y_2, ..., y_n\}$ se može predstaviti matricom

$$R = \begin{bmatrix} R(x_1, y_1) & R(x_1, y_2) & \dots & R(x_1, y_n) \\ R(x_2, y_1) & R(x_2, y_2) & \dots & R(x_2, y_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ R(x_m, y_1) & R(x_m, y_2) & \dots & R(x_m, y_n) \end{bmatrix}.$$

Kako su rasplinute relacije i same rasplinuti skupovi, na njih se mogu primeniti operacije nad rasplinutim skupovima:

$$N(R(x, y)) = \overline{R}(x, y) = 1 - R(x, y),$$

$$(R \vee S)(x, y) = R(x, y) \vee S(x, y),$$

$$(R \wedge S)(x, y) = R(x, y) \wedge S(x, y).$$

Inverzna (tj. **transponovana**) relacija za rasplinutu relaciju je

$$R^{-1}(x, y) = R(y, x),$$

Takođe razmatramo operacije t-norme i t-konorme: ako je τ t-norma, σ t-konorma, onda

$$\tau(R,P)(x,y) = \tau(R(x,y), P(x,y)),$$

$$\sigma(R,P)(x,y) = \sigma(R(x,y), P(x,y)).$$

3.2 Max-min kompozicija

Definicija 3.2 *Neka su $R \in \mathcal{F}(X \times Y)$ i $S \in \mathcal{F}(Y \times Z)$ rasplinute relacije. Tada je $R \circ S \in \mathcal{F}(X \times Z)$ definisana sa*

$$(R \circ S)(x,z) = \bigvee_{y \in Y} R(x,y) \wedge S(y,z)$$

max-min kompozicija *rasplinutih relacja R i S.*

Napomena 3.3 *Max-min kompozicija je dobro definisana kao supremum ograničenog podskupa realnih brojeva.*

Ako je $R \in \mathcal{F}(X \times Y)$, možemo definisati $R^2 = R \circ R$, i generalno $R^n = R \circ R^{n-1}, n \geq 2$.

Neka su $X = \{x_1, ..., x_n\}$, $Y = \{y_1, ..., y_m\}$, i $Z = \{z_1, ..., z_p\}$ konačni skupovi. Ako su $R = (r_{ij})_{i=1,...,n,j=1,...,m} \in \mathcal{F}(X \times Y)$ i $S = (s_{jk})_{j=1,...,m,k=1,...,p} \in \mathcal{F}(Y \times X)$ diskretne rasplinute relacije, onda je njihova kompozicija $T = (t_{ik})_{i=1,...,n,k=1,...,p} = R \circ S \in \mathcal{F}(X \times Z)$ data sa

$$t_{ik} = \bigvee_{j=1}^{m} r_{ij} \wedge s_{jk},$$

$i = 1, ...n, k = 1, ..., p$.

Primer 3.4 *Ako je*

$$R = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.4 & 0.2 & 0.5 \\ 0 & 0.2 & 0.3 & 0.4 \\ 0.4 & 0.5 & 0.2 & 0.1 \\ 1 & 0.3 & 0.3 & 0 \end{bmatrix}$$

i

$$S = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.3 & 0.2 & 0.1 \\ 0.6 & 0.5 & 0 & 0.2 \\ 0.2 & 0.1 & 0.4 & 0.1 \\ 0.4 & 0.1 & 0.2 & 0.5 \end{bmatrix}$$

onda je

$$R \circ S = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.4 & 0.2 & 0.5 \\ 0.4 & 0.2 & 0.3 & 0.4 \\ 0.5 & 0.5 & 0.2 & 0.2 \\ 0.3 & 0.3 & 0.3 & 0.2 \end{bmatrix}.$$

Propozicija 3.5 (i) *Kompozicija max-min je asocijativna, tj.*

$$(R \circ S) \circ Q = R \circ (S \circ Q),$$

gde je $R \in \mathcal{F}(X \times Y)$, $S \in \mathcal{F}(Y \times Z)$ *i* $Q \in \mathcal{F}(Z \times U)$.
(ii) *Neka su* $R_1, R_2 \in \mathcal{F}(X \times Y)$ *i* $Q \in \mathcal{F}(Y \times Z)$. *Ako je* $R_1 \leq R_2$, *onda važi*

$$R_1 \circ Q \leq R_2 \circ Q.$$

Dokaz. (i)

$$((R \circ S) \circ Q)(x,u) = \bigvee_{z \in Z} (R \circ S)(x,z) \wedge Q(z,u)$$

$$= \bigvee_{z \in Z} (\bigvee_{y \in Y} R(x,y) \wedge S(y,z)) \wedge Q(z,u)$$

$$= \bigvee_{z \in Z} \bigvee_{y \in Y} R(x,y) \wedge S(y,z) \wedge Q(z,u) = (R \circ (S \circ Q))(x,u).$$

(ii)

$$(R_1 \circ Q)(x,z) = \bigvee_{y \in Y} R_1(x,y) \wedge Q(y,z)$$

$$\leq \bigvee_{y \in Y} R_2(x,y) \wedge Q(y,z) = (R_2 \circ Q)(x,z).$$

□

Propozicija 3.6 *Za sve* $R, S \in \mathcal{F}(X \times Y)$ *i* $Q \in \mathcal{F}(Y \times Z)$ *važi*
(i) $(R \vee S) \circ Q = (R \circ Q) \vee (S \circ Q)$
(ii) $(R \wedge S) \circ Q \leq (R \circ Q) \wedge (S \circ Q)$.

Dokaz. (i)

$$((R \vee S) \circ Q)(x,z) = \bigvee_{y \in Y} (R \vee S)(x,y) \wedge Q(y,z)$$

$$= \bigvee_{y \in Y} (R(x,y) \wedge Q(y,z)) \vee (S(x,y) \wedge Q(y,z))$$

$$\leq \bigvee_{y \in Y} (R(x,y) \wedge Q(y,z)) \vee \bigvee_{y \in Y} (S(x,y) \wedge Q(y,z)),$$

tj.

$$(R \vee S) \circ Q \leq (R \circ Q) \vee (S \circ Q).$$

S druge strane, iz prethodne propozicije imamo $R \circ Q \leq (R \vee S) \circ Q$ i $S \circ Q \leq (R \vee S) \circ Q$, a tada je

$$(R \circ Q) \vee (S \circ Q) \leq (R \vee S) \circ Q.$$

(ii) Imamo

$$\begin{aligned}
((R \wedge S) \circ Q)(x, z) &= \bigvee_{y \in Y} (R \wedge S)(x, y) \wedge Q(y, z) \\
&= \bigvee_{y \in Y} (R(x, y) \wedge Q(y, z)) \wedge (S(x, y) \wedge Q(y, z)) \\
&\leq \bigvee_{y \in Y} (R(x, y) \wedge Q(y, z)) \wedge \bigvee_{y \in Y} (S(x, y) \wedge Q(y, z)) \\
&= ((R \circ Q) \wedge (S \circ Q))(x, y).
\end{aligned}$$

□

Napomena 3.7 *Jednakost u* (ii) *ne važi. Zaista, ako uzmemo*

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad S = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

onda je

$$(R \wedge S) \circ Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \textit{dok je } (R \circ Q) \wedge (S \circ Q) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

3.3 Min-max kompozicija

Definicija 3.8 *Neka je* $R \in \mathcal{F}(X \times Y)$ *i* $S \in \mathcal{F}(Y \times Z)$. *Tada je* $R \bullet S \in \mathcal{F}(X \times Z)$ *definisana sa*

$$(R \bullet S)(x, z) = \bigwedge_{y \in Y} R(x, y) \vee S(y, z)$$

min-max kompozicija *rasplinutih relacja* R *i* S.

Primer 3.9 *Ako je*

$$R = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.4 & 0.2 & 0.5 \\ 0 & 0.2 & 0.3 & 0.4 \\ 0.4 & 0.5 & 0.2 & 0.1 \\ 1 & 0.3 & 0.3 & 0 \end{bmatrix}$$

i

$$S = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.3 & 0.2 & 0.1 \\ 0.6 & 0.5 & 0 & 0.2 \\ 0.2 & 0.1 & 0.4 & 0.1 \\ 0.4 & 0.1 & 0.2 & 0.5 \end{bmatrix}$$

onda je

$$R \bullet S = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.1 \\ 0.3 & 0.3 & 0.2 & 0.1 \\ 0.2 & 0.1 & 0.2 & 0.2 \\ 0.3 & 0.1 & 0.2 & 0.3 \end{bmatrix}.$$

Propozicija 3.10 *(i) Min-max kompozicija je asocijativna, tj. za svako* $R \in \mathcal{F}(X \times Y)$, $S \in \mathcal{F}(Y \times Z)$ *i* $T \in \mathcal{F}(Z \times U)$ *imamo*

$$(R \bullet S) \bullet T = R \bullet (S \bullet T).$$

(ii) Neka su $R_1, R_2 \in \mathcal{F}(X \times Y)$ *i* $Q \in \mathcal{F}(Y \times Z)$*. Ako je* $R_1 \leq R_2$*, onda važi*

$$R_1 \bullet Q \leq R_2 \bullet Q.$$

Dokaz. (i)

$$((R \bullet S) \bullet T)(x,u) = \bigwedge_{z \in Z} (R \bullet S)(x,z) \vee T(z,u)$$

$$= \bigwedge_{z \in Z} (\bigwedge_{y \in Y} R(x,y) \vee S(y,z)) \vee T(z,u)$$

$$= \bigwedge_{z \in Z} \bigwedge_{y \in Y} R(x,y) \vee S(y,z) \vee T(z,u) = (R \bullet (S \bullet T))(x,u).$$

(ii)

$$(R_1 \bullet Q)(x,z) = \bigwedge_{y \in Y} R_1(x,y) \vee Q(y,z)$$

$$\leq \bigwedge_{y \in Y} R_2(x,y) \vee Q(y,z) = (R_2 \bullet Q)(x,z).$$

□

Propozicija 3.11 *Za sve* $R, S \in \mathcal{F}(X \times Y)$ *i* $T \in \mathcal{F}(Y \times Z)$ *važi*
(i) $(R \wedge S) \bullet T = (R \bullet T) \wedge (S \bullet T)$
(ii) $(R \vee S) \bullet T \geq (R \bullet T) \vee (S \bullet T)$.

Dokaz. (i)

$$((R \wedge S) \bullet T)(x,z) = \bigwedge_{y \in Y} (R \wedge S)(x,y) \vee T(y,z)$$

$$= \bigwedge_{y \in Y} (R(x,y) \vee T(y,z)) \wedge (S(x,y) \vee T(y,z))$$

$$\geq \bigwedge_{y \in Y} (R(x,y) \vee T(y,z)) \wedge \bigwedge_{y \in Y} (S(x,y) \vee T(y,z)),$$

tj.

$$(R \wedge S) \bullet T \geq (R \bullet T) \wedge (S \bullet T).$$

S druge strane, iz prethodne propozicije imamo $R \bullet Q \geq (R \wedge S) \bullet T$ i $S \bullet T \geq (R \wedge S) \bullet T$, a tada je

$$(R \bullet T) \wedge (S \bullet Q) \geq (R \wedge S) \bullet T.$$

(ii) Imamo

$$((R \vee S) \bullet T)(x,z) = \bigwedge_{y \in Y} (R \vee S)(x,y) \vee T(y,z)$$

$$= \bigwedge_{y \in Y} (R(x,y) \vee T(y,z)) \vee (S(x,y) \vee T(y,z))$$

$$\geq \bigwedge_{y \in Y} (R(x,y) \vee T(y,z)) \vee \bigwedge_{y \in Y} (S(x,y) \vee T(y,z))$$

$$= ((R \bullet T) \vee (S \bullet T))(x,y).$$

□

Napomena 3.12 *Jednakost u (ii) ne važi. Zaista, ako uzmemo*

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad S = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

onda je

$$(R \vee S) \bullet T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \textit{dok je } (R \bullet T) \vee (S \bullet T) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Propozicija 3.13 *Koristeći standardnu negaciju imamo* $\overline{R \circ S} = \overline{R} \bullet \overline{S}$ *i* $\overline{R \bullet S} = \overline{R} \circ \overline{S}$.

Dokaz.

$$\overline{R \circ S}(x,z) = \overline{\bigvee_{y \in Y} R(x,y) \wedge S(y,z)} = \bigwedge_{y \in Y} \overline{R(x,y) \wedge S(y,z)}$$

$$\bigwedge_{y \in Y} \overline{R}(x,y) \vee \overline{S}(y,z) = (\overline{R} \bullet \overline{S})(x,z)$$

□

Napomena 3.14 *Min-max kompozicija se može uopštiti do kompozicija min-t-konorma*

$$(R \bullet_\sigma P)(x,z) = \bigwedge_{y \in Y} R(x,y) \sigma P(y,z),$$

gde je σ *proizvoljna t-konorma.*

3.4 Kompozicija min$\rightarrow$

Definicija 3.15 **Standardna Gödel – ova implikacija** *je definisana kao*

$$x \rightarrow y = sup\{z \in [0,1] \mid x \wedge z \leq y\} = \begin{cases} 1, & x \leq y \\ y, & x > y. \end{cases}$$

Propozicija 3.16 *Neka je $\rightarrow$ standardna Gödel-ova implikacija. Tada za svako $x, y, z \in [0,1]$ važi*
(i) $(x \vee y) \rightarrow z = (x \rightarrow z) \wedge (y \rightarrow z)$.
(ii) $(x \wedge y) \rightarrow z = (x \rightarrow z) \vee (y \rightarrow z)$.
(iii) $x \rightarrow (y \vee z) = (x \rightarrow y) \vee (x \rightarrow z)$.
(iv) $x \rightarrow (y \wedge z) = (x \rightarrow y) \wedge (x \rightarrow z)$.
(v) $x \wedge (x \rightarrow y) \leq y$.
(vi) $x \rightarrow (x \wedge y) \geq y$.
(vii) $(x \rightarrow y) \rightarrow y \geq x$.

Dokaz. *(i)* 1° Ako je $x \vee y \leq z$, onda je $(x \vee y) \rightarrow z = 1$ a imamo i $x \leq z$ i $y \leq z$. Tada je $(x \rightarrow z) \wedge (y \rightarrow z) = 1 \wedge 1 = 1$.

2° Ako je $x \vee y > z$, onda je $(x \vee y) \rightarrow z = z$ i $x \geq z$ ili $y \geq z$, pa imamo $(x \rightarrow z) = z$ ili $(y \rightarrow z) = z$, dakle $(x \rightarrow z) \wedge (y \rightarrow z) = z$.

(ii) 1° Ako je $x \wedge y \leq z$, onda je $(x \wedge y) \rightarrow z = 1$. Takođe imamo da je $x \leq z$ ili $y \leq z$. Tada je ili $x \rightarrow z = 1$ ili $y \rightarrow z = 1$, pa je $(x \rightarrow z) \vee (y \rightarrow z) = 1$.

2° Ako je $x \wedge y > z$, onda je $(x \wedge y) \rightarrow z = z$. Takođe, ako je $(x \wedge y) > z$, onda je $x > z$ i $y > z$, pa imamo $(x \rightarrow z) = z$ i $(y \rightarrow z) = z$.

(iii) 1° Ako je $x \leq y \vee z$, onda $x \rightarrow (y \vee z) = 1$. Tada je ili $x \leq y$ ili $x \leq z$, pa imamo $x \rightarrow y = 1$ ili $x \rightarrow z = 1$.

2° U suprotnom je $x \rightarrow (y \vee z) = y \vee z$ i imamo $x > y$ i $x > z$, pa je $x \rightarrow y = y$ i $x \rightarrow z = z$. Tada je $(x \rightarrow y) \vee (x \rightarrow z) = y \vee z$.

(iv) 1° Neka je $x \leq y \wedge z$. Tada imamo $x \rightarrow (y \wedge z) = 1$, kao i $x \leq y$ i $x \leq z$, pa je $x \rightarrow y = 1$ i $x \rightarrow z = 1$, tj. $(x \rightarrow y) \wedge (x \rightarrow z) = 1$.

2° Inače je $x \rightarrow (y \wedge z) = y \wedge z$. Tada je $x > y$ ili $x > z$, tj. $x \rightarrow y = y$ ili $x \rightarrow z = z$, pa je $(x \rightarrow y) \wedge (x \rightarrow z) = y \wedge z$.

(v) 1° Ako je $x \leq y$, onda imamo $x \wedge (x \rightarrow y) = x \wedge 1 = x \leq y$.

2° U suprotnom imamo $x \wedge (x \rightarrow y) = x \wedge y = y$.

(vi) 1° Ako je $x \leq y$, onda je $x \rightarrow (x \wedge y) = x \rightarrow x = 1 \geq y$.

2° U suprotnom, ako je $x > y$ imamo $x \rightarrow (x \wedge y) = x \rightarrow y = y$.

(vii) 1° Ako je $x \leq y$ imamo $(x \to y) \to y = 1 \to y = y \geq x$.

2° Inače imamo $(x \to y) \to y = y \to y = 1 \geq x$.
□

Definicija 3.17 Kompozicija min→ *se definiše kao*

$$(R \triangleleft S)(x, z) = \bigwedge_{y \in Y} R(x, y) \to S(y, z).$$

Koristi se i naziv **subkompozicija**, a njoj dualna operacija je **superkompozicija** definisana kao

$$(R \triangleright S)(x, z) = \bigwedge_{y \in Y} S(y, z) \to R(x, y).$$

Veza između subkompozicije i superkompozicije data je u sledećoj propoziciji:

Propozicija 3.18 *Za $R_1 \in \mathcal{F}(X \times Y)$ i $R_2 \in \mathcal{F}(Y \times Z)$ važi*
(i) $R_1 \triangleleft R_2 = (R_2^{-1} \triangleright R_1^{-1})^{-1}$;
(ii) $R_1 \triangleright R_2 = (R_2^{-1} \triangleleft R_1^{-1})^{-1}$.

Dokaz. (i)

$$\begin{aligned}(R_2^{-1} \triangleright R_1^{-1})^{-1}(x, z) &= (R_2^{-1} \triangleright R_1^{-1})(z, x)\\ &= \bigwedge_{y \in Y} R_1^{-1}(y, x) \to R_2^{-1}(z, y)\\ &= \bigwedge_{y \in Y} R_1(x, y) \to R_2(y, z)\\ &= (R_1 \triangleleft R_2)(x, z)\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}(R_2^{-1} \triangleleft R_1^{-1})^{-1}(x, z) &= (R_2^{-1} \triangleright R_1^{-1})(z, x)\\ &= \bigwedge_{y \in Y} R_2^{-1}(z, y) \to R_1^{-1}(y, z)\\ &= \bigwedge_{y \in Y} R_2(y, z) \to R_1(x, y)\\ &= (R_1 \triangleright R_2)(x, z)\end{aligned}$$

□

Propozicija 3.19 *Ako su $R, S \in \mathcal{F}(X \times Y)$ i $Q \in \mathcal{F}(Y \times Z)$ tako da je $R \leq S$, onda je $R \triangleleft Q \geq S \triangleleft Q$.*

Dokaz. Kako je $\to$ opadajuća po prvom argumentu imamo

$$(R \triangleleft Q)(x, z) = \bigwedge_{y \in Y} R(x, y) \to Q(y, z)$$

$$\geq \bigwedge_{y \in Y} S(x, y) \to Q(y, z) = (S \triangleleft Q)(x, z).$$

□

Propozicija 3.20 *Za sve $R, S \in \mathcal{F}(X \times Y)$ i $Q \in \mathcal{F}(Y \times Z)$, imamo*
(i) $(R \vee S) \lhd Q = (R \lhd Q) \wedge (S \lhd Q)$*;*
(ii) $(R \wedge S) \lhd Q \geq (R \lhd Q) \vee (S \lhd Q)$*.*

Dokaz. (i) Iz prethodne propozicije imamo $(R \vee S) \rhd Q \leq R \lhd Q$ i $(R \vee S) \lhd Q \leq S \lhd Q$ a tada je

$$(R \vee S) \lhd Q \leq (R \lhd Q) \wedge (S \lhd Q).$$

Takođe iz propozicije 3.16, (i)

$$\begin{aligned}((R \vee S) \lhd Q)(x,z) &= \bigwedge_{y \in Y} (R(x,y) \vee S(x,y)) \to Q(y,z) \\ &= \bigwedge_{y \in Y} (R(x,y) \to Q(y,z)) \wedge (S(x,y) \to Q(y,z)) \\ &\geq \bigwedge_{y \in Y} (R(x,y) \to Q(y,z)) \wedge \bigwedge_{y \in Y} (S(x,y) \to Q(y,z) \\ &= ((R \lhd Q) \wedge (S \lhd Q))(x,z).\end{aligned}$$

(ii) Slično kao u (i) imamo $(R \wedge S) \lhd Q \geq R \lhd Q$ i $(R \wedge S) \lhd Q \geq S \lhd Q$ a tada je

$$(R \wedge S) \lhd Q \geq (R \lhd Q) \vee (S \lhd Q).$$

□

3.5 Rasplinute relacijske jednačine sa kompozicijama max-min i min→

Rasplinute relacijske jednačine su

$$R \circ P = Q$$

i

$$R \lhd P = Q$$

gde je $R \in \mathcal{F}(X \times Y)$, $P \in \mathcal{F}(Y \times Z)$ i $Q \in \mathcal{F}(X \times Z)$.

Teorema 3.21 *Neka su $R \in \mathcal{F}(X \times Y)$, $P \in \mathcal{F}(Y \times Z)$ i $Q \in \mathcal{F}(X \times Z)$ rasplinute relacije. Tada su sledeće nejednakosti tačne:*
(i) $P \leq R^{-1} \lhd (R \circ P)$;
(ii) $R \circ (R^{-1} \lhd Q) \leq Q$;
(iii) $R \leq (P \lhd (R \circ P)^{-1})^{-1}$*;*
(iv) $(P \lhd Q^{-1})^{-1} \circ P \leq Q$.

Dokaz. (i) Koristeći propoziciju 3.16, (vi) za svako $y \in Y$ i $z \in Z$ imamo

$$(R^{-1} \lhd (R \circ P))(y,z) = \bigwedge_{x \in X} R^{-1}(y,x) \to (R \circ P)(x,z)$$

$$= \bigwedge_{x\in X} R^{-1}(y,x) \to \bigvee_{t\in Y} R(x,t) \wedge P(t,z)$$

$$\geq \bigwedge_{x\in X} R(x,y) \to R(x,y) \wedge P(y,z) \geq \bigwedge_{x\in X} P(y,z) = P(y,z).$$

(ii) Iz propozicije 3.16, (v) dobijamo da za svako $x \in X$ i $z \in Z$

$$(R \circ (R^{-1} \lhd Q))(x,z) = \bigvee_{y\in Y} R(x,y) \wedge (R^{-1} \lhd Q)(y,z)$$

$$= \bigvee_{y\in Y} R(x,y) \wedge (\bigwedge_{t\in X} R^{-1}(y,t) \to Q(t,z))$$

$$\leq \bigvee_{y\in Y} R(x,y) \wedge (R(x,y) \to Q(x,z)) \leq \bigvee_{y\in Y} Q(x,z) = Q(x,z).$$

(iii) Za svako $x \in X$ i $y \in Y$ važi

$$(P \lhd (R \circ P)^{-1})^{-1}(x,y) = P \lhd (R \circ P)^{-1}(y,x)$$

$$= \bigwedge_{z\in Z} P(y,z) \to (R \circ P)^{-1}(z,x)$$

$$= \bigwedge_{z\in Z} P(y,z) \to \bigvee_{t\in Y} R(x,t) \wedge P(t,z)$$

$$\geq \bigwedge_{z\in Z} P(y,z) \to R(x,y) \wedge P(y,z) \geq \bigwedge_{z\in Z} R(x,y) = R(x,y).$$

(iv) Koristeći propoziciju 3.16, (v) za svako $x \in X$ i $z \in Z$ važi

$$((P \lhd Q^{-1})^{-1} \circ P)(x,z) = \bigvee_{y\in Y} (P \lhd Q^{-1})^{-1}(x,y) \wedge P(y,z)$$

$$= \bigvee_{y\in Y} (P \lhd Q^{-1})(y,x) \wedge P(y,z)$$

$$= \bigvee_{y\in Y} (\bigwedge_{t\in Z} P(y,t) \to Q^{-1})(t,x)) \wedge P(y,z)$$

$$= \bigvee_{y\in Y} (\bigwedge_{t\in Z} P(y,t) \to Q(x,t)) \wedge P(y,z)$$

$$\leq \bigvee_{y\in Y} (P(y,z) \to Q(x,z)) \wedge P(y,z) \leq \bigvee_{y\in Y} Q(x,z) = Q(x,z)$$

□

Teorema 3.22 *(i) Jednačina $R \circ P = Q$ sa nepoznatom P ima rešenje akko je $R^{-1} \lhd Q$ rešenje i tada je ono najveće rešenje.*
(ii) Jednačina $R \circ P = Q$ sa nepoznatom R ima rešenje akko je $(P \lhd Q^{-1})^{-1}$ rešenje i tada je ono najveće rešenje.

Dokaz. (i)„$\Leftarrow$" Ako je $\tilde{P} = R^{-1} \triangleleft Q$ rešenje jednačine $R \circ P = Q$ po P, jednačina ima rešenje.
„$\Rightarrow$" Pretpostavimo da jednačina $R \circ P = Q$ ima rešenje P. Tada iz teoreme 3.21, (i) imamo

$$P \leq R^{-1} \triangleleft (R \circ P) = R^{-1} \triangleleft Q,$$

tj. $R^{-1} \triangleleft Q$ je veće ili jednako bilo kom rešenju P jednačine $R \circ P = Q$. Koristeći 3.21, (ii) imamo

$$R \circ (R^{-1} \triangleleft Q) \leq Q.$$

S druge strane, kako je $P \leq R^{-1} \triangleleft Q$ i kako je $\circ$ rastuća po drugom argumentu, imamo

$$R \circ (R^{-1} \triangleleft Q) \geq R \circ P = Q.$$

Dakle, $R \circ (R^{-1} \triangleleft Q) = Q$, tj. $R^{-1} \triangleleft Q$ je rešenje, štaviše, ono je najveće rešenje.

(ii)„$\Leftarrow$ Ako je $(P \triangleleft Q^{-1})^{-1}$ rešenje, onda jednačina $R \circ P = Q$ ima rešenje.
„$\Rightarrow$" Pretpostavimo da $R \circ P = Q$ ima rešenje i označimo ga sa R. Tada na osnovu teoreme 3.21, (iii) imamo

$$R \leq (P \triangleleft (R \circ P)^{-1})^{-1} = (P \triangleleft Q^{-1})^{-1}$$

tj. $(P \triangleleft Q^{-1})^{-1}$ je veće od svakog rešenja R jednačine $R \circ P = Q$. Pokazaćemo sad da je $(P \triangleleft Q^{-1})^{-1}$ rešenje. Iz teoreme 3.21, (iv) imamo

$$(P \triangleleft Q^{-1})^{-1} \circ P \leq Q.$$

S druge strane, kako je $R \leq (P \triangleleft Q^{-1})^{-1}$ i kako je $\circ$ rastuća po prvom argumentu, imamo

$$(P \triangleleft Q^{-1})^{-1} \circ P \geq R \circ P = Q.$$

Kombinacijom odgovarajućih nejednakosti dobijamo

$$(P \triangleleft Q^{-1})^{-1} \circ P = Q,$$

tj. $(P \triangleleft Q^{-1})^{-1}$ jeste rešenje, a takođe i najveće rešenje jednačine $R \circ P = Q$.
$\square$

Primer 3.23 *Data je rasplinuta relacijska jednačina*

$$\begin{bmatrix} 0.1 & 0.4 & 0.2 & 0.4 \\ 0.4 & 0.5 & 0.2 & 0.1 \\ 0.8 & 0.3 & 0.6 & 0.2 \end{bmatrix} \circ P = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.1 & 0.2 \\ 0.3 & 0.1 & 0.4 \\ 0.3 & 0.1 & 0.6 \end{bmatrix}.$$

Tada je

$$R^{-1} \lhd Q = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.4 & 0.8 \\ 0.4 & 0.5 & 0.3 \\ 0.2 & 0.2 & 0.6 \\ 0.4 & 0.1 & 0.2 \end{bmatrix} \lhd \begin{bmatrix} 0.3 & 0.1 & 0.2 \\ 0.3 & 0.1 & 0.4 \\ 0.3 & 0.1 & 0.6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.1 & 0.6 \\ 0.3 & 0.1 & 0.2 \\ 0.3 & 0.1 & 1 \\ 0.3 & 0.1 & 0.2 \end{bmatrix},$$

a kako je

$$\begin{bmatrix} 0.1 & 0.4 & 0.2 & 0.4 \\ 0.4 & 0.5 & 0.2 & 0.1 \\ 0.8 & 0.3 & 0.6 & 0.2 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0.3 & 0.1 & 0.6 \\ 0.3 & 0.1 & 0.2 \\ 0.3 & 0.1 & 1 \\ 0.3 & 0.1 & 0.2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.1 & 0.2 \\ 0.3 & 0.1 & 0.4 \\ 0.3 & 0.1 & 0.6 \end{bmatrix},$$

zaključujemo da je $R^{-1} \lhd Q$ rešenje jednačine. Iz prethodne teoreme sledi da je ovo najveće rešenje date jednačine.

Teorema 3.24 *Neka su $R \in \mathcal{F}(X \times Y)$, $P \in \mathcal{F}(Y \times Z)$ i $Q \in \mathcal{F}(X \times Z)$ rasplinute relacije. Tada su sledeće nejednakosti tačne:*
(i) $(Q \lhd P^{-1}) \lhd P \geq Q$;
(ii) $(R \lhd P) \lhd P^{-1} \geq R$;
(iii) $R^{-1} \circ (R \lhd P) \leq P$;
(iv) $R \lhd (R^{-1} \circ Q) \geq Q$.

Dokaz. (i) Na osnovu propozicije 3.16, (vii) i budući da je $\to$ opadajuća po prvom argumentu imamo

$$\begin{aligned} ((Q \lhd P^{-1}) \lhd P)(x,z) &= \bigwedge_{y\in Y} (Q \lhd P^{-1})(x,y) \to P(y,z) \\ &= \bigwedge_{y\in Y} (\bigwedge_{t\in Z} Q(x,t) \to P(y,t)) \to P(y,z) \\ \geq \bigwedge_{y\in Y} (Q(x,z) \to P(y,z)) \to P(y,z) &\geq \bigwedge_{y\in Y} Q(x,z) = Q(x,z). \end{aligned}$$

(ii) Kao u dokazu prethodne nejednakosti, koristimo propoziciju 3.16, (vii)

$$\begin{aligned} ((R \lhd P) \lhd P^{-1})(x,y) &= \bigwedge_{z\in Z} (R \lhd P)(x,z) \to P^{-1}(z,y) \\ &= \bigwedge_{z\in Z} (R \lhd P)(x,z) \to P(y,z) \\ &= \bigwedge_{z\in Z} (\bigwedge_{t\in Y} R(x,t) \to P(t,z)) \to P(y,z) \\ \geq \bigwedge_{z\in Z} (R(x,y) \to P(y,z)) \to P(y,z) &\geq \bigwedge_{z\in Z} R(x,y) = R(x,y) \end{aligned}$$

(iii) Za dokaz ove nejednakosti koristimo propoziciju 3.16, (v) pa je

$$(R^{-1} \circ (R \lhd P))(y,z) = \bigvee_{x\in X} R^{-1}(y,x) \wedge (R \lhd P)(x,z)$$

$$= \bigvee_{x\in X} R(x,y) \wedge (\bigwedge_{t\in Y} R(x,t) \to P(t,z))$$

$$\leq \bigvee_{x\in X} R(x,y) \wedge (R(x,y) \to P(y,z)) \leq \bigvee_{x\in X} P(y,z) = P(y,z)$$

(iv) Koristeći propoziciju 3.16, (vi) imamo

$$(R \lhd (R^{-1} \circ Q))(x,z) = \bigwedge_{y\in Y} R(x,y) \to (R^{-1} \circ Q)(y,z)$$

$$= \bigwedge_{y\in Y} R(x,y) \to (\bigvee_{t\in X} R^{-1}(y,t) \wedge Q(t,z))$$

$$\geq \bigwedge_{y\in Y} R(x,y) \to R(x,y) \wedge Q(x,z)$$

$$\bigwedge_{y\in Y} Q(x,z) = Q(x,z)$$

□

Teorema 3.25 *(i) Jednačina $R \lhd P = Q$ sa nepoznatom R ima rešenje akko je $Q \lhd P^{-1}$ rešenje i tada je ono najveće rešenje.*
(ii) Jednačina $R \lhd P = Q$ sa nepoznatom P ima rešenje akko je $R^{-1} \lhd Q$ rešenje i tada je ono najmanje rešenje.

Dokaz. „$\Leftarrow$" Očigledno.
„$\Rightarrow$" Pretpostavimo da jednačina $R \lhd P = Q$ ima rešenje R. Na osnovu teoreme 3.24, (ii) znamo da

$$R \leq (R \lhd P) \lhd P^{-1} = Q \lhd P^{-1},$$

tj. $Q \lhd P^{-1}$ je veće od svakog rešenja R.
Iz teoreme 3.24, (i) imamo da

$$Q \leq (Q \lhd P^{-1}) \lhd P.$$

S druge strane, kako je $R \leq Q \lhd P^{-1}$, a budući da je $\lhd$ opadajuća po prvom argumentu, imamo

$$Q = R \lhd P \geq (Q \lhd P^{-1}) \lhd P.$$

Kombinacijom ove dve nejednakosti dobijamo $Q = (Q \lhd P^{-1}) \lhd P$.
(ii) „$\Leftarrow$" Očigledno.
„$\Rightarrow$" Neka je P rešenje jedančine $R \lhd P = Q$. Tada je po teoremi 3.24, (iii)

$$P \geq R^{-1} \circ (R \lhd P) = R^{-1} \circ Q,$$

tj. $R^{-1} \circ Q$ je manje od svakog rešenja P.
Takođe, na osnovu teoreme 3.24, (iv) imamo

$$Q \leq R \lhd (R^{-1} \circ Q)$$

a kako je $P \geq R^{-1} \lhd Q$ i kako je $\lhd$ rastuća po drugom argumentu, imamo

$$Q = R \lhd P \geq R \lhd (R^{-1} \circ Q)$$

i dobijamo $Q = R \lhd (R^{-1} \circ Q)$. □

Primer 3.26 *Data je rasplinuta relacijska jednačina*

$$\begin{bmatrix} 0.1 & 0.4 & 0.2 & 0.4 \\ 0.4 & 0.5 & 0.2 & 0.1 \\ 0.8 & 0.3 & 0.6 & 0.2 \end{bmatrix} \triangleleft P = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.1 & 0.2 \\ 0.3 & 0.1 & 0.4 \\ 0.3 & 0.1 & 0.6 \end{bmatrix}.$$

Tada je

$$R^{-1} \circ Q = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.4 & 0.8 \\ 0.4 & 0.5 & 0.3 \\ 0.2 & 0.2 & 0.6 \\ 0.4 & 0.1 & 0.2 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0.3 & 0.1 & 0.2 \\ 0.3 & 0.1 & 0.4 \\ 0.3 & 0.1 & 0.6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.1 & 0.6 \\ 0.3 & 0.1 & 0.4 \\ 0.3 & 0.1 & 0.6 \\ 0.3 & 0.1 & 0.2 \end{bmatrix},$$

a kako je

$$\begin{bmatrix} 0.1 & 0.4 & 0.2 & 0.4 \\ 0.4 & 0.5 & 0.2 & 0.1 \\ 0.8 & 0.3 & 0.6 & 0.2 \end{bmatrix} \triangleleft \begin{bmatrix} 0.3 & 0.1 & 0.6 \\ 0.3 & 0.1 & 0.4 \\ 0.3 & 0.1 & 0.6 \\ 0.3 & 0.1 & 0.2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.1 & 0.2 \\ 0.3 & 0.1 & 0.4 \\ 0.3 & 0.1 & 0.6 \end{bmatrix},$$

zaključujemo da je $R^{-1} \circ Q$ rešenje jednačine. Iz prethodne teoreme sledi da je ovo najmanje rešenje date jednačine.

3.6 Kompozicija max-t-norma

Max-min kompozicija se može uopštiti kompozicijama max-t-norme.

Definicija 3.27 *Neka je τ proizvoljna neprekidna t-norma, $R \in \mathcal{F}(X \times Y)$ i $P \in \mathcal{F}(Y \times Z)$.* **Kompozicija max-t-norma** *je*

$$(R \circ_\tau P)(x,z) = \bigvee_{y \in Y} R(x,y) \ \tau \ P(y,z).$$

Napomena 3.28 *T-norma je neprekidna ako je neprekidna kao funckija $\tau : [0,1]^2 \to [0,1]$.*

Propozicija 3.29 *(i)Max-t-norma kompozicija je asocijativna, tj.*

$$(R \circ_\tau S) \circ_\tau Q = R \circ_\tau (S \circ_\tau Q),$$

za svako $R \in \mathcal{F}(X \times Y)$, $S \in \mathcal{F}(Y \times Z)$ i $Q \in \mathcal{F}(Z \times U)$.
(ii) Ako je $R_1 \leq R_2$, onda

$$R_1 \circ_\tau Q \leq R_2 \circ_\tau Q$$

za sve $R_1, R_2 \in \mathcal{F}(X \times Y)$ i $Q \in \mathcal{F}(Y \times Z)$.

Dokaz. (i) Kako je t-norma τ rastuća i neprekidna, imamo

$$((R \circ_\tau S) \circ_\tau Q)(x,u) = \bigvee_{z \in Z} \left(\bigvee_{y \in Y} R(x,y) \ \tau \ S(y,z) \right) \tau \ Q(z,u)$$

$$= \bigvee_{z \in Z} \bigvee_{y \in Y} R(x,y) \ \tau \ S(y,z) \ \tau \ Q(z,u) = (R \circ_\tau (S \circ_\tau Q))(x,u).$$

(ii) Dokazuje se na osnovu činjenice da je τ rastuća po obe promenljive, tj.

$$(R_1 \circ_\tau Q)(x,z) = \bigvee_{y \in Y} R_1(x,y) \tau Q(y,z)$$

$$\leq \bigvee_{y \in Y} R_2(x,y) \tau Q(y,z) = (R_2 \circ_\tau Q)(x,z).$$

$\square$

Propozicija 3.30 *Za sve* $R, S \in \mathcal{F}(X \times Y)$, $Q \in \mathcal{F}(Y \times Z)$ *i svaku t-normu* τ *imamo*
(i) $(R \vee S) \circ_\tau Q = (R \circ_\tau Q) \vee (S \circ_\tau Q)$
(ii) $(R \wedge S) \circ_\tau Q \leq (R \circ_\tau Q) \wedge (S \circ_\tau Q)$.

Dokaz. (i) Kako je τ rastuća imamo

$$((R \vee S) \circ_\tau Q)(x,z) = \bigvee_{y \in Y} (R \vee S)(x,y) \ \tau \ Q(y,z)$$

$$\leq \bigvee_{y \in Y} (R(x,y) \ \tau \ Q(y,z)) \vee \bigvee_{y \in Y} (S(x,y) \ \tau \ Q(y,z)),$$

a kako je $R \circ_\tau Q \leq (R \vee S) \circ_\tau Q$ i $S \circ_\tau Q \leq (R \vee S) \circ_\tau Q$, imamo

$$(R \circ_\tau Q) \vee (S \circ_\tau Q) = (R \vee S) \circ_\tau Q.$$

(ii) Takođe, kako je τ rastuća imamo

$$((R \wedge S) \circ_\tau Q)(x,z) = \bigvee_{y \in Y} (R \wedge S)(x,y) \ \tau \ Q(y,z)$$

$$\leq \bigvee_{y \in Y} (R(x,y) \ \tau \ Q(y,z)) \wedge \bigvee_{y \in Y} (S(x,y) \ \tau \ Q(y,z))$$

$$= (R \circ_\tau Q)(x,z) \wedge (S \circ_\tau Q)(x,z).$$

$\square$

3.7 Min $\rightarrow_\tau$ kompozicija

Podsetimo se, za proizvoljnu t-normu τ, R-implikaciju (reziduiranu implikaciju) $\rightarrow_\tau$ definišemo kao

$$x \rightarrow_\tau y = sup\{z \mid x \ \tau \ z \leq y\}.$$

Propozicija 3.31 *Za sve* $x, y, z \in [0,1]$ *i za svaku t-normu* τ *reziduirana implikacija* $\rightarrow_\tau$ *ima sledeće osobine:*
(i) $x \ \tau \ (x \rightarrow_\tau y) \leq y$;
(ii) $x \rightarrow_\tau (x \ \tau \ y) \geq y$;
(iii) $(x \rightarrow_\tau y) \rightarrow_\tau y \geq x$.

Dokaz. (i) Imamo

$$x\tau(x \rightarrow_\tau y) = x\tau sup\{z \mid x\tau z \leq y\}.$$

Neka je sada $\varepsilon \geq 0$ proizvoljno. Tada postoji $z_0 \in \{z \mid x\tau z \leq y\}$ tako da je $x \rightarrow_\tau y < z_0 + \varepsilon$, pa imamo

$$x\tau(x \rightarrow_\tau y) < x\tau(z_0 + \varepsilon).$$

Iz neprekidnosti τ sledi

$$x\tau(x \rightarrow_\tau y) \leq x\tau z_0.$$

Dalje, uslov $z_0 \in \{z \mid x\tau z \leq y\}$ implicira $x\tau z_0 \leq y$, a tada je $x\tau(x \rightarrow_\tau y) \leq y$.
(ii) Kako je $y \in \{z \mid x\tau z \leq x\tau y\}$, imamo

$$x \rightarrow_\tau (x\tau y) = sup\{z \mid x\tau z \leq x\tau y\} \geq y.$$

(iii) Da bismo dokazali poslednju implikaciju, najpre zapazimo da je

$$(x \rightarrow_\tau y) \rightarrow_\tau y = sup\{z \mid (x \rightarrow_\tau y)\tau z \leq y\}.$$

Koristeći (i) dobijamo $(x \rightarrow_\tau y)\tau x \leq y$, a tada $x \in \{z \mid (x \rightarrow_\tau y)\tau z \leq y\}$. Dakle, $(x \rightarrow_\tau y) \rightarrow_\tau y \geq x$. □

Definicija 3.32 *Min$\rightarrow_\tau$ kompozicija se definiše slično kao min$\rightarrow$ kompozicija:*

$$(R \lhd_\tau S)(x,z) = \bigwedge_{y \in Y} R(x,y) \rightarrow_\tau S(x,y).$$

Propozicija 3.33 *Ako su $R, S \in \mathcal{F}(X \times Y)$ takve da je $R \leq S$ i ako je $Q \in \mathcal{F}(Y \times Z)$, onda važi $R \lhd_\tau Q \geq S \lhd_\tau Q$.*

Dokaz. Kako je $\rightarrow_\tau$ opadajuća po prvom argumentu, imamo

$$(R \lhd_\tau Q)(x,z) = \bigwedge_{y \in Y} R(x,y) \rightarrow_\tau Q(y,z)$$

$$\geq \bigwedge_{y \in Y} S(x,y) \rightarrow_\tau Q(y,z) = (S \lhd_\tau Q)(x,z).$$

□

3.8 Rasplinute relacijske jednačine sa kompozicijama max-t-norma i min$\rightarrow_\tau$

Rasplinute relacijske jednačine sa max-t-norma i min$\rightarrow_\tau$ kompozicijama su

$$R \circ_\tau P = Q$$

i

$$R \lhd_\tau P = Q,$$

pri čemu $R \in \mathcal{F}(X \times Y)$, $P \in \mathcal{F}(Y \times Z)$ i $Q \in \mathcal{F}(X \times Z)$.
Sledeća teorema je generalizacija teoreme 3.21.

Teorema 3.34 *Neka je $R \in \mathcal{F}(X \times Y)$, $P \in \mathcal{F}(Y \times Z)$ i $Q \in \mathcal{F}(X \times Z)$. Sledeće nejednakosti su tačne:*
(i) $P \leq R^{-1} \lhd_\tau (R \circ_\tau P)$;
(ii) $R \circ_\tau (R^{-1} \lhd_\tau Q) \leq Q$;
(iii) $R \leq (P \lhd_\tau (R \circ_\tau P)^{-1})^{-1}$;
(iv) $(P \lhd_\tau Q^{-1})^{-1} \circ_\tau P \leq Q$.

Dokaz. Kako je $\rightarrow_\tau$ rasplinuta implikacija, ona je opadajuća po prvom i rastuća po drugom argumentu.
(i) Koristeći propoziciju 3.31, (ii) imamo da je za sve $y \in Y$ i $z \in Z$

$$(R^{-1} \lhd_\tau (R \circ_\tau P))(y,z) = \bigwedge_{x \in X} R^{-1}(y,x) \rightarrow_\tau \bigvee_{t \in Y} R(x,t) \tau P(t,z)$$

$$\geq \bigwedge_{x \in X} R(x,y) \rightarrow_\tau (R(x,y) \tau P(y,z)) \geq \bigwedge_{x \in X} P(y,z) = P(y,z).$$

(ii) Iz propozicije 3.31, (i) imamo

$$(R \circ_\tau (R^{-1} \lhd_\tau Q))(x,z) = \bigvee_{y \in Y} R(x,y) \tau (\bigwedge_{t \in X} R^{-1}(y,t) \rightarrow_\tau Q(t,z))$$

$$\leq \bigvee_{y \in Y} R(x,y) \tau (R(x,y) \rightarrow_\tau Q(x,z)) \leq \bigvee_{y \in Y} Q(x,z) = Q(x,z).$$

(iii) Za dokaz ove nejednakosti koristimo propoziciju 3.31, (ii):

$$(P \lhd_\tau (R \circ_\tau P)^{-1})^{-1}(x,y) = \bigwedge_{z \in Z} P(y,z) \rightarrow_\tau (R \circ_\tau P)^{-1}(z,x)$$

$$= \bigwedge_{z \in Z} P(y,z) \rightarrow_\tau (R \circ_\tau P)(x,z) = \bigwedge_{z \in Z} P(y,z) \rightarrow_\tau \bigvee_{t \in Y} R(x,t) \tau P(t,z)$$

$$\geq \bigwedge_{z \in Z} P(y,z) \rightarrow_\tau (R(x,y) \tau P(y,z)) \geq \bigwedge_{z \in Z} R(x,y) = R(x,y).$$

(iv) Na osnovu propozicije 3.31, (i) imamo:

$$((P \lhd_\tau Q^{-1})^{-1} \circ_\tau P)(x,z) = \bigvee_{y \in Y} (\bigwedge_{t \in Z} P(y,t) \rightarrow_\tau Q(x,t)) \tau P(y,z)$$

$$\leq \bigvee_{y \in Y} (P(y,z) \rightarrow_\tau Q(x,z)) \tau P(y,z) \leq \bigvee_{y \in Y} Q(x,z) = Q(x,z).$$

$\square$

Teorema 3.35 *(i) Jednačina $R \circ_\tau P = Q$ sa nepoznatom P ima rešenje akko je $R^{-1} \triangleleft_\tau Q$ rešenje i tada je ono najveće rešenje.*
(ii) Jednačina $R \circ_\tau P = Q$ sa nepoznatom R ima rešenje akko je $(P \triangleleft_\tau Q^{-1})^{-1}$ rešenje i tada je ono najveće rešenje.

Dokaz. (i)„$\Leftarrow$" Ako je $\tilde{P} = R^{-1} \triangleleft_\tau Q$ rešenje jednačine $R \circ_\tau P = Q$ po P, onda ona ima rešenje.
„$\Rightarrow$" Pretpostavimo da jednačina $R \circ_\tau P = Q$ ima rešenje, obeležimo ga sa P. Tada iz teoreme 3.34, (i) imamo

$$P \leq R^{-1} \triangleleft_\tau (R \circ_\tau P) = R^{-1} \triangleleft_\tau Q,$$

tj. $R^{-1} \triangleleft_\tau Q$ je veće ili jednako bilo kom rešenju P jednačine $R \circ_\tau P = Q$.
Na osnovu teoreme 3.34, (ii) znamo da je

$$R \circ_\tau (R^{-1} \triangleleft_\tau Q) \leq Q,$$

a kako je $P \leq R^{-1} \triangleleft_\tau Q$ i kako je $\circ_\tau$ rastuća po drugom argumentu, imamo

$$R \circ_\tau (R^{-1} \triangleleft_\tau Q) \geq R \circ_\tau P = Q.$$

Dakle, $R \circ_\tau (R^{-1} \triangleleft_\tau Q) = Q$, tj. $R^{-1} \triangleleft_\tau Q$ je rešenje, štaviše, ono je najveće rešenje.

(ii)„$\Leftarrow$" Ako je $(P \triangleleft_\tau Q^{-1})^{-1}$ rešenje, onda jednačina $R \circ_\tau P = Q$ ima rešenje.
„$\Rightarrow$" Pretpostavimo da $R \circ_\tau P = Q$ ima rešenje i označimo ga sa R. Tada na osnovu teoreme 3.34, (iii) imamo

$$R \leq (P \triangleleft_\tau (R \circ_\tau P)^{-1})^{-1} = (P \triangleleft_\tau Q^{-1})^{-1}$$

tj. $(P \triangleleft_\tau Q^{-1})^{-1}$ je veće od svakog rešenja R jednačine $R \circ_\tau P = Q$. Pokazaćemo sad da je $(P \triangleleft_\tau Q^{-1})^{-1}$ rešenje. Iz teoreme 3.34, (iv) imamo

$$(P \triangleleft_\tau Q^{-1})^{-1} \circ_\tau P \leq Q.$$

S druge strane, kako je $R \leq (P \triangleleft_\tau Q^{-1})^{-1}$ i kako je $\circ_\tau$ rastuća po prvom argumentu, imamo

$$(P \triangleleft_\tau Q^{-1})^{-1} \circ_\tau P \geq R \circ_\tau P = Q.$$

Kombinacijom odgovarajućih nejednakosti dobijamo

$$(P \triangleleft_\tau Q^{-1})^{-1} \circ_\tau P = Q,$$

tj. $(P \triangleleft_\tau Q^{-1})^{-1}$ jeste rešenje, a takođe i najveće rešenje jednačine $R \circ_\tau P = Q$.
$\square$

Teorema 3.36 *Neka je $R \in \mathcal{F}(X \times Y)$, $P \in \mathcal{F}(Y \times Z)$ i $Q \in \mathcal{F}(X \times Z)$. Sledeće nejednakosti su tačne:*
(i) $(Q \lhd_\tau P^{-1}) \lhd_\tau P \geq Q$;
(ii) $(R \lhd_\tau P) \lhd_\tau P^{-1} \geq R$;
(iii) $R^{-1} \circ_\tau (R \lhd_\tau P) \leq P$;
(iv) $R \lhd_\tau (R^{-1} \circ_\tau Q) \geq Q$.

Dokaz. (i) Koristeći propoziciju 3.31, (iii) i budući da je $\to_\tau$ opadajuća po prvom argumentu, imamo

$$((Q \lhd_\tau P^{-1}) \lhd_\tau P)(x,z) = \bigwedge_{y\in Y} (\bigwedge_{t\in Z} Q(x,t) \to_\tau P(y,t)) \to_\tau P(y,z)$$

$$\geq \bigwedge_{y\in Y} (Q(x,z) \to_\tau P(y,z)) \to_\tau P(y,z) \geq \bigwedge_{y\in Y} Q(x,z) = Q(x,z).$$

(ii) Slično prethodnom slučaju, na osnovu propozicije 3.31, (iii) imamo

$$((R \lhd_\tau P) \lhd_\tau P^{-1})(x,y) = \bigwedge_{z\in Z} (\bigwedge_{t\in Y} R(x,t) \to_\tau P(t,z)) \to_\tau P(y,z)$$

$$\geq \bigwedge_{z\in Z} (R(x,y) \to_\tau P(y,z)) \to_\tau P(y,z) \geq \bigwedge_{z\in Z} R(x,y) = R(x,y)$$

(iii) Da bismo dokazali ovu nejednakost, koristimo propoziciju 3.31, (i)

$$(R^{-1} \circ_\tau (R \lhd_\tau P))(y,z) = \bigvee_{x\in X} R(x,y)\tau(\bigwedge_{t\in Y} (R(x,t) \to_\tau P(t,z)))$$

$$\leq \bigvee_{x\in X} R(x,y)\tau(R(x,y) \to_\tau P(y,z)) \leq \bigvee_{x\in X} P(y,z) = P(y,z)$$

(iv) Koristeći propoziciju 3.31, (ii) imamo

$$(R \lhd_\tau (R^{-1} \circ_\tau Q))(x,z) = \bigwedge_{y\in Y} R(x,y) \to_\tau (\bigvee_{t\in X} R(t,y)\tau Q(t,z))$$

$$\geq \bigwedge_{y\in Y} R(x,y) \to_\tau (R(x,y)\tau Q(x,z)) \geq \bigwedge_{y\in Y} Q(x,z) = Q(x,z).$$

□

Teorema 3.37 *(i) Jednačina $R \lhd_\tau P = Q$ sa nepoznatom R ima rešenje akko je $Q \lhd_\tau P^{-1}$ rešenje i tada je ono najveće rešenje.*
(ii) Jednačina $R \lhd_\tau P = Q$ sa nepoznatom P ima rešenje akko je $R^{-1} \circ_\tau Q$ rešenje i tada je ono najmanje rešenje.

Dokaz. „$\Leftarrow$" Očigledno.
„$\Rightarrow$" Pretpostavimo da jednačina $R \lhd_\tau P = Q$ ima rešenje R. Na osnovu teoreme 3.36, (ii) znamo da je

$$R \leq (R \lhd_\tau P) \lhd_\tau P^{-1} = Q \lhd_\tau P^{-1},$$

tj. $Q \lhd_\tau P^{-1}$ je veće od svakog rešenja R.
Iz teoreme 3.36, (i) imamo da

$$Q \leq (Q \lhd_\tau P^{-1}) \lhd_\tau P.$$

S druge strane, kako je $R \leq Q \lhd_\tau P^{-1}$, i kako je $\lhd_\tau$ opadajuća po prvom argumentu, imamo

$$Q = R \lhd_\tau P \geq (Q \lhd_\tau P^{-1}) \lhd_\tau P.$$

Kombinacijom ove dve nejednakosti dobijamo $Q = (Q \lhd_\tau P^{-1}) \lhd_\tau P$.
(ii) „$\Leftarrow$" Očigledno.
„$\Rightarrow$" Neka je P rešenje jedančine $R \lhd_\tau P = Q$. Tada je po teoremi 3.36, (iii)

$$P \geq R^{-1} \circ_\tau (R \lhd_\tau P) = R^{-1} \circ_\tau Q,$$

tj. $R^{-1} \circ_\tau$ Q je manje od svakog rešenja P.
Takođe, na osnovu teoreme 3.36, (iv) imamo

$$Q \leq R \lhd_\tau (R^{-1} \circ_\tau Q),$$

a kako je $P \geq R^{-1} \lhd_\tau Q$ i kako je $\lhd_\tau$ rastuća po drugom argumentu, imamo

$$Q = R \lhd_\tau P \geq R \lhd_\tau (R^{-1} \circ_\tau Q)$$

i dobijamo $Q = R \lhd_\tau (R^{-1} \circ_\tau Q)$. □

Glava 4

Zaključak

Kako je rasplinuti skup uopštenje klasičnog skupa, u smislu proširenja karakteristične funkcije sa kodomena $\{0, 1\}$ na karakterističnu funkciju sa kodomenom $[0, 1]$, tako se i rasplinuta relacija može posmatrati kao generalizacija binarne relacije. Definišemo je kao preslikavanje $R : X \times Y \to [0, 1]$ i možemo je predstaviti matricom ako su X i Y konačni skupovi.
Rasplinute relacijske jednačine koje smo najpre razmatrali su oblika $R \circ P = Q$ i $R \triangleleft P = Q$, gde je $\circ$ max-min kompozicija, a $\triangleleft$ kompozicija min$\to$. Jednačine ovog oblika opširnije su obrađene u [5]. Zadatak je bio ispitati pod kojim uslovima one imaju rešenje, kao i nalaženje najvećeg rešenja ili, u slučaju kada nam je nepoznata P u jednačini $R \triangleleft P = Q$, najmanjeg rešenja. Rezultati ovog razmatranja demonstrirani su na konkretnim primerima.
Za datu t-normu τ može se definisati kompozicija max-t-norma i min$\to_\tau$ kompozicija, što u stvari predstavlja uopštenje max-min i min$\to$ kompozicije i njihovih osobina. Rasplinute relacijske jednačine sa kompozicijom max-t-norma, $R \circ_\tau P = Q$, i sa min$\to_\tau$ kompozicijom, $R \triangleleft_\tau P = Q$, obrađene su u [5] i [4], a ispituju se na sličan način kao rasplinute relacijske jednačine sa max-min i min$\to$ kompozicijama.

Rasplinute relacijske jednačine prvi je proučavao Elie Sanchez u [5]. Kasnije se njihovo polje primene značajno proširilo i danas se koriste u identifikaciji i predikciji rasplinutih sistema, disretnim dinamičkim sistemima, veštačkoj inteligenciji, teoriji odlučivanja, kompresiji i rekonstrukciji slika i u mnogim drugim oblastima.
Kod obrade slika na bazi kompresije podataka pomoću rasplinutih jednačina u [3], rešenja specifične klase jednačina dovode do rekonstruisane rasplinute relacije (slike).
Elie Sanchez je proučavao primenu rasplinutih relacijskih jednačina u dijagnozi u medicini. Obrazac lekarskog znanja sastoji se od lingvističkih unosa koji se interpretiraju kao rasplinuti skupovi, tako da različiti stručnjaci mogu obezbediti drugačije karakterizacje za iste obrasce.

Literatura

[1] Bede, B., *Mathematics of fuzzy sets and fuzzy logic*, Springer-Verlag, Berlin 2013.

[2] Belohlávek, R., *Fuzzy relational systems: foundations and principles*, Kluwer Academic/ Plenum Publishers, New York 2002.

[3] Hirota, K., Pedrycz, W., *Specificity shift in solving fuzzy relational equations. Fuzzy sets and systems*, 106 (1999), 211-220.

[4] Miyakoshi, M., Shimbo, M., *Solutions of composite fuzzy relational equations with triangular norms. Fuzzy sets and systems*, 16 (1985), 53-63.

[5] Sanchez, E., *Resolution of composite fuzzy relation equations. Information and control*, 30 (1976), 38-48.

[6] Zadeh, L. A., *From circuit theory to system theory. Proc. Inst. Radio Eng.* 50(1962), 856-865.

[7] Zadeh, L. A., *Fuzzy sets. Information and control*, 8(1965), 338-353.

[8] Zahirović, S., *Stepene strukture i dobre faktor relacije*, master rad, Univerzitet u Novom Sadu, Novi Sad, 2013.

Biografija

Tatjana Đurin rođena je 5. jula 1984. godine u Zrenjaninu. Osnovnu školu "Petar Petrović Njegoš" završila je 1999. godine. Godine 2003. završava "Zrenjaninsku gimnaziju" i iste godine upisuje osnovne studije na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu, smer profesor matematike (A1). Položila je sve ispite predviđene nastavnim planom i programom i time stekla pravo na odbranu ovog rada.

u Novom Sadu, mart 2014. Tatjana Đurin

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj: (RBR):

Identifikacioni broj: (IBR):

Tip dokumentacije: (TD): Monografska dokumentacija

Tip zapisa: (TZ): Tekstualni štampani materijal

Vrsta rada: (VR): Diplomski rad

Autor: (AU): Tatjana Đurin

Mentor: (MN): Rozália Sz. Madarász

Naslov rada: (NR): Kompozicije rasplinutih relacija i relacijske jednačine

Jezik publikacije: (JP): srpski (latinica)

Jezik izvoda: (JI): srpski i engleski

Zemlja publikovanja: (ZP): Srbija

Uže geografsko područje: (UGP): Vojvodina

Godina: (GO): 2014.

Izdavač: (IZ): Autorski reprint

Mesto i adresa: (MA): Novi Sad, Departman za matematiku i informatiku, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, Trg Dositeja Obradovića 4

Fizički opis rada: (FO): 3/40/8/0/0/1/0

Naučna oblast: (NO): Matematika

Naučna disciplina: (ND): Algebra

Predmetna odrednica/Ključne reči: (PO): raplinuti skupovi, rasplinute relacije, kompozicije rasplinutih relacija, rasplinute relacijske jednačine

UDK:

Čuva se: (ČU): Biblioteka Departmana za matematiku i informatiku Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta u Novom Sadu

Važna napomena: (VN):

Izvod: (IZ): Ovaj rad se bavi rasplinutim relacijama, njihovim kompozicijama i rasplinutim relacijskim jednačinama. Na osnovu osobina rasplinutih relacija i njihovih kompozicija, ispitujemo potreban i dovoljan uslov da rasplinuta jednačina sa max-min i min-max kompozicijama bude rešiva, kao i postojanje najvećeg, odnosno najmanjeg rešenja. Za proizvoljnu t-normu, rezultate koje smo dobili koristimo u razmatranju uopštenja prethodnih zaključaka. Rasplinute relacijske jednačine sa kompozicijama max-t-norma i min$\rightarrow_\tau$ ispitujemo na sličan način kao rasplinute jednačine sa max-min i min-max kompozicijama.

Datum prihvatanja teme od strane NN veća: (DP): 10. 1. 2014.

Datum odbrane: (DO):

Članovi komisije: (KO):

Predsednik: dr Branimir Šešelja, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

Član: dr Rozália Sz. Madarász, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, mentor

Član: dr Ivica Bošnjak, vanredni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF NATURAL SCIENCES AND MATHEMATICS
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number: (ANO):

Identification number: (INO):

Document type: (DT): Monographic documentation

Type of record: (TR): Textual printed matter

Contents code: (CC): Graduation thesis

Author: (AU): Tatjana Đurin

Mentor: (MN): Rozália Sz. Madarász

Title: (TI): Compositions of fuzzy relations and fuzzy relational equations

Language of text: (LT): Serbian (latin)

Language of abstract: (LA): Serbian and English

Country of publication: (CP): Serbia

Locality of publication: (LP): Vojvodina

Publication year: (PY): 2014.

Publisher: (PU): Author's reprint

Publ. place: (PP): Novi Sad, Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4

Physical description: (PD): 3/40/8/0/0/1/0

Scientific field: (SF): Mathematics

Scientific discipline: (SD): Algebra

Subject/Key words: (SKW): fuzzy sets, fuzzy relations, compositions of fuzzy relations, fuzzy relation equations

UC:

Holding data: (HD): The Library of the Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Sciences, University of Novi Sad

Note: (N):

Abstract: (AB): This theses deals fuzzy relations, compositions of fuzzy relations and fuzzy relational equations. Considering the properties of fuzzy relations and their compositions we find a solvability condition of the equation with max-min and min-max compositions. Supposing that fuzzy relation is solvable, we find the greatest or the least solution. Using arbitrary t-norm and previous results, fuzzy relational equations with max-t-norm or min$\rightarrow_{\tau}$ compositions can be studied in a similar way as the equations with max-min or min-max compositions.

Accepted by the Scientific Board on: (ASb):

Defended: (DE):

Thesis defend board: (DB):

President: dr Branimir Šešelja professor, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad

Member: dr Rozália Sz. Madarász, full professor, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad, advisor

Member: dr Ivica Bošnjak, associate professor, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad