UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA
MATEMATIKU I INFORMATIKU

Łukasiewiczeve viševrednosne logike i MV-algebre

MASTER TEZA

Autor:
Kristina Fruža

Mentor:
dr Rozália Sz. Madarász

Novi Sad, 2018.

Sadržaj

Predgovor

Nakon, a neretko i tokom izučavanja klasične ("dvovrednosne") logike, prirodno je zapitati se: kako bi izgledao logički sistem u kojem bismo imali tri, četiri, odnosno n istinitosnih vrednosti? Da li je uopšte moguće konstruisati takve logičke sisteme? Da li je "van pameti" razmatrati prebrojivo mnogo ili čak neprebrojivo mnogo istinitosnih vrednosti? Koje bi algebarske strukture odgovarale takvim logičkim sistemima?

U ovom master radu opredelili smo se za izučavanje Łukasiewiczevih viševrednosnih logika, a i MV-algebri jer se nalaze u poželjnom odnosu. Pritom, zadržaćemo se na iskaznim Łukasiewiczevim viševrednosnim logikama.
Prva glava ovog rada je uvodnog karaktera u kojoj je ukratko opisan proces razvijanja viševrednosne logike tokom vremena - od nastanka ideje o njenoj mogućnosti do njene zvanične aktualizacije.
U drugoj glavi je dat pregled osnovnih karakteristika sintakse i semantike logičkih sistema generalno, s kojima ćemo se koristiti u radu. S obzirom na to da ćemo nastojati da utvrdimo odstupanja viševrednosne od klasične logike, radi podsećanja, navedene su odgovarajuće karakteristike klasične logike.
Treća glava je posvećenja isključivo trovalentnim logičkim sistemima. Najpre je predstavljen Kleenejev trovalentni logički sistem K_3^S, a zatim sistem koji je za nas od najvećeg interesa - Łukasiewiczev trovalentni logički sistem L_3. Dato je poređenje sa sistemom K_3^S i sa klasičnim logičkim sistemom, a nakon toga je predstavljena mogućnost njegovog proširenja pomoću tzv. "jake" konjukcije i " jake" disjunkcije. Detaljnije je opisan (pouzdan i kompletan) aksiomatski sistem L_3A. Ova glava završava se algebarskom tačkom gledišta jer nas, prirodno, interesuje: koje to algebarske strukture karakterišu operacije trovalentnih logičkih sistema?
U četvrtoj glavi upoznajemo se sa Łukasiewiczevim beskonačnovrednosnim logičkim sistemom L_∞. Dato je poređenje sa sistemom L_3 i sa klasičnim logičkim sistemom. Detaljnije je opisan aksiomatski sistem $L_\infty A$. Odgovoreno je na pitanja o njegovoj odlučivosti (+), pouzdanosti (+), slaboj kompletnosti (+), jakoj kompletnosti (-), kompaktnosti (-) i važenju teoreme dedukcije (-). Ispostavlja se da ne postoji pouzdan aksiomatski sistem za L_∞ koji bi mogao biti i jako kompletan! Stoga, mora se naći drugi pristup (ukoliko je to moguće) obezbeđivanju kompletnosti logike L_∞. Upravo je ovo predstavljalo motivaciju za uvođenje pojma MV-algebri od strane Changa 1958. godine. MV-algebre su od podjednake važnosti za Łukasiewiczevu beskonačnovrednosnu logiku kao što su Bulove algebre za klasičnu logiku.
Zbog toga je peta glava rezervisana samo za MV-algebre. Nakon pregleda osnovnih definicija i teorema stiže se do prvog relevantnog rezultata - Changove teoreme reprezentacije poddirektnosti, koji će nas na kraju ove glave dovesti do sledećeg relevantnog rezultata:

MV-identitet zadovoljavaju sve MV-algebre akko ga zadovoljavaju svi MV-lanci.
Naredni relevantan rezultat, koji predstavlja "pojačanu" verziju prethodnog, naveden je u šestoj glavi (bez dokaza) i glasi: MV-identitet važi u MV-algebri [0,1] akko važi u svakoj MV-algebri. Zatim je, kao pomoćno sredstvo, uveden pojam W-algebri. Svaka W-algebra postaje MV-algebra ukoliko se na njoj adekvatno definišu odgovarajuće operacije i, analogno, svaka MV-algebra postaje W-algebra ukoliko se na njoj adekvatno definišu odgovarajuće operacije. Zahvaljujući W-algebrama jednostavno se stiže do relevantne MV-algebre tzv. Lindenbaum algebre Łukasiewiczeve logike L_∞. Ukratko, cilj poslednje glave je: stići do potrebnih i dovoljnih uslova neophodnih za jaku kompletnost Łukasiewiczeve logike L_∞, a, onda se, za sam kraj, u to i uveriti.

⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆

Za kraj, iskoristiću priliku da izrazim zahvalnost osobama koje su uticale na izradu ovog rada. Pre svega, zahvaljujem se svojim roditeljima, Dojni i Tiboru, bratu Denisu i dragom Nenadu na neizmernoj podršci i upornom bodrenju. Takođe, zahvaljem se članovima komisije, dr Siniši Crvenkoviću i dr Ivici Bošnjaku, koji su svojim konstruktivnim savetima doprineli da ovaj rad dobije svoju finalnu verziju. Naročito veliku zahvalnost dugujem svom mentoru, dr Rozáliji Sz. Madarász, najpre zbog velikodušne pomoći pri izboru adekvatne teme, zatim zbog celokupnog prenetog znanja tokom školovanja, a ponajviše zbog predanosti ulozi mentora u svakom smislu.

Novi Sad, februar 2018. *Kristina Fruža*

Glava 1

Uvod

1.1 Prve ideje o viševrednosnim logikama

Jednu od najranijih inspiracija za nastanak viševrednosnih logika predstavlja tzv. *Problem of future contigents* o kojem je prvi, smatra se, Aristotel [1] pisao u 9. poglavlju svoga dela *De Interpretatione*[2]. Problem se sastoji u dodeljivanju istinitosne vrednosti u sadašnjosti tvrdnjama kojima se tvrdi o događaju u budućnosti i, u suštini, ilustruje problem prihvatanja principa bivalentnosti. Aristotel je ovaj problem predstavio koristeći čuveni primer o bitki na moru. Posmatrajmo sledeće dve tvrdnje:

Bitka na moru će se odigrati sutra.

Bitka na moru se neće odigrati sutra.

Aristotel je razmatrao pitanja poput sledećeg: Da li se može smatrati da je danas jedna od ovih tvrdnji tačna, a da je druga netačna?
Pretpostavimo da se bitka na moru neće odigrati sutra. Tada je tačno i u prošlosti da ona neće biti odigrana. Ali, sve istine u prošlosti su u sadašnjosti nužne istine. Prema tome, u sadašnjosti je nužno tačno u prošlosti, pre i do trenutka nastanka pretpostavljene tvrdnje da se bitka neće odigrati te je tvrdnja da će se odigrati nužno netačna. Dakle, nije moguće da će se bitka odigrati.
Na osnovu principa bivalentnosti sledi da je svaka tvrdnja ili tačna ili netačna (ima tačno jednu istinitosnu vrednost). Međutim, oba slučaja su u isto vreme moguća tj. ili će se odigrati ili se neće odigrati te su obe tvrdnje niti tačne niti netačne. Aristotel je dodavši pojam *kontigencije*[3] (kao "status" tvrdnji koje nisu niti tačne niti netačne) spasao logiku i u isto vreme ostavio prostora za indeterminaciju u realnosti.

Aristotelov primer o bitki na moru je daleko od "naivnog". Naime, osim Aristotela, mnogi logičari su, pokušavajući da reše ovaj problem, dali svoja tumačenja ovog primera, međutim,

[1] Aristotel (384. p.n.e. - 322. p.n.e.) - starogrčki filozof
[2] drugi tekst po redu u njegovoj čuvenoj kolekciji *Organon*
[3] engl. *contigency*

problem je ostajao nerešen.

Problem je, jasno, usko povezan sa determinizmom - ako su sve tvrdnje o budućnosti ili tačne ili netačne odnosno determinisane sledi da je sve u budućnosti takođe determinisano. A, s obzirom na to koliko je determinizam tada bio kontroverzan pojam, prevazilaženje ovog problema je bilo i više nego poželjno. Upravo zato jedan od uzroka rasprava među epikurejcima sa jedne strane i stoicima sa druge strane predstavljao je problem prihvatanja principa bivaletnosti. Epikurejci, pristalice indeterminizma, odbacili su princip bivalentnosti, dok su stoici, pristalice determinizma, prihvatili princip bivalentnosti.

Problem of future contigents je, takođe, bio uzrok mnogih rasprava tokom srednjeg veka, a problem bi pritom i dalje ostajao nerešen. Tokom druge polovine 19. veka ideja odbacivanja principa bivalentnosti ponovo biva spominjana od strane H. MacColla[4] i Ch.S. Peircea [5].

1.2 Realizacija viševrednosnih logika

Iako se dovodilo u pitanje važenje principa bivalentnosti, pokušaji da se radi logika bez ovog principa nisu bili uspešni sve do perioda između 1920. i 1930. godine kada se zvanično "rodila" viševrednosna logika kao posebna grana logike zahvaljujući nezavisnim radovima J. Łukasiewicza [6] i E.L. Posta [7].

Zapravo, Łukasiewicz se priključio tumačenju Aristotelove rasprave o statusu tvrdnji koje su *future contigents*. Łukasiewiczeva tumačenja su se suštinski oslanjala na odbacivanje principa bivalentnosti, što nije bilo inovativno, ali Łukasiewicz je takav pristup predstavio jasnije i formalnije nego iko drugi ranije. Kako bi zaobišao determinizam, kao pristalica indeterminizma, ustanovio je da je neophodno ograničiti oblast važenja principa bivalentnosti uvođenjem treće istinitosne vrednosti *neodređeno*. Iako *Problem of future contigents* nije u suštini prevaziđen ovim (utvrđeno od strane A.N. Priora[8] 1962. godine), ono što je nama najvažnije jeste da su svi ovi radovi 1920. godine rezultirali time da je konstruisao prvu viševrednosnu logiku kao formalni sistem tzv. *trovalentnu* logiku koja ga je dovela do konstrukcije konačnovrednosne logike, a zatim i do konstrukcije beskonačnovrednosne logike.

Uskoro su usledili radovi Posta 1921. godine koji je, nezavisno radeći od Łukasiewicza, predstavio svoj viševrednosni logički sistem tzv. *n-vrednosnu* logiku koja je funkcionalno kompletna[9] - osobina koju Łukasiewiczevi sistemi ne poseduju. Post se prema ovom problemu ophodio strogo formalno, njega nisu motivisali filozofski aspekti ovog problema, za razliku od Łukasiewicza.

---

[4] Hugh MacColl (1831 - 1909) - škotski matematičar, logičar i pisac
[5] Charles Sanders Peirce (1839 - 1914) - američki filozof, logičar i matematičar
[6] Jan Łukasiewicz (1878 - 1956) - poljski logičar i filozof
[7] Emil Leon Post (1897 - 1954) - američki matematičar i logičar
[8] Arthur Norman Prior (1914 - 1969) - australijanski logičar i filozof
[9] Logički sistem nazivamo *funkcionalno kompletnim* ukoliko se svaki veznik može dobiti kompozicijom veznika tog sistema

M. Wajsberg[10] je postavivši kriterujum aksiomatizacije mnogih konačnovrednosnih logika uključujući i Łukasiewiczevu konačnovrednosnu logiku postao začetnik aksiomatizacije viševrednosnih logika generalno. 1931. godine aksiomatizovao je Łukasiewiczev trovalentni iskazni sistem L_3. Wajsberg je 1935. godine dokazao da je beskonačnovrednosni Lukasiewiczev iskazni račun kompletan s obzirom na aksiome pretpostavljene od strane Łukasiewicza i bio je prvi koji je to učinio, međutim, njegov dokaz nikada nije bio objavljen.

U tom vremenskom periodu (preciznije 1932. godine) je i K.F. Gödel[11] pokušavao da objasni *intuicionističku* logiku (u kojoj se ne prihvataju univerzalni karakteri nekih osnovnih zakona logike i istinitim se smatra isključivo ono što može biti dokazano) pretpostavljajući postojanje više od dve istinitosnih vrednosti, u čemu mu se pridružio i S. Jaskowski[12], koji je 1936. godine i doprineo oblasti značajnim rezultatima. Oni su razjasnili međusobnu vezu intuicionističke i viševrednosne logike u smislu da je dokazano da ne postoji iskazni viševrednosni sistem čiji se skup logički zadovoljivih formula poklapa sa skupom logički zadovoljivih formula intuicionističke iskazne logike.

1938. godine D.A. Bochvar[13] je predstavio primenu trovalentne logike u analizi kontradikcija uvodeći kao treću istinitosnu vrednost *besmisleno*. Iste godine je i S.C. Kleene[14] predstavio primenu trovalentne logike na parcijalno rekurzivne funkcije uvodeći kao treću istinitosnu vrednost *nedefinisano*.

Tokom nekoliko narednih godina neki od osnovnih rezultata su generalizovani i najznačajniji rezultati bili su dokazani od strane J.B. Rossera[15] i A.R. Turquettea.

1.3 Neki značajni događaji u toku druge polovine 20. veka

- 1951. godine R. McNaughton je postavio kriterujum definabilnosti funkcija u Łukasiewiczevim sistemima koji važi i za konačnovrednosnu i za beskonačnovrednosnu Łukasiewiczevu logiku.
- 1957. godine T.A. Skolem[16] se približio dokazu konzistentnosti teorije skupova u oblasti beskonačnovrednosne logike.
- 1958. godine A. Rose i J.B. Rosser su objavili dokaz teoreme kompletnosti za beskonačnovrednosnu Łukasiewiczevu iskaznu logiku. U istoj toj godini su C.C. Chang[17] i C.A. Meredith[18] dokazali nezavisnost jedne od aksioma beskonačnovrednosne Łukasiewiczeve

[10]Mordchaj Wajsberg (1902 - ?) - poljski matematičar i logičar
[11]Kurt Friedrich Gödel (1906 - 1978) - austrijsko-američki logičar, matematičar i filozof
[12]Stanisław Jaśkowski (1906 - 1965) - poljski logičar
[13]Dmitri Anotolevich Bochvar (1903 - ?) - ruski matematičar i logičar
[14]Stephen Cole Kleene (1909 - 1994) - američki matematičar
[15]John Barkley Rosser Sr. (1907 - 1989) - američki logičar
[16]Thoralf Albert Skolem (1887 - 1963) - norveški matematičar
[17]Cheng Chung Chang (1927 -)
[18]Carew Arthur Meredith (1904 - 1976) - irski logičar

logike (predstavljeno u [5] i [12]). C.C. Chang je, takođe 1958. godine uveo pojam *MV*[19]*-algebri*, pomoću kojih je 1959. godine dokazao teoremu kompletnosti za beskonačnovrednosnu Łukasiewiczevu iskaznu logiku (predstavljeno u [6]).

- 1959. M. Dummet[20] je dokazao teoremu kompletnosti za beskonačnovrednosni iskazni *Gödelov* sistem.
- 1962. godine B. Scarpellini[21] je utvrdio da beskonačnovrednosni Łukasiewiczev sistem prvog reda nije rekurzivno aksiomatizabilan.
- 1963. godine L.S. Hay kao i L.P. Belluce[22] i C.C. Chang su dokazali da dodavanje pravila *infinitarnog* zaključivanja vodi ka aksiomatizaciji beskonačnovrednosne Łukasiewiczeve logike.
- 1965. godine L.A. Zadeh[23] je inspirisao novi pristup viševrednosnim logikama u kojem je akcenat bio na primenljivosti, te su u narednim godinama usledelili rezultati vezani upravo za primenljivost viševrednosnih logika.
- 1967. J. Goguen[24] je generalizovao rezultate Zadeha.
- 1979. godine J. Pavelka[25] je generalizovao Łukasiewiczeve logike.
- 1983. godine M. Ragaz je objavio rezultate u vezi skupa logički zadovoljivih formula beskonačnovrednosne Łukasiewiczeve logike prvog reda.
- 1986. godine D. Mundici[26] započeo je još dublje izučavanje MV-algebri.
- 1989. godine V. Novák[27] je proširio rezultate Pavelke.

[19] engl. many-valued
[20] Sir Michael Anthony Eardley Dummet (1925 - 2011) - engleski filozof
[21] Bruno Scarpellini - matematičar
[22] Lawrence Peter Belluce - matematičar
[23] Lotfi Aliasker Zadeh (1921 -)
[24] Joseph Amadee Goguen (1941 - 2006) - američki informatičar
[25] Jan Pavelka - Čeh
[26] Daniele Mundici
[27] Vilém Novák (1951 -) - Čeh

Glava 2

Sintaksa i semantika logičkih sistema

2.1 Šta je logički sistem i čemu služi?

Osnovni zadatak logičkog sistema je da formalizuje pojam *logičke posledice*: Neka je Σ neki skup tvrdnji. Kažemo da je tvrdnja p logička posledica skupa Σ ako je tvrdnja p nužno tačna svaki put kada su sve tvrdnje iz skupa Σ tačne. Dakle, izučava se pojam *logičkog zaključivanja* i cilj je utvrditi kada iz tačnosti pretpostavki nužno sledi tačnost zaključka.

Logički sistem može biti određen na dva načina - *sintaktički* ili *semantički*:

- Logički sistem je određen sintaktički ako podrazumeva pojam *dokaza* i *dokazive formule tj. formalne teoreme* kao i pojam *izvođenja* iz skupa *premisa*. Formule se posmatraju isključivo kao nizovi simbola i ne razmatra se nikakvo njihovo moguće značenje.
- Logički sistem je određen semantički ako podrazumeva pojam *interpretacije* ili *modela* u smislu da u odnosu na svaku interpretaciju, svaka dobro definisana[1] formula ima neku istinitosnu vrednost ili predstavlja funkciju u skupu istinitosnih vrednosti. Ovo dalje znači da imamo pojam *zadovoljenja* za dobro definisane formule i na osnovu toga relaciju logičke posledice $\models$ ("semantička rampa") između skupa dobro definisanih formula i pojedinačnih formula.

S obzirom na to da se, dakle, logički sistem može odrediti ili na osnovu pojma dokaza ili na osnovu pojma istine, prirodno se nameću pitanja *pouzdanosti* (da li dokazivost implicira istinu?) i *kompletnosti* (da li i istina implicira dokazivost?) logičkog sistema.

Mi ćemo preferirati da nam sistem bude semantički određen, ali bez isključivanja sintaktičkih osnova. Takođe, napomenimo da ćemo se zadržati na ISKAZNIM logičkim sistemima. Formalizacija pojma logičke posledice data je u definiciji koja sledi.

[1] "gramatički" ispravna

2.1.1 Definicija *Neka je Σ neki skup formula i F neka formula. Kažemo da je F logička (semantička) posledica skupa Σ ako F važi u svim modelima skupa Σ. U tom slučaju pišemo $\Sigma \models F$.*

Glavne (semantičke) pretpostavke klasične logike su

princip bivalentnosti (ranije spominjan) i *princip kompozicionalnosti.*

Princip bivalentnosti, ponovimo, tvrdi da je svaka dobro definisana formula tačna ili netačna u bilo kojoj interpretaciji tj. ima tačno jednu od istinitosnih vrednosti $\top$ i $\perp$, obično numerički obeleženo sa 1 i 0.
Princip kompozicionalnosti tvrdi da je istinitosna vrednost svake složene formule (dobijene pomoću logičkih veznika) funkcija istinitosnih vrednosti njenih potformula.
U prethodnoj glavi je već rečeno, viševrednosne logike se razlikuju od klasične po tome što od ova dva principa ne zadovoljavaju princip bivalentnosti. Većina viševrednosnih logika zadovoljava princip kompozicionalnosti - tu osobinu nazivamo *istinitosnom funkcionalnošću.*

2.2 Sintaksa logičkog sistema

Da bismo definisali jezik logičkog sistema (i time ustanovili sintaksu logičkog sistema), neophodno je zadati odgovarajuću *azbuku* (ili *alfabet*) tj. skup simbola od kojih se grade "dobre reči" i zatim izdvojiti skup onih reči nad tom azbukom koje ćemo smatrati "dobro formiranim izrazima".

Konkretno, ono što je nama od interesa - sistem S viševrednosne logike je sintaktički okarakterisan pomoću odgovarajućeg formalizovanog jezika $\mathcal{L}_S$ koji sadrži:

- (nepraznu) familiju $\mathcal{J}^S$ baziČnih iskaznih veznika;
- (ne obavezno nepraznu) familiju konstanti stepena istinitosti;

Usvaja se uobičajeni način definisanja klase dobro definisanih formula u odnosu na ove sintaktičke polazne pojmove.

2.2.1 Primer: jezik klasične iskazne logike

"Dobro formirani izrazi" su u slučaju klasične iskazne logike tzv. *iskazne formule.*

2.2.1 Definicija *Standardna azbuka iskazne logike se sastoji od sledećih simbola:*

- *Prebrojiv skup iskaznih slova;*
- *Simboli logičkih operacija:* $\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \neg$;
- *Pomoćni znaci: (,).*

2.2.2 Definicija *Skup iskaznih formula je najmanji skup reči nad azbukom koji zadovoljava sledeće uslove:*

- *Sva iskazna slova su iskazne formule;*
- *Ako su A i B iskazne formule, onda su to i sledeći izrazi:*

$$(A \wedge B), (A \vee B), (A \Rightarrow B), (A \Leftrightarrow B), (\neg A)$$

Ovako definisan skup svih iskaznih formula zovemo i standardan skup iskaznih formula i obeležavamo sa Form.

2.3 Semantika logičkog sistema

Semantika neke logike je određena kada se definišu strukture (tzv. *modeli*) u kojima se interpretiraju formule date logike, kao i tzv. *relacija zadovoljenja* $\models$ između modela i formula.

Sistem $\mathcal{S}$ viševrednosne logike je semantički okarakterisan pomoću odgovarajućeg formalizovanog jezika $\mathcal{L}_S$ koji sadrži:

- (neprazan) skup $\mathcal{W}^S$ stepena istinitosti;
- Familiju funkcija stepena istinitosti zajedno sa korespodencijom između ovih funkcija stepena istinitosti i iskaznih veznika (formalnog) jezika;
- (ne obavezno nepraznu) familiju nularnih operacija tj. elemenata skupa stepena istinitosti zajedno sa "1-1" korespodencijom između članova ove familije i konstanti stepena istinitosti (formalnog) jezika;

2.3.1 Napomena Kardinalnost skupa $\mathcal{W}^S$ određuje arnost viševrednosnog logičkog sistema.

Pošto, kao što smo ranije i napomenuli, preferiramo semantičku određenost sistema viševrednosne logike, obično polazimo od skupa stepena istinitosti $\mathcal{W}^S$ zajedno sa nekim (konačnim) operacijama u njemu, određujući funkcije stepena istinitosti bazičnih veznika. Stoga za semantički pristup viševrednosnim logikama neke algebarske strukture dobijaju osnovnu ulogu. Nažalost, za sada, ne postoji nijedna klasa algebarskih struktura, kao što je Bulova algebra za klasičnu logiku, koja je karakteristična za viševrednosne logike. Zbog toga se različiti pristupi viševrednosnim logikama oslanjaju na različite algebarske strukture.

Najčešće se dodatno pretpostavlja da se klasične istinitosne vrednosti pojavljuju među stepenima istinitosti bilo kog odgovarajućeg sistema $\mathcal{S}$ viševrednosne logike. Osim ovog uslova nema drugih restrikcija za $\mathcal{W}^S$. Međutim, opšteprihvaćeno je da se za $\mathcal{W}^S$ uzima neki skup brojeva (skup celih brojeva, skup racionalnih brojeva ili čak skup realnih brojeva), ali sve dok nije od interesa imati uređenje na $\mathcal{W}^S$ koje dozvoljava postojanje neuporedivih stepeni istinitosti.
Još jedna opšteprihvaćena pretpostavka je da među stepenima istinitosti postoji najmanji, koji se obično interpretira kao ekvivalent istinitosne vrednosti $\perp$, i najveći, koji se obično intepretira kao ekvivalent istinitosne vrednosti $\top$.
Uobičajeno je da se za standardni skup $\mathcal{W}^S$ smatra onaj koji ispunjava sledeće uslove:

$$\{0,1\} \subseteq \mathcal{W}^S \text{ i } \mathcal{W}^S \subseteq [0,1] \subseteq \mathbb{R}.$$

Konkretnije, u slučaju beskonačno mnogo stepena istinitosti obično se razmatraju sledeći prebrojiv skup i neprebrojiv skup:

$$\mathcal{W}_0 =_{def} \{x \in \mathbb{Q} \mid 0 \leq x \leq 1\} \text{ ili } \mathcal{W}_\infty =_{def} \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\},$$

a u slučaju konačno mnogo stepeni istinitosti sledeći skup:

$$\mathcal{W}_m =_{def} \{\tfrac{k}{m-1} \mid 0 \leq k \leq m-1\}, \text{ za neki ceo broj } m \geq 2.$$

2.3.2 Napomena Uslovom $\{0,1\} \subseteq \mathcal{W}^S$ nismo obezbedili da nam samo stepen istinitosti 1 mora predstavljati ekvivalent istinitosnoj vrednosti $\top$, tako da, da bismo odredili sistem $\mathcal{S}$ viševrednosne logike moramo odrediti koje istinitosne vrednosti korespondiraju istinitosnoj vrednosti $\top$. Formalno ovo znači da za svaki sistem $\mathcal{S}$ ne vezujemo samo njegov skup stepena istinitosti $\mathcal{W}^S$ već i neki skup $\mathcal{D}^S$ istaknutih stepena istinitosti. Naravno, pretpostavljamo $1 \in \mathcal{D}^S \subseteq \mathcal{W}^S$ zajedno sa $0 \notin \mathcal{D}^S$. Izbor skupa istaknutih stepena istinitosti je od fundamentalnog značaja za generalizaciju pojma logičke zadovoljivosti i logičke posledice.

Pojmove skupova $\mathcal{W}^S$ i $\mathcal{D}^S$ i funkcije stepena istinitosti za bazične veznike sistema $\mathcal{S}$ često "skupljamo na jedno mesto" definisanjem tzv. *karakteristične matrice*

$$\mathcal{M}_S = (\mathcal{W}^S, \mathcal{D}^S, f_1, f_2, ..., f_n),$$

gde su $f_i : (\mathcal{W}^S)^{n_i} \rightarrow \mathcal{W}^S$ $i = 1, 2, ..., n$.

2.3.3 Definicija *Valuacija je svako preslikavanje τ iz skupa iskaznih promenljivih u skup $\mathcal{W}^S$. Interpretacija iskaznih formula za datu valuaciju τ jeste preslikavanje $v_\tau : Form \rightarrow \mathcal{W}^S$. Za $v_\tau(F)$ kažemo da je vrednost formule F u valuaciji τ tj. u interpretaciji v_τ.*

2.3.4 Definicija *Formulu F nazivamo zadovoljivom u valuaciji τ (interpretaciji v_τ) akko u njoj ima istaknut stepen istinitosti tj.*

$$\tau \models F \text{ akko } v_\tau(F) \in \mathcal{D}^S$$

Formulu F nazivamo $\mathcal{D}^S$-tautologijom (ili $\mathcal{D}^S$-logički zadovoljivom) akko je zadovoljiva u svakoj odgovarajućoj valuaciji (interpretaciji) tj.

$$\models F \text{ akko } (\forall \tau)\ \tau \models F.$$

2.3.5 Definicija *Interpretaciju $\mathcal{I}$ nazivamo modelom formule F i to zapisujemo $\mathcal{I} \models F$ akko je formula F zadovoljiva u interpretaciji $\mathcal{I}$. Interpretaciju $\mathcal{I}$ nazivamo modelom skupa formula Σ i to zapisujemo $\mathcal{I} \models \Sigma$ akko je model svake formule $G \in \Sigma$.*

2.3.6 Napomena

- Skup svih modela obeležavamo sa *Mod*.
- $Mod(F) = \{\tau \in Mod : \tau \models F\}$

Ponekad je pojam modela još više generalizovan u viševrednosnim logikama:

2.3.7 Definicija *Neka je α proizvoljan stepen istinitosti i F neka formula. Tada interpretaciju $\mathcal{I}$ nazivamo α-modelom od F akko je stepen istinitosti od F u interpretaciji $\mathcal{I}$ jednak α ili akko je veći ili jednak od α.*

2.3.8 Napomena

- U slučaju da je stepen istinitosti veći ili jednak od α mi ćemo ipak koristiti oznaku: $(\geq \alpha)$-model.
- U upotrebi je i pojam α-modela skupa formula. U ovom slučaju, najzgodnije je da koristimo definiciju koja sledi.

2.3.9 Definicija *Interpretaciju $\mathcal{I}$ nazivamo $(\geq \alpha)$-modelom skupa formula Σ akko je $\mathcal{I}$ $(\geq \alpha)$-model svake formule $F \in \Sigma$.*

Pojam logičke posledice je definisan skoro na standardan način.

2.3.10 Definicija *Formulu F nazivamo logičkom posledicom skupa formula Σ i pišemo $\Sigma \models F$ akko*

(1. verzija): svaki model od Σ je takođe model od F;

(2. verzija): svaki $(\geq \alpha)$-model od Σ je takođe $(\geq \alpha)$-model od F.

Provera da li je formula bilo kog iskaznog sistema viševrednosne logike logički zadovoljiva može se sprovesti na isti način kao za klasičnu logiku određujući kompletne tablice stepena istinitosti i ovaj postupak je efektivan ukoliko je skup stepena istinitosti konačan. Ovo je formulisano u teoremi koja sledi.

2.3.11 Teorema *Za svaki konačan viševrednosni sistem $\mathcal{S}$ iskazne logike, osobina logičke zadovoljivosti formule je odlučiva i za svaki konačan skup formula Σ sistema $\mathcal{S}$ osobina logičke posledice skupa formula Σ je takođe odlučiva.*

2.3.12 Primer Za definiciju semantike klasične iskazne logike koristi se sledeća dvoelementna algebra tzv. *iskazna algebra*: $I =< \{\top, \bot\}, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \neg >$, gde su operacije $\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ binarne, a $\neg$ unarna operacija, definisane svojim Cayleyevim tablicama. Dakle, u ovom slučaju je $\mathcal{W}^S = \{\top, \bot\}$, a $\mathcal{D}^S = \{T\}$.

2.4 Aksiomatizacija logičkog sistema

Postoji nekoliko različitih pristupa pojmu *deduktivnog sistema*, ali nepromenljivo je uvek to da su to sistemi u kojima se do pojma dokaza odnosno teoreme stiže preko preciznih sintaktički definisanih pravila izvođenja.

2.4.1 Definicija *Deduktivni sistem (ili formalna teorija) je uređena četvorka*

$$\mathcal{D} =< X, Form, Ax, R >,$$

gde je:

- *X neprazan skup simbola tzv. azbuka;*
- *$Form$ je neprazan skup nekih reči nad X, tzv. skup formula;*
- *Ax je neprazan podskup skupa $Form$, tzv. aksiome;*
- *R je neprazan skup tzv. pravila izvođenja, oblika $\rho = \frac{A_1, A_2, ...A_n}{B}$, gde su $A_1, A_2, ...A_n$ i B neke formule. U tom slučaju kažemo da formula B sledi iz $A_1, A_2, ...A_n$ na osnovu pravila ρ.*

Za $\mathcal{D}$ kažemo da je aksiomatska formalna teorija (ili aksiomatski (deduktivni) sistem) ako postoji algoritam za odlučivanje koja formula jeste, a koja nije aksioma.

2.4.2 Definicija *Neka je $\mathcal{D} =< X, Form, Ax, R >$ neki deduktivni sistem. Dokaz (u $\mathcal{D}$) je konačan niz formula $A_1, A_2, ..., A_n$ takav da je u tom nizu svaka formula aksioma ili sledi iz ranijih formula u nizu na osnovu nekog pravila izvođenja iz R. U tom slučaju kažemo da je $A_1, A_2, ..., A_n$ dokazni niz za A_n (ili samo dokaz za A_n). Formula B je teorema u $\mathcal{D}$ ako postoji dokaz za B. U tom slučaju pišemo $\vdash_D B$ ili samo $\vdash B$. Sa Th($\mathcal{D}$) obeležavamo skup svih teorema deduktivnog sistema $\mathcal{D}$.*

2.4.3 Definicija *Za deduktivni sistem $\mathcal{D}$ kažemo da je odlučiv ako postoji algoritam za odlučivanje koja formula jeste, a koja nije teorema te teorije.*

2.4.4 Definicija *Neka je $\mathcal{D} =< X, Form, Ax, R >$ neki deduktivni sistem, $\Sigma \subseteq Form$, $B \in Form$. Kažemo da je B sintaktička posledica od Σ (ili da Σ dokazuje B) ako postoji konačan niz formula $A_1, A_2, ...A_n$ u kome je $A_n = B$, tako da je svaka formula u tom nizu aksioma, ili iz Σ ili sledi iz ranijih formula u tom nizu po nekom pravilu izvođenja iz R. U tom slučaju kažemo da je taj niz dokazni niz za B iz Σ i pišemo $\Sigma \vdash_D B$ ili samo $\Sigma \vdash B$. Formule iz skupa Σ zovemo hipoteze, a za B kažemo da je zaključak.*
Sa Cons(Σ) obeležavamo skup svih sintaktičkih posledica od Σ.
Za skup formula Σ kažemo da je deduktivno zatvoren skup ako je Cons(Σ)=Σ.

2.4.5 Teorema *Neka je $\mathcal{D} =< X, Form, Ax, R >$ neki deduktivni sistem. Tada za sve $\Sigma, \Sigma_1, \Sigma_2 \subseteq Form$ važi:*

- *$\Sigma \subseteq Cons(\Sigma)$;*
- *Ako je $\Sigma_1 \subseteq \Sigma_2$, onda $Cons(\Sigma_1) \subseteq Cons(\Sigma_2)$;*
- *$Cons(Cons(\Sigma)) = Cons(\Sigma)$.*

2.4.6 Teorema *(Teorema kompaktnosti) Neka je $\mathcal{D} =< X, Form, Ax, R >$ neki deduktivni sistem. Tada za sve $\Sigma \subseteq Form$ i sve $F \in Form$ važi:*

$$\Sigma \vdash F \text{ akko postoji konačan } \Sigma_0 \subseteq \Sigma \text{ tako da je } \Sigma_0 \vdash F.$$

2.4.1 Deduktivni sistem za klasičnu iskaznu logiku - iskazni račun

Ovom prilikom odlučujemo se za *Hilbertov*[2] pristup pojmu deduktivnog sistema - imaćemo više aksioma i samo jedno pravilo izvođenja.

2.4.7 Definicija *Iskazni račun je deduktivni sistem* $\mathcal{H} =< X, Form, Ax, R >$*, gde je:*

- $X = S \cup \{\Rightarrow, \neg, (,)\}$*, gde je* $S = \{p_1, p_2, ..., p_n, ...\}$*;*
- *Form je skup iskaznih formula definisan nad skupom iskaznih veznika* $\{\Rightarrow, \neg\}$*;*
- $Ax = Ax_1 \cup Ax_2 \cup Ax_3$*, gde su* Ax_1, Ax_2 *i* Ax_3 *skupovi formula definisani pomoću tzv. šema aksioma:*

  $Ax_1 : A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$

  $Ax_2 : (A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$

  $Ax_3 : (\neg A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow (B \Rightarrow A)$*;*

- $R = \{MP\}$*, (tzv. modus ponens),* $MP : \frac{A, A \Rightarrow B}{B}$.

Vrlo značajna teorema koja važi u klasičnoj iskaznoj logici je teorema koja sledi.

2.4.8 Teorema *(Teorema dedukcije) Neka je* $\Sigma \subseteq Form$*,* $A, B \in Form$*. Tada*

$$\Sigma \cup \{A\} \vdash B \text{ akko } \Sigma \vdash A \Rightarrow B.$$

Kao što smo ranije neformalno napomenuli, saglasnost odnosno nesaglasnost sintakse i semantike logičkog sistema utvrđujemo odgovarajući na pitanja pouzdanosti i kompletnosti logičkog sistema.

2.4.9 Teorema *Iskazni račun* $\mathcal{H}$ *je pouzdan tj. za sve* $\Sigma \subseteq Form$ *i sve* $F \in Form$ *važi*

$$\text{ako } \Sigma \vdash F, \text{ onda } \Sigma \models F.$$

2.4.10 Teorema *Iskazni račun* $\mathcal{H}$ *je kompletan tj. za sve* $\Sigma \subseteq Form$ *i sve* $F \in Form$ *važi*

$$\Sigma \vdash F \text{ akko } \Sigma \models F.$$

Specijalan slučaj ove teoreme je slučaj kada je skup iskaznih formula Σ prazan i glasi: iskazna formula F je tautologija akko je teorema iskaznog računa $\mathcal{H}$. Formulisan je u sledećoj teoremi.

2.4.11 Teorema *(Mala teorema kompletnosti) Za sve* $F \in Form$ *važi:*

$$\vdash F \text{ akko } \models F.$$

Kao posledicu male teoreme kompletnosti imamo:

[2]David Hilbert (1862 - 1943) - nemački matematičar

2.4.12 Teorema *(Odlučivost iskaznog računa $\mathcal{H}$) Iskazni račun $\mathcal{H}$ je odlučiv tj. postoji algoritam koji za svaku iskaznu formulu F odlučuje o tome da li je F teorema iskaznog računa $\mathcal{H}$.*

2.4.13 Teorema *(Teorema kompaktnosti za iskaznu logiku - semantička verzija) Skup iskaznih formula Σ ima model akko svaki konačan podskup od Σ ima model.*

Glava 3

Trovalentne logike

Koristićemo jezik klasične iskazne logike, ali atomičnim formulama sada mogu biti dodeljene vrednosti 1 ("tačno"), $\frac{1}{2}$ (niti "tačno" niti "netačno") i 0 ("netačno")[1]. Pitanje je: kako definisati istinitosne funkcije za standardne iskazne veznike ukoliko prihvatimo tri istinitosne vrednosti? Odabirom skupa istinitosnih funkcija biće određen specifični sistem trovalentne logike. Razvijeno je više različitih sistema trovalentne logike, za nas od najvećeg interesa predstavlja Łukasiewiczev sistem, no, najpre ćemo se osvrnuti na još jedan sistem.

Sledeće dve definicije biće nam korisne u utvrđivanju odnosa klasične i trovalentne logike jer, naravno, želimo da znamo koje se osobine čuvaju tj. prenose u trovalentnu logiku.

3.0.1 Definicija *Iskazni veznik u trovalentnom logičkom sistemu nazivamo normalnim ako kad god veznik povezuje formule sa klasičnim istinitosnim vrednostima rezultujuća formula ima istu istinitosnu vrednost kao i u klasičnoj logici.*

3.0.2 Definicija *Iskazni veznik u trovalentnom logičkom sistemu nazivamo uniformnim ako kad god je istinitosna vrednost formule formirane sa tim veznikom jedinstveno određena istinitosnom vrednošću jedne od gradivne formule u klasičnoj logici, istinitosna vrednost formule formirane sa tim veznikom je takođe tako jedinstveno određena u trovalentnom logičkom sistemu.*

3.1 Kleenejeva "jaka" trovalentna logika

Sistem koji će u nastavku biti predstavljen izgrađen je od strane Kleeneja 1938. godine.[2] i obeležavaćemo ga sa K_3^S (slovo S simboliše reč "jak" (engl. *strong*)). Svi iskazni veznici u K_3^S su normalni i uniformni.

- Negacija u K_3^S je definisana sa:

[1] Ovom prilikom odlučili smo se za numeričko reprezentovanje istinitosnih vrednosti. U literaturi se najčešće koriste oznake T (engl. *true*), N (engl. *neutral*) i F (engl. *false*), a mi ćemo, dakle, koristiti umesto T, N i F redom 1, $\frac{1}{2}$ i 0.

[2] Za konstrukciju ovog sistema Kleeneju motivaciju nije predstavljalo "prevazilaženje" neodređenosti nego parcijalno rekurzivne funkcije.

A	$\neg_K A$
1	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	1

Dakle, kada A ima neku od vrednosti 1 ili 0 (ove vrednosti ćemo nazivati *klasičnim* istinitosnim vrednostima) $\neg_K A$ je definisano kao i u klasičnoj logici.

- Binarni veznici u sistemu K_3^S definisani su na sledeći način:

$A \wedge_K B$

$A \backslash B$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	$\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
0	0	0	0

$A \vee_K B$

$A \backslash B$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	1	1
$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	1	$\frac{1}{2}$	0

$A \Rightarrow_K B$

$A \backslash B$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	$\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	1	1	1

$A \Leftrightarrow_K B$

$A \backslash B$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	$\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	0	$\frac{1}{2}$	1

Valuacija u K_3^S je svako preslikavanje $\tau : X \to \{1, \frac{1}{2}, 0\}$, gde je X skup iskaznih promenljivih. Ako $p \in X$, onda za $\tau(p)$ kažemo da je *vrednost* te iskazne promenljive u valuaciji τ. Interpretacija iskaznih formula za datu valuaciju τ jeste preslikavanje $v_\tau : Form \to \{1, \frac{1}{2}, 0\}$, koje je definisano na sledeći način - ako je p iskazna promenljiva iz X, A i B iskazne formule, onda je:

- $v_\tau(p) = \tau(p)$;
- $v_\tau(\neg_K A) = \neg_K v_\tau(A)$;
- $v_\tau(A \wedge_K B) = v_\tau(A) \wedge_K v_\tau(B)$;
- $v_\tau(A \vee_K B) = v_\tau(A) \vee_K v_\tau(B)$;
- $v_\tau(A \Rightarrow_K B) = v_\tau(A) \Rightarrow_K v_\tau(B)$;

- $v_\tau(A \Leftrightarrow_K B) = v_\tau(A) \Leftrightarrow_K v_\tau(B)$.

Za $v_\tau(A)$ kažemo da je *vrednost* formule u valuaciji τ odnosno interpretaciji v_τ. Ukoliko je $v_\tau(A) = 1$, kažemo da je formula A u toj valuaciji, odnosno interpretaciji, *tačna*, ukoliko je $v_\tau(A) = \frac{1}{2}$ da je *niti tačna niti netačna* i ukoliko je $v_\tau(A) = 0$ da je *netačna*.

3.1.1 Napomena S obzirom na to da ćemo u $n-$vrednosnom i beskonačnovrednosnom slučaju veznike definisati pomoću numeričkih klauzula (zbog čega smo se i od početka opredelili za numeričko predstavljanje istinitosnih vrednosti), napomenimo kako to možemo učini u ovom slučaju:

- $v_\tau(\neg_K A) =_{def} 1 - v_\tau(A)$;
- $v_\tau(A \wedge_K B) =_{def} min(v_\tau(A), v_\tau(B))$;
- $v_\tau(A \vee_K B) =_{def} max(v_\tau(A), v_\tau(B))$;
- $v_\tau(A \Rightarrow_K B) =_{def} max(1 - v_\tau(A), v_\tau(B))$;
- $v_\tau(A \Leftrightarrow_K B) =_{def} min(max(1 - v_\tau(A), v_\tau(B)), max(1 - v_\tau(B), v_\tau(A)))$.

I, naravno, ove numeričke klauzule mogu se uzeti i za klasičnu iskaznu logiku jer je sistem K_3^S normalan sistem[3] (zapravo, uobičajeno je da se upravo ove i uzimaju).

Možemo neke od ovih veznika odabrati za bazične veznike i preko njih definisati ostale. Zapravo, ovo možemo učiniti na isti način kao i u klasičnoj logici. Uzmimo $\neg_K$ i $\wedge_K$ za bazične veznike i definišimo ostale veznike preko njih:

$$A \vee_K B =_{def} \neg_K(\neg_K A \wedge_K \neg_K B)$$

$$A \Rightarrow_K B =_{def} \neg_K(A \wedge_K \neg_K B)$$

$$A \Leftrightarrow_K B =_{def} \neg_K(A \wedge_K \neg_K B) \wedge_K \neg_K(\neg_K A \wedge_K B)$$

Dakle, u ovom slučaju, karakteristična matrica sistema K_3^S je oblika

$$\mathcal{M}_{K_3^S} = (\{1, \tfrac{1}{2}, 0\}, \{1\}, \neg_K, \wedge_K).$$

3.1.2 Definicija *Formulu u trovalentnom logičkom sistemu nazivamo tautologijom ako uvek ima istinitosnu vrednost 1, a kontradikcijom ako uvek ima vrednost 0.*

3.1.3 Teorema *Ne postoje tautologije niti kontradikcije u* K_3^S.

Dokaz. Razmatranjem istinitosnih tablica uveravamo se da, kad god atomične komponentne složene formule uzimaju vrednost $\frac{1}{2}$, vrednost složene formule je takođe $\frac{1}{2}$. Ovo povlači da za proizvoljnu formulu postoji barem jedna dodela istinitosnih vrednosti za koju ona ima vrednost $\frac{1}{2}$ pa nijedna formula ne može biti ni tautologija ni kontradikcija u K_3^S. □

[3] Očekivano, trovalentni logički sistem nazivamo *normalnim* ukoliko su u njemu iskazni veznici normalni.

3.1.4 Lema *(Lema normalnosti) U normalnom trovalentnom sistemu, klasična dodela istinitosnih vrednosti se ponaša na isti način kao što se ponaša u klasičnoj logici - svaka formula koja je tačna*[4] *za tu dodelu u trovalentnom sistemu je takođe tačna za tu dodelu u klasičnoj logici i svaka formula koja je netačna*[5] *za tu dodelu u trovalentnom sistemu je takođe netačna za tu dodelu u klasičnoj logici.*

Dokaz. Dokaz sledi iz činjenice da se veznici u normalnom sistemu ponašaju na isti način na koji se ponašaju u klasičnoj logici kad god deluju na formule sa klasičnim istinitosnim vrednostima. □

Koristimo standardnu oznaku i definiciju logičke posledice: formulu F nazivamo logičkom posledicom skupa formula Σ u trovalentnoj logici i pišemo $\Sigma \models F$ ako, kad god su sve formule iz skupa Σ tačne, i formula F je nužno tačna. Argument je ispravan u trovalentnoj logici ako je zaključak logička posledica skupa premisa argumenta.

3.1.5 Teorema *Ako je $\Sigma \models_K F$, onda je $\Sigma \models F$ (tj. svaka logička posledica u K_3^S je takođe logička posledica u klasičnoj iskaznoj logici).*

Dokaz. Pretpostavimo da važi $\Sigma \models_K F$. Iz definicije logičke posledice sledi da za svaku klasičnu (a, i neklasičnu) dodelu istinitosnih vrednosti u K_3^S za koju su sve formule u Σ tačne, F je takođe tačna. Ali, sada, s obzirom da je sistem K_3^S normalan, ovo je tačno i u klasičnoj logici na osnovu prethodne leme. Dakle, $\Sigma \models F$ takođe važi. □

Kontraprimer za suprotan smer teoreme je:

3.1.6 Primer

$$\frac{\neg(A \Leftrightarrow B)}{(A \Leftrightarrow C) \vee (B \Leftrightarrow C)}$$

Ovaj argument jeste klasično ispravan jer da bi premisa bila tačna u klasičnoj logici, A i B moraju imati različite istinitosne vrednosti. Ali onda, bez obzira na to koju istinitosnu vrednost C ima, biće ekvivalentna nekoj od A i B jer postoje samo dve istinitosne vrednosti u klasičnoj logici - ispravnost zavisi od činjenice da u klasičnoj logici postoje samo dve istinitosne vrednosti. Prema tome, nije iznenađenje što ovaj argument nije ispravan u K_3^S u kome premisa može imati vrednost *1*, a zaključak može imati vrednost $\frac{1}{2}$ ako A i B imaju suprotne klasične vrednosti, a C ima vrednost $\frac{1}{2}$.

Ali, postoje klasično ispravni argumenti koje su takođe ispravni u K_3^S:

3.1.7 Primer

$$\frac{A, A \Rightarrow B}{B} \text{ (tj. pravilo MP)}$$

[4]tj. ima istinitosnu vrednost 1; koristićemo termin *tačan* radi jednostavnosti kad god ne bude postojala opasnost zabune

[5]tj. ima istinitosnu vrednost 0; koristićemo termin *netačan* radi jednostavnosti kad god ne bude postojala opasnost zabune

3.2 Łukasiewiczeva trovalentna logika

Sistem koji ćemo sada posmatrati izgrađen je od strane Łukasiewicza[6] 1930. godine i obeležavaćemo ga sa L_3. Svi iskazni veznici u L_3 su normalni i uniformni. U ovom sistemu tri iskazna veznika definisana su na analogan način kao u K_3^S, a preostala dva veznika razlikuju se samo po jednom polju u istinitosnoj tablici. Ove "minorne" promene zapravo dovode do toga da dobijamo sistem u kojem postoje i tautologije i kontradikcije. Veznici koji se razlikuju jesu implikacija i ekvivalencija i razlike se nalaze u polju koje je u centru istinitosnih tablica - u slučaju da i A i B uzimaju vrednost $\frac{1}{2}$ u oba slučaja rezultujućoj formuli dodeljuje se vrednost 1. Vrednost 1 se dodeljuje da bi kondicional oblika $A \Rightarrow_L A$ bio tautologija kada su antecedent i konsekvent jednaki. Slično želi da se obezbedi i za bikondicional oblika $A \Leftrightarrow_L A$.

Veznici u sistemu L_3 su definisani na sledeći način:

A	$\neg_L A$
1	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	1

$A \wedge_L B$

$A \backslash B$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	$\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
0	0	0	0

$A \vee_L B$

$A \backslash B$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	1	1
$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	1	$\frac{1}{2}$	0

$A \Rightarrow_L B$

$A \backslash B$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	$\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2}$	1	1	$\frac{1}{2}$
0	1	1	1

$A \Leftrightarrow_L B$

$A \backslash B$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	$\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$
0	0	$\frac{1}{2}$	1

S obzirom na osobine implikacije i ekvivalencije u sistemu L_3, ne možemo ih definisati preko preostalih veznika: ako bismo konstruisali formulu koristeći samo veznike $\neg_L$, $\wedge_L$ i $\vee_L$, onda

[6] Za konstrukciju ovog sistema Lukasiewiczu, poput Kleeneju, motivaciju nije predstavljalo "prevazilaženje" neodređenosti već *Problem of future contigents*

bi, kad god bi sve atomične formule od kojih je sastavljena formula imale vrednost $\frac{1}{2}$, i sama formula imala vrednost $\frac{1}{2}$. Ali, posmatrajmo sada formule $A \Rightarrow_L A$ i $A \Leftrightarrow_L A$. Obe formule imaju vrednost 1 kada A ima vrednost $\frac{1}{2}$. Pošto ne možemo da konstruišemo formulu koja ima ovo svojstvo pomoću A, $\neg_L$, $\wedge_L$ i $\vee_L$, ne možemo ni veznike $\Rightarrow_L$ i $\Leftrightarrow_L$ definisati pomoću preostala tri veznika.

Łukasiewicz je uzeo $\neg_L$ i $\Rightarrow_L$ za bazične veznike i preko njih je definisao preostale:

$$A \vee_L B =_{def} (A \Rightarrow_L B) \Rightarrow_L B$$

$$A \wedge_L B =_{def} \neg_L(\neg_L A \vee_L \neg_L B)$$

$$A \Leftrightarrow_L B =_{def} (A \Rightarrow_L B) \wedge_L (B \Rightarrow_L A)$$

Dakle, karakterististična matrica sistema L_3 je oblika

$$\mathcal{M}_{L_3} = (\{0, \tfrac{1}{2}, 1\}, \{1\}, \neg_L, \Rightarrow_L).$$

Valuacija u L_3 je svako preslikavanje $\tau : X \to \{1, \frac{1}{2}, 0\}$, gde je X skup iskaznih promenljivih. Ako $p \in X$, onda za $\tau(p)$ kažemo da je *vrednost* te iskazne promenljive u valuaciji τ. Interpretacija iskaznih formula za datu valuaciju τ jeste preslikavanje $v_\tau : Form \to \{1, \frac{1}{2}, 0\}$, koje je definisano na sledeći način - ako je p iskazna promenljiva iz X, A i B iskazne formule, onda je:

- $v_\tau(p) = \tau(p)$;
- $v_\tau(\neg_L A) = \neg_L v_\tau(A)$;
- $v_\tau(A \wedge_L B) = v_\tau(A) \wedge_L v_\tau(B)$;
- $v_\tau(A \vee_L B) = v_\tau(A) \vee_L v_\tau(B)$;
- $v_\tau(A \Rightarrow_L B) = v_\tau(A) \Rightarrow_L v_\tau(B)$;
- $v_\tau(A \Leftrightarrow_L B) = v_\tau(A) \Leftrightarrow_L v_\tau(B)$.

Za $v_\tau(A)$ kažemo da je *vrednost* formule u valuaciji τ odnosno interpretaciji v_τ. Ukoliko je $v_\tau(A) = 1$, kažemo da je formula A u toj valuaciji, odnosno interpretaciji, *tačna*, ukoliko je $v_\tau(A) = \frac{1}{2}$ da je *niti tačna niti netačna* i ukoliko je $v_\tau(A) = 0$ da je *netačna*.

3.2.1 Napomena Navedimo, takođe, numeričke klauzule za ovaj slučaj i primetimo da se, naravno, pretposlednja i poslednja razlikuju od onih koje smo naveli za sistem K_3^S:

- $v_\tau(\neg_L A) =_{def} 1 - v_\tau(A)$
- $v_\tau(A \wedge_L B) =_{def} min(v_\tau(A), v_\tau(B))$;
- $v_\tau(A \vee_L B) =_{def} max(v_\tau(A), v_\tau(B))$;
- $v_\tau(A \Rightarrow_L B) =_{def} min(1, 1 - v_\tau(A) + v_\tau(B))$;
- $v_\tau(A \Leftrightarrow_L B) =_{def} min(1, 1 - v_\tau(A) + v_\tau(B), 1 - v_\tau(B) + v_\tau(A))$.

I, naravno, ove numeričke klauzule mogu se uzeti i za klasičnu iskaznu logiku jer je sistem L_3 normalan sistem.

3.2.2 Teorema *Svaka formula koja je tautologija u L_3 je takođe tautologija u klasičnoj logici i svaka formula koja je kontradikcija u L_3 je takođe kontradikcija u klasičnoj logici.*

Dokaz. Formula koja je tautologija u L_3 je tačna u L_3 za svaku klasičnu dodelu istinitosnih vrednosti. S obzirom da je sistem L_3 normalan, na osnovu Leme normalnosti (koja se, inače, odnosi na proizvoljan trovalentni logički sistem) sledi da je formula tačna za sve dodele istinitosnih vrednosti u klasičnoj logici pa je zato tautologija u klasičnoj logici. Sličnim rezonovanjem se dolazi do tvrđenja za kontradikciju. □

3.2.3 Napomena Nije svaka formula koja je tautologija u klasičnoj logici, tautologija i u L_3, i nije svaka formula koja je kontradikcija u klasičnoj logici, kontradikcija i u L_3. Primeri:

- $A \vee_L \neg_L A$ je primer klasične tautologije koja nema uvek vrednost 1 u L_3.
- $A \wedge_L \neg_L A$ je primer klasične kontradikcije koja nema uvek vrednost 0 u L_3.

3.2.4 Teorema *Ako je $\Sigma \models_L F$, onda je $\Sigma \models F$ (tj. svaka logička posledica u L_3 je takođe logička posledica u klasičnoj iskaznoj logici).*

Dokaz. Dokaz je analogan dokazu teoreme 3.1.5. □

3.2.5 Napomena Kontraprimer za suprotan smer prethodne teoreme analogan je odgovarajućem u K_3^S - primeru 3.1.6.

Ali, postoje klasično ispravni argumenti koje su takođe ispravni u L_3 - npr. u primeru 3.1.7 je dat takav argument.

S obzirom na to da su negacija, konjukcija i disjunkcija iz K_3^S analogne onim iz L_3 i da se implikacija i ekvivalencija iz K_3^S mogu definisati pomoću preostalih veznika, odmah dobijamo:

3.2.6 Teorema *Svaki veznik iz K_3^S se može definisati u L_3.*

Ukoliko bi svaka moguća trovalentna istinitosna funkcija mogla biti definisana u L_3, onda bi L_3 bio funkcionalno kompletni sistem (što nije).

3.2.7 Definicija *Istinitosnu funkciju nazivamo regularnom ukoliko klasičnu istinitosnu vrednost slika u klasičnu istinitosnu vrednost.*

Za potrebe dokaza sledeće teoreme definišemo sledeći veznik:

$$aA =_{def} \neg_L(A \Rightarrow_L \neg_L A).$$

Dobijamo sledeću istinitosnu tablicu:

A	aA
1	1
$\frac{1}{2}$	0
0	0

3.2.8 Teorema *Svaka regularna trovalentna istinitosna funkcija može se definisati u* L_3*.*

Dokaz. Regularna trovaletna n-arna istinitosna funkcija može se opisati istinitosnom tablicom na sledeći način:

A_1	A_2	.....	A_n	
1	1	.....	1	v_1
1	1	.....	0	v_2
		.....		.....
0	0	.....	0	v_{3^n}

gde je svaka od $v_1, v_2, ..., v_{3^n}$ jedna od vrednosti 1, $\frac{1}{2}$ ili 0 i v_i je 1 ili 0 ako su sve vrednosti levo od nje u i-toj vrsti klasične istinitosne vrednosti.
Najpre ćemo obezbediti za svaku i-tu vrstu za koju je $v_i = 1$ formulu B_i koja ima vrednost 1 u toj vrsti i vrednost 0 u svim drugim vrstama na sledeći način - $B_i = A_1 \wedge_L A_2 \wedge_L ..... \wedge_L A_n$, gde je A_j:

- aA_j ako A_j ima vrednost 1 u i-toj vrsti;
- $a\neg_L A_j$ ako A_j ima vrednost 0 u i-toj vrsti;
- $\neg_L aA_j \wedge_L a\neg_L A_j$ u suprotnom.

Svaka od ovih formula A_j, definisana za odgovarajuću i-tu vrstu, imaće vrednost 1 kada A_j ima vrednost koju ima u i-toj vrsti, a vrednost 0 u suprotnom. Prema tome, konjukcija B_i će imati vrednost 1 u i-toj vrsti, za koju je definisana, a vrednost 0 u svim drugim vrstama jer će imati barem jedan konjukt koji ima vrednost 0.
Sledeće obezbeđujemo za svaku i-tu vrstu za koju je $v_i = \frac{1}{2}$ formulu B_i koja ima vrednost $\frac{1}{2}$ u toj vrsti i vrednost 0 u svim drugim vrstama. S obzirom da je istinitosna funkcija koju razmatramo regularna, barem jedna od formula A_j mora imati vrednost $\frac{1}{2}$ u takvoj vrsti. Formulu B_i definišemo na sledeći način - $B_i = A_1 \wedge_L A_2 \wedge_L ..... \wedge_L A_n$, gde je A_j:

- aA_j ako A_j ima vrednost 1 u i-toj vrsti;
- $a\neg_L A_j$ ako A_j ima vrednost 0 u i-toj vrsti;
- $A_j \wedge_L \neg_L A_j$ u suprotnom.

Najzad, formiramo disjunkciju formula B_i za svaku i-tu vrstu sa $v_i = 1$ ili $v_i = \frac{1}{2}$. Ova disjunkcija, zapravo, predstavlja funkciju definisanu u istinitosnoj tablici: disjunkcija će imati vrednost v_i za svaku vrstu i za koje je $v_i = 1$ ili $v_i = \frac{1}{2}$, a vrednost 0 za svaku drugu vrstu, što je i željeni rezultat jer je za sve druge vrste $v_i = 0$. Osim što postoji jedan specijalan slučaj - ako je vrednost funkcije 0 u svakoj vrsti, onda ta funkcija može da se definiše, u L_3, koristeći $aA_1 \wedge_L \neg_L aA_1 \wedge_L A_2 \wedge_L A_3 \wedge_L ..... \wedge_L A_n$ (ova formula uvek ima vrednost 0). $\square$

3.2.9 Teorema *Nijednu neregularnu istinitosnu funkciju nije moguće definisati u L_3.*

Dokaz. Svi veznici iz L_3 su regularni te je nemoguće konstruisati formulu koja ima vrednost $\frac{1}{2}$ kada se u formulu uvrste vrednosti 1 ili 0. □

Napomenimo da se L_3 može transformisati u funkcionalno kompletni sistem dodefinisanjem neregularnog veznika % na sledeći način:

A	$\%A$
1	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	$\frac{1}{2}$

Ovaj veznik uveo je poljski logičar J.Ł. Slupecki 1936. godine.

3.2.1 Proširenje logičkog sistema L_3

U prethodnom poglavlju napomenuto je da se veznik $\Rightarrow_L$ ne može definisati pomoću ostalih veznika, za razliku od situacije u klasičnoj iskaznoj logici i sistemu K_3^S u kojima je to moguće. S obzirom na to, uobičajeno je da se definiše još jedan par konjukcije i disjunkcije pomoću kojeg će to biti omogućeno i u sistemu L_3. Ta dva nova veznika nazivaju se *"jaka" konjukcija* i *"jaka" disjunkcija*, obeležavaćemo ih redom & i $\triangledown$ i definisani su na sledeći način

$$A\&B =_{def} \neg_L(A \Rightarrow_L \neg_L B), \quad A \triangledown B =_{def} \neg_L A \Rightarrow_L B.$$

Samim tim istinitosne tablice izgledaju redom ovako:

$A\&B$

$A\backslash B$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	$\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0
0	0	0	0

$A \triangledown_L B$

$A\backslash B$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	1	1
$\frac{1}{2}$	1	1	$\frac{1}{2}$
0	1	$\frac{1}{2}$	0

Primetimo da se istinitosne tablice razlikuju od onih za ("slabu") konjukciju i ("slabu") disjunkciju samo u jednom polju - polju koje se nalazi u centru table, umesto vrednosti $\frac{1}{2}$ imamo redom vrednosti 0 i 1.

"Jaku" konjukciju i "jaku" disjunkciju sada možemo uzeti za bazične veznike i onda definisati implikaciju na neki od sledeća dva načina:

$$A \Rightarrow_L B =_{def} \neg_L(A\&\neg_L B) \quad \text{ili} \quad A \Rightarrow_L B =_{def} \neg_L A \triangledown B,$$

što je, zapravo, analogno definicijama u klasičnoj logici.

Zahvaljujući ovim "jakim" veznicima dobijamo tautologije koje predstavljaju verzije Zakona isključenja trećeg - $A \nabla \neg_L A$ i Zakona neprotivrečnosti - $\neg_L(A \& \neg_L A)$ u sistemu L_3.

Poput "slabih" veznika, "jaki" veznici zadovoljavaju poželjne[7] osobine:

1. I konjukcija i disjunkcija su asocijativne;

2. I konjukcija i disjunkcija su komutativne;

3. I konjukcija i disjunkcija su neopadajuće u odnosu na oba argumenta - ako je $v(A) \leq v(C)$, onda je

$$v(A \wedge B) \leq v(C \wedge B) \quad \text{i} \quad v(B \wedge A) \leq v(B \wedge C)$$
$$\text{kao i}$$
$$v(A \vee B) \leq v(C \vee B) \quad \text{i} \quad v(B \vee A) \leq v(B \vee C));$$

4. $1 \wedge B = B$ (kao i $B \wedge 1 = B$);

5. $0 \vee B = B$ (kao i $B \vee 0 = B$);

3.2.10 Napomena U slučaju beskonačnovrednosne logike, veznici konjukcije i disjunkcije koji zadovoljavaju 5 gorenavedenih osobina nazivaju se *t-norme* i *t-konorme*. Može se dokazati da t-norme i t-konorme takođe zadovoljavaju i sledeće osobine (koje slede iz gorenavedenih osobina):

6. $A \wedge B$ ima vrednost 0 ukoliko jedan od A i B ima vrednost 0;

7. $A \vee B$ ima vrednost 1 ukoliko jedan od A i B ima vrednost 1;

3.2.2 Aksiomatizacija logičkog sistema L_3

Uzevši $\neg$[8] i $\Rightarrow$ za bazične veznike, Wajsberg je 1931. godine dokazao da je sledeći aksiomatski sistem izvođenja, koji ćemo obeležavati sa L_3A, pouzdan i kompletan za L_3:

$L_3 1$. $A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$

$L_3 2$:$(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((B \Rightarrow C) \Rightarrow ((A \Rightarrow C))$

$L_3 3$:$(\neg A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow (B \Rightarrow A)$

[7]Ovih 7 osobina jedinstveno definišu konjukciju i disjunkciju u klasičnoj logici te se zato smatraju poželjnim u drugim logikama.

[8]U ovom poglavlju ćemo veznike pisati bez oznaka za odgovarajuću logiku radi preglednosti i naglašeno je da posmatramo samo sistem L_3.

$L_3 4$:$((A \Rightarrow \neg A) \Rightarrow A) \Rightarrow A$

Jedino pravilo izvođenja jeste modus ponens - $MP : \frac{A, A \Rightarrow B}{B}$

3.2.11 Napomena

- Aksiome $L_3 1$ i $L_3 3$ su analogne redom aksiomama Ax_1 i Ax_3 za klasičnu iskaznu logiku (definicija 2.4.7).
- Aksioma Ax_2 se ne može izvesti u sistemu $L_3 A$.
- Aksiome $L_3 2$ i $L_3 4$ se mogu izvesti u sistemu $\mathcal{H}$ jer su one klasične tautologije i sistem $\mathcal{H}$ je kompletan.
- $L_3 4$ se može preformulisati u $(A \Rightarrow \neg A) \vee A$ (s obzirom da je $A \vee B =_{def} (A \Rightarrow B) \Rightarrow B$). Ova formula je usko povezana sa Zakonom isključenja trećeg za koji znamo od ranije da ne važi u L_3.

Bilo koje izvođenje u sistemu $\mathcal{H}$ koje ne uključuje Ax_2 jeste i izvođenje u sistemu $L_3 A$ i bilo koje pravilo koje može da se izvede u $\mathcal{H}$ bez korišćenja Ax_2 jeste izvedeno pravilo u $L_3 A$.

Postoje izvedena pravila u $\mathcal{H}$ koja se mogu izvesti i u $L_3 A$, naravno zaobilazeći Ax_2, npr. $\vdash A \Rightarrow A$ što ćemo i pokazati, ali najpre treba da izvedemo nekoliko pomoćnih pravila.

3.2.12 Lema $\vdash \neg A \Rightarrow (A \Rightarrow B)$

Dokaz. Korake dokaznog niza ćemo pisati vertikalno zajedno sa rednim brojem koraka i sa obrazloženjem zašto je taj korak moguće učiniti:

1. $\neg A \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$.. $L_3 1$
2. $(\neg B \Rightarrow \neg A) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$.. $L_3 3$
3. $(\neg A \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)) \Rightarrow (((\neg B \Rightarrow \neg A) \Rightarrow (A \Rightarrow B)) \Rightarrow (\neg A \Rightarrow (A \Rightarrow B)))$.............. $L_3 2$
4. $((\neg B \Rightarrow \neg A) \Rightarrow (A \Rightarrow B)) \Rightarrow (\neg A \Rightarrow (A \Rightarrow B))$.. MP 1.3.
5. $\neg A \Rightarrow (A \Rightarrow B)$.. MP 2.4.

□

Sledeće pravilo, tzv. *hipotetički silogizam*, često ćemo koristiti u narednim dokazima te ga zato ističemo:

HS Iz $A \Rightarrow B$ i $B \Rightarrow C$ se izvodi zaključak $A \Rightarrow C$.

Dokazuje se trivijalno primenjujući pravilo MP dva puta uzastopno na aksiomu $L_3 2$.

3.2.13 Lema

1.) $\vdash \neg\neg A \Rightarrow A$

2.) $\vdash A \Rightarrow \neg\neg A$

Dokaz.

1.)
1. $\neg\neg A \Rightarrow (\neg A \Rightarrow \neg(A \Rightarrow \neg A))$.................... lema 3.2.12
2. $(\neg A \Rightarrow \neg(A \Rightarrow \neg A)) \Rightarrow ((A \Rightarrow \neg A) \Rightarrow A)$.................... $L_3 3$
3. $\neg\neg A \Rightarrow ((A \Rightarrow \neg A) \Rightarrow A)$.................... HS 1.2.
4. $((A \Rightarrow \neg A) \Rightarrow A) \Rightarrow A$ .... $L_3 4$
5. $\neg\neg A \Rightarrow A$.................... HS 3.4.

2.)
1. $\neg\neg\neg A \Rightarrow \neg A$.................... lema 3.2.13 1.)
2. $(\neg\neg\neg A \Rightarrow \neg A) \Rightarrow (A \Rightarrow \neg\neg A)$.................... $L_3 3$
3. $A \Rightarrow \neg\neg A$.................... MP 1.2.

□

Sada trivijalno dokazujemo prethodno spomenuto pravilo $\vdash A \Rightarrow A$ u narednoj lemi.

3.2.14 Lema $\vdash A \Rightarrow A$

Dokaz.
1. $A \Rightarrow \neg\neg A$.................... lema 3.2.13 2.)
2. $\neg\neg A \Rightarrow A$.................... lema 3.2.13 1.)
3. $A \Rightarrow A$.................... HS 1.2.

□

3.2.15 Lema $A \Rightarrow B, \neg B \vdash \neg A$

Dokaz. 1. $A \Rightarrow B$.................... hipoteza
2. $\neg B$.................... hipoteza
3. $\neg\neg A \Rightarrow A$.................... lema 3.2.13 1.)
4. $(\neg\neg A \Rightarrow A) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg\neg A \Rightarrow B))$.................... $L_3 2$
5. $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg\neg A \Rightarrow B)$.................... MP 3.4.
6. $\neg\neg A \Rightarrow B$.................... MP 1.5.
7. $B \Rightarrow \neg\neg B$.................... lema 3.2.13 2.)
8. $\neg\neg A \Rightarrow \neg\neg B$.................... HS 6.7.
9. $(\neg\neg A \Rightarrow \neg\neg B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$.................... $L_3 3$
10. $\neg B \Rightarrow \neg A$.................... MP 8.9.
11. $\neg A$.................... MP 2.10.

□

Ističemo još jedno izvedeno pravilo, koje će nam biti korisno u dokazima koji slede, tzv. *kontrapoziciju*:

CON[9] Iz $\neg A \Rightarrow \neg B$ se izvodi zaključak $B \Rightarrow A$.

Dokazuje se trivijalno primenjujući pravilo MP na aksiomu $L_3 3$.

3.2.16 Lema $\vdash ((A \Rightarrow A) \Rightarrow B) \Rightarrow B$

[9] engl. *contraposition*

Dokaz. 1. $(A \Rightarrow A) \Rightarrow ((B \Rightarrow \neg B) \Rightarrow (A \Rightarrow A))$ .... $L_3 1$
2. $A \Rightarrow A$........ lema 3.2.14
3. $(B \Rightarrow \neg B) \Rightarrow (A \Rightarrow A)$ .... MP 2.1.
4. $((B \Rightarrow \neg B) \Rightarrow (A \Rightarrow A)) \Rightarrow (((A \Rightarrow A) \Rightarrow B) \Rightarrow ((B \Rightarrow \neg B) \Rightarrow B))$ .... $L_3 2$
5. $((A \Rightarrow A) \Rightarrow B) \Rightarrow ((B \Rightarrow \neg B) \Rightarrow B)$........ MP 3.4.
6. $((B \Rightarrow \neg B) \Rightarrow B) \Rightarrow B$ .... $L_3 4$
7. $((A \Rightarrow A) \Rightarrow B) \Rightarrow B$ .... HS 5.6.
□

Koristeći prethodno dokazanu lemu, možemo dokazati da važi $A \Rightarrow (A \vee B)$ i to ćemo učiniti tako što ćemo preformulisati posmatranu formulu znajući definiciju veznika $\vee$: $A \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow B)$. Primetimo da je $A \Rightarrow (B \vee A)$ instanca aksiome $L_3 1$.

3.2.17 Lema $\vdash A \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow B)$

Dokaz. 1. $A \Rightarrow ((A \Rightarrow A) \Rightarrow A)$ .... $L_3 1$
2. $((A \Rightarrow A) \Rightarrow A) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow ((A \Rightarrow A) \Rightarrow B))$ .... $L_3 2$
3. $A \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow ((A \Rightarrow A) \Rightarrow B))$........ HS 1.2.
4. $((A \Rightarrow B) \Rightarrow ((A \Rightarrow A) \Rightarrow B)) \Rightarrow ((((A \Rightarrow A) \Rightarrow B) \Rightarrow B) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow B))$ .... $L_3 2$
5. $A \Rightarrow ((((A \Rightarrow A) \Rightarrow B) \Rightarrow B) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow B))$ .... HS 3.4.
6. $((A \Rightarrow A) \Rightarrow B) \Rightarrow B$ .... lema 3.2.16
7. $(((A \Rightarrow A) \Rightarrow B) \Rightarrow B) \Rightarrow ((A \Rightarrow A) \Rightarrow (((A \Rightarrow A) \Rightarrow B) \Rightarrow B))$ .... $L_3 1$
8. $(A \Rightarrow A) \Rightarrow (((A \Rightarrow A) \Rightarrow B) \Rightarrow B)$........ MP 6.7.
9. $((A \Rightarrow A) \Rightarrow (((A \Rightarrow A) \Rightarrow B) \Rightarrow B)) \Rightarrow (((((A \Rightarrow A) \Rightarrow B) \Rightarrow B) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow B)) \Rightarrow ((A \Rightarrow A) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow B)))$........$L_3 2$
10. $((((A \Rightarrow A) \Rightarrow B) \Rightarrow B) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow B)) \Rightarrow ((A \Rightarrow A) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow B))$ .... MP 8.9.
11. $A \Rightarrow ((A \Rightarrow A) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow B))$........ HS 5.10.
12. $((A \Rightarrow A) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow B)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow B)$ .... lema 3.2.16
13 $A \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow B)$........ HS 11.12.
□

Dokažimo sada da važi $(A \wedge B) \Rightarrow A$ koristeći prethodnu teoremu, ali najpre preformulišimo posmatranu formulu znajući definiciju veznika $\wedge$: $\neg((\neg A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow \neg B) \Rightarrow A$.

3.2.18 Lema $\neg((\neg A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow \neg B) \vdash A$

Dokaz. 1. $\neg((\neg A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow \neg B)$........ hipoteza
2. $\neg A \Rightarrow ((\neg A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow \neg B)$........ lema 3.2.17
3. $((\neg A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow \neg B) \Rightarrow \neg\neg((\neg A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow \neg B)$ .... lema 3.2.13 2.)
4. $\neg A \Rightarrow \neg\neg((\neg A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow \neg B)$........ HS 2.3.
5. $\neg((\neg A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow \neg B) \Rightarrow A$ .... CON 4.
6. A........ MP 1.5.
□

Koristeći takođe lemu 3.2.17 dokazujemo sledeću lemu.

3.2.19 Lema $\vdash (A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (B \Rightarrow (A \Rightarrow C))$

Dokaz. 1. $(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (((B \Rightarrow C) \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$......................................$L_3 2$
2. $B \Rightarrow ((B \Rightarrow C) \Rightarrow C)$... lema 3.2.17
3.$(B \Rightarrow ((B \Rightarrow C) \Rightarrow C)) \Rightarrow ((((B \Rightarrow C) \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)) \Rightarrow (B \Rightarrow (A \Rightarrow C)))$........ $L_3 2$
4. $(((B \Rightarrow C) \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)) \Rightarrow (B \Rightarrow (A \Rightarrow C))$... MP 2.3.
5. $(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (B \Rightarrow (A \Rightarrow C))$ .... HS 1.4.
□

Sada ćemo izvesti jedno opšte i korisno pravilo tzv. *supstituciju*:

3.2.20 Lema *(SUB[10]) Iz pretpostavke da važe formule $A \Rightarrow B$, $B \Rightarrow A$ i formula C koja sadrži formulu A kao potformulu, sledi da važi bilo koja formula C^* koja je rezultat zamene jednog ili više pojavljivanja formule A u C formulom B.*

Kako bismo izveli pravilo SUB pokazaćemo da ako možemo izvesti formule $A \Rightarrow B$ i $B \Rightarrow A$, onda, imajući bilo koju formulu C koja sadrži formulu A, možemo izvesti i formule $C \Rightarrow C^+$ i $C^+ \Rightarrow C$, gde je formula C^+ identična sa C samo što je jedno pojavljivanje formule A zamenjeno formulom B. Iz ovoga će slediti da, ako možemo da izvedemo formulu C, možemo izvesti i formulu C^+ koristeći pravilo MP (i obratno). Štaviše, onda možemo zameniti i više od jednog pojavljivanja formule A u C formulom B da dobijemo bilo koju formulu C^* i to zamenjujući jedno po jedno pojavljivanje, a time ćemo upravo i dokazati pravilo SUB.

Pokazaćemo kako se izvode formule $C \Rightarrow C^+$ i $C^+ \Rightarrow C$, tako što ćemo pokazati kako se izvode sve "veće" i "veće" formule.

Pretpostavka o izvodivosti formula $A \Rightarrow B$ i $B \Rightarrow A$ je data u tvrđenju pravila SUB. Primetimo da za svaki par formula $D_1 \Rightarrow D_2$ i $D_2 \Rightarrow D_1$ u listi uparenih formula, naredni par formula $E_1 \Rightarrow E_2$ i $E_2 \Rightarrow E_1$ ima D_1 kao komponentu[11] od E_1, a E_2 je rezultat zamene jednog pojavljivanja D_1 u E_1 formulom D_2. Imajući u vidu ovaj generalni obrazac za dobijanje tražene formule, preostaje nam samo da pokažemo da, imajući bilo koje formule $D_1 \Rightarrow D_2$ i $D_2 \Rightarrow D_1$, postoji način da se izvedu formule $E_1 \Rightarrow E_2$ i $E_2 \Rightarrow E_1$, gde je D_1 komponenta od E_1, a E_2 je rezultat zamene jednog pojavljivanja D_1 u E_1 formulom D_2.

Postoje tri slučaja:

1. slučaj: E_1 je $D_1 \Rightarrow F$, za neku formulu F i E_2 je $D_2 \Rightarrow F$. Izvedimo formulu $E_2 \Rightarrow E_1$ tj. $(D_2 \Rightarrow F) \Rightarrow (D_1 \Rightarrow F)$:

Dokaz. n. $D_1 \Rightarrow D_2$... hipoteza
n+1. $(D_1 \Rightarrow D_2) \Rightarrow ((D_2 \Rightarrow F) \Rightarrow (D_1 \Rightarrow F))$... $L_3 2$
n+2. $(D_2 \Rightarrow F) \Rightarrow (D_1 \Rightarrow F)$... MP n. n+1.

$E_1 \Rightarrow E_2$ odnosno $(D_1 \Rightarrow F) \Rightarrow (D_2 \Rightarrow F)$ se slično izvodi pretpostavljajući da važi $D_2 \Rightarrow D_1$.

[10] engl. *substitution*

[11] u smislu da je E_1 dobijeno dodavši negaciju ispred D_1 ili da je dobijeno povezavši D_1 sa drugim formulama pomoću nekog od binarnih veznika

□

2. slučaj: E_1 je $F \Rightarrow D_1$, za neku formulu F i E_2 je $F \Rightarrow D_2$. Izvedimo formulu $E_1 \Rightarrow E_2$ tj. $(F \Rightarrow D_1) \Rightarrow (F \Rightarrow D_2)$:

Dokaz. n. $D_1 \Rightarrow D_2$.. hipoteza
n+1. $(F \Rightarrow D_1) \Rightarrow ((D_1 \Rightarrow D_2) \Rightarrow (F \Rightarrow D_2))$.. $L_3 2$
n+2. $((F \Rightarrow D_1) \Rightarrow ((D_1 \Rightarrow D_2) \Rightarrow (F \Rightarrow D_2))) \Rightarrow ((D_1 \Rightarrow D_2) \Rightarrow ((F \Rightarrow D_1) \Rightarrow (F \Rightarrow D_2)))$.. lema 3.2.19
n+3. $(D_1 \Rightarrow D_2) \Rightarrow ((F \Rightarrow D_1) \Rightarrow (F \Rightarrow D_2))$.. MP n+1. n+2.
n+4. $(F \Rightarrow D_1) \Rightarrow (F \Rightarrow D_2)$.. MP n. n+3.

$E_2 \Rightarrow E_1$ odnosno $(F \Rightarrow D_2) \Rightarrow (F \Rightarrow D_1)$ se slično izvodi pretpostavljajući da važi $D_2 \Rightarrow D_1$.

□

3. slučaj: E_1 je $\neg D_1$ i E_2 je $\neg D_2$. Izvedimo formulu $E_2 \Rightarrow E_1$ tj. $\neg D_2 \Rightarrow \neg D_1$:

Dokaz. n. $D_1 \Rightarrow D_2$.. hipoteza
n+1. $\neg\neg D_1 \Rightarrow D_1$.. lema 3.2.13 1.)
n+2. $\neg\neg D_1 \Rightarrow D_2$.. HS n+1. n.
n+3. $D_2 \Rightarrow \neg\neg D_2$.. lema 3.2.13 2.)
n+4. $\neg\neg D_1 \Rightarrow \neg\neg D_2$.. HS n+2. n+3.
n+5. $\neg D_2 \Rightarrow \neg D_1$.. CON n+4.

$E_1 \Rightarrow E_2$ odnosno $\neg D_1 \Rightarrow \neg D_2$ se slično izvodi pretpostavljajući da važi $D_2 \Rightarrow D_1$.

□

Sa ovim smo u potpunosti opravdali pravilo SUB, s obzirom na to da ove korake možemo koristiti za popunjavanje bilo kog dokaza koristeći to izvedeno pravilo, zamenjujući jedno pojavljivanje formule A formulom B u sukcesivno "većim" formulama i ponavljajući postupak (ukoliko je neophodno) za zamenu dodatnih pojavljivanja formule A formulom B.

Prateći korake prethodnog dokaza, izvodi se sledeće pravilo tzv. *modus tollens*:

3.2.21 Lema *(MT)* $\neg A, B \Rightarrow A \vdash \neg B$

Dokaz. 1. $\neg A$.. hipoteza
2. $B \Rightarrow A$.. hipoteza
3. $\neg\neg B \Rightarrow B$.. lema 3.2.13 1.)
4. $\neg\neg B \Rightarrow A$.. HS 3. 2.
5. $A \Rightarrow \neg\neg A$.. lema 3.2.13 2.)
6. $\neg\neg B \Rightarrow \neg\neg A$.. HS 4. 5.
7. $\neg A \Rightarrow \neg B$.. CON 6.
8. $\neg B$.. MP 1. 7.

□

Kao posebno značajne specijalne slučajeve pravila SUB izdvajamo:

- DN (*dupla negacija*): Iz bilo koje formule C koja sadrži formulu A, sledi bilo koja formula C^* koja je rezultat zamene jednog ili više pojavljivanja formule A u C formulom $\neg\neg A$ i obratno (sledi na osnovu leme 3.2.13).
- TRAN (*transpozicija*): Iz bilo koje formule C koja sadrži $A \Rightarrow (B \Rightarrow D)$ kao potformulu sledi bilo koja formula C^* koja je rezultat zamene jednog ili više pojavljivanja formule $A \Rightarrow (B \Rightarrow D)$ u C formulom $B \Rightarrow (A \Rightarrow D)$ (sledi na osnovu leme 3.2.19).
- GCON[12] (*generalizovana kontrapozicija*): Iz bilo koje formule C koja sadrži $A \Rightarrow B$ kao potformulu sledi bilo koja formula C^* koja je rezultat zamene jednog ili više pojavljivanja formule $A \Rightarrow B$ u C formulom $\neg B \Rightarrow \neg A$ i obratno. (Sledi na osnovu aksiome $L_3 3$ i činjenice da je formula oblika $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$ teorema u $L_3 A$ (na $(\neg\neg A \Rightarrow \neg\neg B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$, što je instanca aksiome $L_3 3$, primenjujemo pravilo DN dva puta)).

Dokažimo sada koristeći pravilo DN lemu koja će nam biti od koristi kasnije:

3.2.22 Lema $\vdash \neg(A \Rightarrow B) \Rightarrow A$

Dokaz. 1. $\neg A \Rightarrow (A \Rightarrow B)$.. lema 3.2.12
2.$\neg A \Rightarrow \neg\neg(A \Rightarrow B)$.. DN 1.
3. $\neg(A \Rightarrow B) \Rightarrow A$.. CON 2.
□

Sada ćemo predstaviti dva pravila koja generalizuju prethodna pravila. Koristićemo notaciju $(A_1 \Rightarrow (A_2 \Rightarrow (A_3 \Rightarrow \ldots.. \Rightarrow (A_{n-1} \Rightarrow A_n)\ldots..)$ za označavanje kondicionala u kojem je svaki konsekvent, osim možda A_n, i sam kondicional.

Prvo pravilo je *generalizovani hipotetički silogizam*:

3.2.23 Lema *(GHS) Iz* $(A_1 \Rightarrow (A_2 \Rightarrow (A_3 \Rightarrow \ldots.. \Rightarrow (A_{n-1} \Rightarrow A_n)\ldots..)$ *i* $A_n \Rightarrow B$ *sledi* $(A_1 \Rightarrow (A_2 \Rightarrow (A_3 \Rightarrow \ldots.. \Rightarrow (A_{n-1} \Rightarrow B)\ldots..)$.

Dokaz. Najpre dokažimo da je tvrđenje tačno za $n = 3$ tj. da je tačno da iz $A_1 \Rightarrow (A_2 \Rightarrow A_3)$ i $A_3 \Rightarrow B$ sledi $A_1 \Rightarrow (A_2 \Rightarrow B)$:

1. $A_1 \Rightarrow (A_2 \Rightarrow A_3)$.. hipoteza
2. $A_3 \Rightarrow B$.. hipoteza
3. $(A_2 \Rightarrow A_3) \Rightarrow ((A_3 \Rightarrow B) \Rightarrow (A_2 \Rightarrow B))$.. $L_3 2$
4. $(A_3 \Rightarrow B) \Rightarrow ((A_2 \Rightarrow A_3) \Rightarrow (A_2 \Rightarrow B))$.. TRAN 3.
5. $(A_2 \Rightarrow A_3) \Rightarrow (A_2 \Rightarrow B)$.. MP 2.4.
6. $A_1 \Rightarrow (A_2 \Rightarrow B)$.. HS 1.5.

Za $n = 4$, izvođenje počinje ovako:

[12] engl. *generalized contraposition*

1. $A_1 \Rightarrow (A_2 \Rightarrow (A_3 \Rightarrow A_4))$ .... hipoteza
2. $A_4 \Rightarrow B$ .... hipoteza
3. $(A_3 \Rightarrow A_4) \Rightarrow ((A_4 \Rightarrow B) \Rightarrow (A_3 \Rightarrow B))$ .... $L_3 2$
4. $(A_4 \Rightarrow B) \Rightarrow ((A_3 \Rightarrow A_4) \Rightarrow (A_3 \Rightarrow B))$ .... TRAN 3.
5. $(A_3 \Rightarrow A_4) \Rightarrow (A_3 \Rightarrow B)$ .... MP 2.4.

Formule iz 1. i 5. koraka dokaza su instance prvih dveju formula iz prethodnog izvođenja sa $A_3 \Rightarrow A_4$ umesto A_3 i $A_3 \Rightarrow B$ umesto B tako da se koraci 3-6. prethodnog izvođenja primenjuju ovde i dobijamo:

9. $A_1 \Rightarrow (A_2 \Rightarrow (A_3 \Rightarrow B))$

Svaki naredni slučaj sledi iz njemu prethodnog slučaja na analogan način. Dakle, za proizvoljno $n > 3$ izvođenje počinje sa:

1. $(A_1 \Rightarrow (A_2 \Rightarrow (A_3 \Rightarrow ..... \Rightarrow (A_{n-1} \Rightarrow A_n).....)$ .... hipoteza
2. $A_n \Rightarrow B$ .... hipoteza
3. $(A_{n-1} \Rightarrow A_n) \Rightarrow ((A_n \Rightarrow B) \Rightarrow (A_{n-1} \Rightarrow B))$ .... $L_3 2$
4. $(A_n \Rightarrow B) \Rightarrow ((A_{n-1} \Rightarrow A_n) \Rightarrow (A_{n-1} \Rightarrow B))$ .... TRAN 3.
5. $(A_{n-1} \Rightarrow A_n) \Rightarrow (A_{n-1} \Rightarrow B)$ .... MP 2.4.

Formule iz 1. i 5. koraka dokaza su instance prvih dveju formula $(A_1 \Rightarrow (A_2 \Rightarrow (A_3 \Rightarrow ..... \Rightarrow (A_{n-2} \Rightarrow A_{n-1}).....)$ i $A_{n-1} \Rightarrow B$ za izvođenje slučaja $n-1$ sa $A_{n-1} \Rightarrow A_n$ umesto A_{n-1} i $A_{n-1} \Rightarrow B$ umesto B, tako da će koraci iz slučaja za $n-1$ dati:

k. $(A_1 \Rightarrow (A_2 \Rightarrow (A_3 \Rightarrow ..... \Rightarrow (A_{n-1} \Rightarrow B).....)$ □

Drugo pravilo je *generalizovani modus ponens*:

3.2.24 Lema *(GMP) Iz* $(A_1 \Rightarrow (A_2 \Rightarrow (A_3 \Rightarrow ..... \Rightarrow (A_{n-1} \Rightarrow A_n).....)$ *i proizvoljnog antecedenta* A_i*,* $1 \le i \le n-1$*, sledi kondicional koji je rezultat brisanja* A_i*, kondicional koji sledi nakon* A_i *i pridružene zagrade.*

Dokaz. Ponavljajući primenu pravila TRAN antecedenti $A_1, A_2, ..., A_{n-1}$ mogu se proizvoljno permutovati. Prema tome, antecedent A_i može biti pomeren na početak formule, a da pritom raspored ostalih antecedenata ostane nepromenjen. Kada to bude učinjeno, jedna primena pravila MP daće nam traženu formulu u kojoj je uklonjen A_i. □

U klasičnoj logici zaključivanje oblika

$$\frac{A \Rightarrow B, \neg A \Rightarrow B}{B}$$

je ispravno i odgovarajuće izvedeno pravilo se naziva *konstruktivna dilema*, međutim ovo zaključivanje nije ispravno u L_3. No, zaključivanje oblika

$$\frac{A \Rightarrow B, (A \Rightarrow \neg A) \Rightarrow B}{B}$$

jeste ispravno u L_3 i odgovarajuće izvedeno pravilo se naziva *modifikovana konstruktivna dilema*.

3.2.25 Lema *(MCD[13])* $A \Rightarrow B, (A \Rightarrow \neg A) \Rightarrow B \vdash B.$

Dokaz. 1. $A \Rightarrow B$............ hipoteza
2. $(A \Rightarrow \neg A) \Rightarrow B$............ hipoteza
3. $(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((B \Rightarrow \neg A) \Rightarrow (A \Rightarrow \neg A))$............ $L_3 2$
4. $(B \Rightarrow \neg A) \Rightarrow (A \Rightarrow \neg A)$............ MP 1.3.
5. $(B \Rightarrow \neg A) \Rightarrow B$............ HS 4.2.
6. $(B \Rightarrow \neg B) \Rightarrow ((\neg B \Rightarrow \neg A) \Rightarrow (B \Rightarrow \neg A))$............ $L_3 2$
7. $(\neg B \Rightarrow \neg A) \Rightarrow ((B \Rightarrow \neg B) \Rightarrow (B \Rightarrow \neg A))$............ TRAN 6.
8. $\neg B \Rightarrow \neg A$............ GCON 1.
9. $(B \Rightarrow \neg B) \Rightarrow (B \Rightarrow \neg A)$............ MP 8.7.
10. $(B \Rightarrow \neg B) \Rightarrow B$............ HS 9.5.
11. $(B \Rightarrow \neg B) \Rightarrow B) \Rightarrow B$............ $L_3 4$
12. B............ MP 10. 11.

□

Sa druge strane, izvedeno pravilo klasične logike *disjunktivni silogizam* jeste izvodivo u $L_3 A$:

3.2.26 Lema *(DS)* $A \vee B, A \Rightarrow C, B \Rightarrow C \vdash C.$

Dokaz. (Koristimo definiciju veznika $\vee$: $A \vee B = (A \Rightarrow B) \Rightarrow B$)

1. $(A \Rightarrow B) \Rightarrow B$............ hipoteza
2. $A \Rightarrow C$............ hipoteza
3. $B \Rightarrow C$............ hipoteza
4. $\neg(A \Rightarrow B) \Rightarrow A$............ lema 3.2.22
5. $\neg(A \Rightarrow B) \Rightarrow C$............ HS 4.2.
6. $(\neg\neg(A \Rightarrow B) \Rightarrow \neg\neg B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg(A \Rightarrow B))$............ $L_3 3$
7. $((A \Rightarrow B) \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg(A \Rightarrow B))$............ DN 6. (dva puta)
8. $((A \Rightarrow B) \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow A)$............ GHS 4.7.
9. $(\neg B \Rightarrow A) \Rightarrow ((A \Rightarrow \neg A) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A))$............ $L_3 2$
10. $(\neg B \Rightarrow \neg A) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$............ $L_3 3$
11. $(\neg B \Rightarrow A) \Rightarrow ((A \Rightarrow \neg A) \Rightarrow (A \Rightarrow B))$............ GHS 9.10.
12. $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (((A \Rightarrow B) \Rightarrow \neg(A \Rightarrow B)) \Rightarrow \neg(A \Rightarrow B))$............ lema 3.2.17
13. $(\neg B \Rightarrow A) \Rightarrow ((A \Rightarrow \neg A) \Rightarrow (((A \Rightarrow B) \Rightarrow \neg(A \Rightarrow B)) \Rightarrow \neg(A \Rightarrow B)))$..... GHS 11.12.
14. $(\neg B \Rightarrow A) \Rightarrow ((A \Rightarrow \neg A) \Rightarrow (((A \Rightarrow B) \Rightarrow \neg(A \Rightarrow B)) \Rightarrow C))$............ GHS 5.13.
15. $((A \Rightarrow B) \Rightarrow B) \Rightarrow ((A \Rightarrow \neg A) \Rightarrow (((A \Rightarrow B) \Rightarrow \neg(A \Rightarrow B)) \Rightarrow C))$............ HS 8.14.
16. $((A \Rightarrow B) \Rightarrow B) \Rightarrow (((A \Rightarrow B) \Rightarrow \neg(A \Rightarrow B)) \Rightarrow ((A \Rightarrow \neg A) \Rightarrow C))$............ TRAN 15.
17. $((A \Rightarrow B) \Rightarrow \neg(A \Rightarrow B)) \Rightarrow (((A \Rightarrow B) \Rightarrow B) \Rightarrow ((A \Rightarrow \neg A) \Rightarrow C))$............ TRAN 16.
18. $((A \Rightarrow B) \Rightarrow \neg(A \Rightarrow B)) \Rightarrow ((A \Rightarrow \neg A) \Rightarrow (((A \Rightarrow B) \Rightarrow B) \Rightarrow C))$............ TRAN 17.
19. $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (((A \Rightarrow B) \Rightarrow B) \Rightarrow B)$............ lema 3.2.17
20. $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (((A \Rightarrow B) \Rightarrow B) \Rightarrow C)$............ GHS 3.19.
21. $(((A \Rightarrow B) \Rightarrow B) \Rightarrow C) \Rightarrow ((A \Rightarrow \neg A) \Rightarrow (((A \Rightarrow B) \Rightarrow B) \Rightarrow C))$............ $L_3 1$
22. $(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((A \Rightarrow \neg A) \Rightarrow (((A \Rightarrow B) \Rightarrow B) \Rightarrow C))$............ HS 20.21.
23. $(A \Rightarrow \neg A) \Rightarrow (((A \Rightarrow B) \Rightarrow B) \Rightarrow C)$............ MCD 18.22.
24. $C \Rightarrow (((A \Rightarrow B) \Rightarrow B) \Rightarrow C)$............ $L_3 1$

[13] engl. *modified constructive dilemma*

25. $A \Rightarrow (((A \Rightarrow B) \Rightarrow B) \Rightarrow C)$........ HS 2.24.
26. $((A \Rightarrow B) \Rightarrow B) \Rightarrow C$........ MCD 25.23.
27. C........ MP 1.26.

□

Usput smo tokom izvođenja (od 2. do 26. koraka) ovog pravila izveli i sledeće pravilo:

3.2.27 Lema *(DC*[14]*)* $A \Rightarrow C, B \Rightarrow C \vdash (A \vee B) \Rightarrow C$.

Kao posledicu ovog pravila imamo i:

3.2.28 Lema $\vdash (A \vee B) \Rightarrow (B \vee A)$

Dokaz. Najpre preformulišimo formulu koristeći definiciju veznika $\vee$: $((A \Rightarrow B) \Rightarrow B) \Rightarrow ((B \Rightarrow A) \Rightarrow A)$.

1. $A \Rightarrow ((B \Rightarrow A) \Rightarrow A)$........ $L_3 1$
2. $B \Rightarrow ((B \Rightarrow A) \Rightarrow A)$........ lema 3.2.17
3. $((A \Rightarrow B) \Rightarrow B) \Rightarrow ((B \Rightarrow A) \Rightarrow A)$........ DC 1.2.

□

3.2.29 Lema $\vdash (A \Rightarrow B) \vee (B \Rightarrow A)$

Dokaz. Najpre preformulišimo formulu koristeći definiciju veznika $\vee$: $((A \Rightarrow B) \Rightarrow (B \Rightarrow A)) \Rightarrow (B \Rightarrow A)$.

1. $((A \Rightarrow B) \Rightarrow (B \Rightarrow A)) \Rightarrow (((B \Rightarrow A) \Rightarrow A) \Rightarrow (((A \Rightarrow B) \Rightarrow A))$........ $L_3 2$
2. $((A \Rightarrow B) \Rightarrow B) \Rightarrow ((B \Rightarrow A) \Rightarrow A)$........ lema 3.2.28
3. $((B \Rightarrow A) \Rightarrow A) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow B)$........ lema 3.2.28
4. $((A \Rightarrow B) \Rightarrow (B \Rightarrow A)) \Rightarrow (((A \Rightarrow B) \Rightarrow B) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow A))$........ SUB 1.2.3.
5. $(((A \Rightarrow B) \Rightarrow (B \Rightarrow A)) \Rightarrow (((A \Rightarrow B) \Rightarrow B) \Rightarrow (((A \Rightarrow B) \Rightarrow A))) \Rightarrow ((((A \Rightarrow B) \Rightarrow B) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow A)) \Rightarrow ((B \Rightarrow (A \Rightarrow B)) \Rightarrow (B \Rightarrow A))) \Rightarrow (((A \Rightarrow B) \Rightarrow (B \Rightarrow A)) \Rightarrow ((B \Rightarrow (A \Rightarrow B)) \Rightarrow (B \Rightarrow A))))$........ $L_3 2$
6. $(((A \Rightarrow B) \Rightarrow B) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow A)) \Rightarrow ((B \Rightarrow (A \Rightarrow B)) \Rightarrow (B \Rightarrow A)) \Rightarrow (((A \Rightarrow B) \Rightarrow (B \Rightarrow A)) \Rightarrow ((B \Rightarrow (A \Rightarrow B)) \Rightarrow (B \Rightarrow A)))$........ MP 4.5.
7. $((\neg B \Rightarrow \neg(A \Rightarrow B)) \Rightarrow (\neg A \Rightarrow \neg(A \Rightarrow B))) \Rightarrow ((\neg B \Rightarrow \neg(A \Rightarrow B)) \Rightarrow (\neg A \Rightarrow \neg(A \Rightarrow B)))$........ lema 3.2.14
8. $((\neg B \Rightarrow \neg(A \Rightarrow B)) \Rightarrow (\neg A \Rightarrow \neg(A \Rightarrow B))) \Rightarrow (\neg A \Rightarrow ((\neg B \Rightarrow \neg(A \Rightarrow B)) \Rightarrow \neg(A \Rightarrow B)))$........ TRAN 7.
9. $((\neg B \Rightarrow \neg(A \Rightarrow B)) \Rightarrow \neg(A \Rightarrow B)) \Rightarrow ((\neg(A \Rightarrow B) \Rightarrow \neg B) \Rightarrow \neg B)$........ lema 3.2.28
10. $((\neg B \Rightarrow \neg(A \Rightarrow B)) \Rightarrow (\neg A \Rightarrow \neg(A \Rightarrow B))) \Rightarrow (\neg A \Rightarrow ((\neg(A \Rightarrow B) \Rightarrow \neg B) \Rightarrow \neg B))$........ GHS 8.9.
11. $((\neg B \Rightarrow \neg(A \Rightarrow B)) \Rightarrow (\neg A \Rightarrow \neg(A \Rightarrow B))) \Rightarrow ((\neg(A \Rightarrow B) \Rightarrow \neg B) \Rightarrow (\neg A \Rightarrow \neg B))$........ TRAN 10.
12. $((A \Rightarrow B) \Rightarrow B) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow ((B \Rightarrow (A \Rightarrow B)) \Rightarrow (B \Rightarrow A))$........ GCON 11. (četiri puta)
13. $((A \Rightarrow B) \Rightarrow (B \Rightarrow A)) \Rightarrow ((B \Rightarrow (A \Rightarrow B)) \Rightarrow (B \Rightarrow A))$........ HS 4.12.

[14]engl. *disjunctive consequence*

14. $(B \Rightarrow (A \Rightarrow B)) \Rightarrow (((A \Rightarrow B) \Rightarrow (B \Rightarrow A)) \Rightarrow (B \Rightarrow A))$ .... TRAN 13.
15. $B \Rightarrow (A \Rightarrow B)$.. $L_3 1$
16. $((A \Rightarrow B) \Rightarrow (B \Rightarrow A)) \Rightarrow (B \Rightarrow A)$.. MP 14.15.

$\square$

Slično kao za sistem $\mathcal{H}$ (L_3A je i pouzdan i kompletan za L_3 i takođe konstrukcijom istinitosne tablice za proizvoljnu formulu F možemo proveriti da li je F tautologija) dobijamo sledeću teoremu:

3.2.30 Teorema *Sistem L_3A je odlučiv.*

Teorema dedukcije za klasičnu logiku, metateorema koja tvrdi da je $A \Rightarrow B$ teorema akko B može da se izvede iz A, NE VAŽI za L_3A. Tačno je da ako je $A \Rightarrow B$ teorema, onda B može da se izvede iz A (na osnovu pravila MP), ali drugi smer teoreme ne važi. S obzirom da je sistem L_3A pouzdan i kompletan, drugi smer ekvivalentan je sa: ako je B tačno kad god je i A, onda je $A \Rightarrow B$ tautologija. Ovo ne važi i jedan kontraprimer je: kad god je $A \wedge ((A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow (B \Rightarrow C)))$ tačno i C je tačno, ali $(A \wedge ((A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow (B \Rightarrow C)))) \Rightarrow C$ nije tautologija u L_3. No, sledeća teorema važi u L_3A:

3.2.31 Teorema *(Modifikovana teorema dedukcije) B je izvodivo iz A u L_3A akko je*

$$A \Rightarrow (A \Rightarrow B)$$

teorema u L_3A.

Vratimo se sada na prethodni kontraprimer. Pošto imamo kompletnost, znamo da je C izvodivo iz $A \wedge ((A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow (B \Rightarrow C)))$ u L_3A, tako da, na osnovu Modifikovane teoreme dedukcije, sledi da je $(A \wedge ((A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow (B \Rightarrow C)))) \Rightarrow ((A \wedge ((A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow (B \Rightarrow C)))) \Rightarrow C)$ teorema.

3.3 Algebarska tačka gledišta

U ovom delu nam je cilj da trovalentne logičke sisteme "osetimo" u algebarskom smislu. Prirodno, interesuje nas koje to algebarske strukture karakterišu operacije trovalentnih logičkih sistema?

Usmerićemo pažnju na algebru indukovanu Lukasiewiczevom "slabom" disjunkcijom i "slabom" konjukcijom (samim tim i Kleenejevim "jakim" operacijama). U pitanju je distributivna mreža u kojoj, analogno slučaju klasične logike, 0 i 1 igraju, redom, uloge nule i jediničnog elementa i $\vee$ i $\wedge$ igraju, redom, uloge operacije unije i preseka.

O kojim to onda algebarskim svojstvima govorimo? Pre svega, ta struktura, po definiciji, ispunjava dolenavedena prva četiri uslova jer je mreža, peti uslov jer je i distributivna, a šesti uslov zbog postojanja nule i jediničnog elementa:

- 1.) $x \cup y = y \cup x$ i $x \cap y = y \cap x$ (*komutativnost*)
- 2.) $x \cup (y \cup z) = (x \cup y) \cup z$ i $x \cap (y \cap z) = (x \cap y) \cap z$ (*asocijativnost*)
- 3.) $x \cup x = x$ i $x \cap x = x$ (*idempotentnost*)

- 4.) $x \cup (x \cap y) = x$ i $x \cap (x \cup y) = x$ (*apsorpcija*)
- 5.) $x \cup (y \cap z) = (x \cup y) \cap (x \cup z)$ i $x \cap (y \cup z) = (x \cap y) \cup (x \cap z)$ (*distributivnost*)
- 6.) $x \cup 0 = x$ i $x \cap 1 = x$ (*neutralni elementi za uniju i presek*)

Tu mrežu ćemo označavati sa LKL[15].

3.3.1 Napomena Dodeljujući Łukasiewicz-Kleene negaciji ulogu operacije komplementarnosti ($'$) u mreži LKL, dobijamo strukturu koja ipak nije Bulova algebra (gorenavedenih 6 uslova + uslov komplementarnosti) jer uslov komplementarnosti tj.

$$x \cup x' = 1 \text{ i } x \cap x' = 0$$

nije ispunjen:

$$\text{ako je } x = \tfrac{1}{2}, \text{ onda je } \tfrac{1}{2} \cup \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2} \text{ i } \tfrac{1}{2} \cap \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2}.$$

Zapravo, ova situacija ne bi trebalo da bude iznenađujuća jer $x \cup x' = 1$ u algebarskom smislu predstavlja Zakon isključenja trećeg, koji ne važi ni u L_3 ni u K_3^S. Štaviše, da bi $x \cup x' = 1$ bilo ispunjeno u LKL trebalo bi da se definiše $\frac{1}{2}' = 1$ i $0' = 1$, jer bi taj uslov zahtevao da bude $max(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}') = 1$ i $max(0, 0') = 1$, a da bi $x \cap x' = 0$ bilo ispunjeno u LKL trebalo bi da se definiše $\frac{1}{2}' = 0$ i $1' = 0$. S obzirom na to da ne može biti i $\frac{1}{2}' = 1$ i $\frac{1}{2}' = 0$, sledi da je nemoguće definisati Bulovu operaciju komplementarnosti za mrežu LKL.

Łukasiewicz-Kleene negacija predstavlja primer *ortokomplementarne* operacije. Algebarski *ortokomplement* je unarna operacija $'$ koja ispunjava sledeće uslove:

1.) $0' = 1$, $1' = 0$ i

2.) $x'' = x$, za svako x iz domena.

Normalnost Łukasiewicz-Kleene negacije implicira uslov 1.), a uslov 2.) predstavlja, u algebarskom smislu, Zakon dvojne negacije.

Algebarsku strukturu koju dobijamo dodajući Łukasiewicz-Kleene negaciju mreži LKL obeležavaćemo sa LKL'.

3.3.2 Definicija *De Morganova algebra je distributivna mreža koja ima nulu i jedinični element, ortokomplement koji ispunjava gorenavedene uslove 1.) i 2.) i De Morgane uslove*

$$(x \cup y)' = x' \cap y' \qquad i \qquad (x \cap y)' = x' \cup y'.$$

Jednostavno se utvrđuje da je LKL' De Morganova algebra. Važi još više - LKL' je *Kleenejeva algebra* koja se definiše na sledeći način:

3.3.3 Definicija *Kleenejeva algebra je De Morganova algebra koja ispunjava sledeći uslov*

$$x \cap x' \leq y \cup y', \quad \textit{za svako x i y iz domena,} \quad \textit{gde je} \quad x \leq y =_{def} x \cap y = x.$$

[15]engl. *Łukasiewicz-Kleene lattice*

U LKL' jeste ispunjeno $min(x, 1-x) \leq max(y, 1-y)$ jer za bilo koje $x \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ imamo da je $min(x, 1-x) \leq \frac{1}{2}$ i za bilo koje y imamo da je $\frac{1}{2} \leq max(y, 1-y)$.

Sledeće što nas interesuje jeste situacija sa operacijom implikacije. U slučaju klasične logike, Bulova algebarska operacija implikacije se definiše ovako:

$$x \Rightarrow y = 1 \quad \text{akko} \quad x \leq y, \quad \text{gde je} \quad x \leq y =_{def} x \cap y = x.$$

Prema tome, interesuje nas da li Łukasiewiczeva odnosno Kleenejeva operacija implikacije takođe ispunjava ovaj uslov. Dakle, treba da bude na osnovu definicije za $\leq$,

$$x \Rightarrow y = 1 \quad \text{akko} \quad x \cap y = x,$$

tj. u slučaju strukture LKL' taj uslov dobija sledeći oblik

$$x \Rightarrow y = 1 \quad \text{akko} \quad min(x, y) = x.$$

Ovo jeste zadovoljeno u slučaju Łukasiewiczeve operacije implikacije, dok za Kleenejevu operaciju implikacije ovo nije zadovoljeno. Međutim, ukoliko imamo domen koji sadrži više od dva elementa, taj uslov nam ne govori kada će biti ispunjeno $x \Rightarrow y = 0$ i zato ne utvrđuje kada Łukasiewiczev kondicional uzima vrednost $\frac{1}{2}$, a kada vrednost 0. No, ovo ne treba da nas brine, jer će u 5. glavi biti predstavljena druga algebarska struktura (MV-ALGEBRA) koja odgovara Łukasiewiczevom viševrednosnom logičkom sistemu.

S druge strane, Kleenejeva operacija implikacije može se definisati za Kleenejeve algebre na očigledan način:

$$x \Rightarrow_K y =_{def} x' \cup y.$$

Imamo rezultat u vezi sa odnosom logičkog sistema K_3^S i Kleenejeve algebre analogan rezultatu u vezi odnosa klasične iskazne logike i Bulove algebre.

Korišćenje trovalentne Kleenejeve algebre za interpretiranje formula iskazne logike dodeljujući jedinicu, nulu ili treći element svakoj od atomičnih formula i koristeći operacije unije, preseka i ortokomplementa za definisanje, redom, disjunkcije, konjukcije i negacije, nazivamo *algebarskom interpretacijom u odnosu na tu Kleenejevu algebru* i skup svih takvih interpretacija *semantikom u odnosu na tu Kleenejevu algebru.*

Sledeća teorema nam govori da aksiome Kleenejeve algebre forsiraju K_3^S istinitosne tablice.

3.3.4 Teorema *Svaka trovalentna Kleenejeva algebra* $KA =< \{nula, jedinica, drugo\}, \cup, \cap, ', nula, jedinica >$ *generiše sledeće istinitosne tablice pri dodeljivanju* $nule, jedinice$ *i* $drugog$ *svakoj od atomičnih formula iskazne logike kada* $\cup, \cap$ *i ', respektivno, definišu operacije disjunkcije, konjukcije i negacije (pisaćemo n, j i d umesto* $nule, jedinice$ *i* $drugog$*):*

A	$\neg A$
j	n
d	d
n	j

$A \wedge B$

$A \backslash B$	j	d	n
j	j	d	n
d	d	d	n
n	n	n	n

$A \vee B$

$A \backslash B$	j	d	n
j	j	j	j
d	j	d	d
n	j	d	n

Pošto u sistemu K_3^S ne postoje tautologije sledi da nijedna formula iskazne logike nije tautologija nijedne trovalentne Kleenejeve algebre (napomenimo da je tautologija u algebarskom smislu formula koja uzima vrednost 1 u svakoj algebarskoj interpretaciji u odnosu na tu algebru).

Glava 4

Łukasiewiczeve logike L_n, L_∞

4.1 Definicije

Ponovimo ranije napisano (u drugoj glavi): u slučaju beskonačno mnogo istinitosnih vrednosti, obično se za skup istinitosnih vrednosti razmatraju sledeći prebrojiv skup i neprebrojiv skup:

$$\mathcal{W}_0 = \{x \in \mathbb{Q} \mid 0 \leq x \leq 1\}\ ^1 \text{ ili } \mathcal{W}_\infty = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\},$$

a u slučaju konačno mnogo istinitosnih vrednosti sledeći skup:

$$\mathcal{W}_n = \{\tfrac{k}{n-1} \mid 0 \leq k \leq n-1\}, \text{ za neki ceo broj } n \geq 2.$$

Prema tome, karakteristične matrice Łukasiewiczevih iskaznih sistema $L_\nu, \nu = 0, 3, 4, 5, ..., \infty$, su oblika

$$\mathcal{M}_{L_\nu} = (W_\nu, \{1\}, \neg, \Rightarrow).$$

U vezi odnosa skupova tautologija različitih Łukasiewiczevih logičkih sistema imamo sledeći interesantan rezultat (u kojem se koristi oznaka $taut_\nu$ za skup tautologija logičkog sistema L_ν):

4.1.1 Teorema *Za svako $m, n \in \mathbb{N}, m, n \geq 2$ važi:*

1.) $taut_m \subseteq taut_n$ akko $W_m \supseteq W_n$;
2.) $taut_m \subseteq taut_n$ akko $(n-1)|(m-1)$;
3.) $taut_m \not\subseteq taut_{m+1}$ i $taut_{m+2} \not\subseteq taut_{m+1}$;
4.) $taut_\infty = \bigcap_{m=3}^{\infty} taut_m$;
5.) $taut_\infty = taut_0$.

[1] Prilikom razvijanja koncepta beskonačnovrednosne logike, Łukasiewicz je, zapravo, razmatrao skup svih racionalnih brojeva iz [0,1] za istinitosne vrednosti, a ne realne brojeve iz [0,1]. Međutim, ispostavilo se da je skup tautologija dobijenih prilikom restrikovanja skupa istinitosnih vrednosti na samo racionalne brojeve iz [0,1] identičan skupu tautologija kada se realni brojevi iz [0,1] uzimaju za istinitosne vrednosti - ovo se tvrdi u 5. stavci teoreme 4.1.1.

Dakle, dovoljno je posmatrati samo jedan beskonačan Łukasiewiczev logički sistem. Najčešće se posmatra sistem L_∞ koji ćemo upravo i mi u nastavku izučavati.

Valuacija u L_∞ je svako preslikavanje $\tau : X \to \mathcal{W}_\infty$, gde je X skup iskaznih promenljivih. Ako $p \in X$, onda za $\tau(p)$ kažemo da je vrednost te iskazne promenljive u valuaciji τ. Interpretacija iskaznih formula za datu valuaciju τ jeste preslikavanje $v_\tau : Form \to \mathcal{W}_\infty$ koje je definisano na sledeći način - ako je p iskazna promenljiva iz X, A i B iskazne formule, onda je:

- $v_\tau(\neg A) = 1 - v_\tau(A)$
- $v_\tau(A \wedge B) = min(v_\tau(A), v_\tau(B))$;
- $v_\tau(A \vee B) = max(v_\tau(A), v_\tau(B))$;
- $v_\tau(A \Rightarrow B) = min(1, 1 - v_\tau(A) + v_\tau(B))$;
- $v_\tau(A \Leftrightarrow B) = min(1, 1 - v_\tau(A) + v_\tau(B), 1 - v_\tau(B) + v_\tau(A))$;
- $v_\tau(A \& B) = max(0, v_\tau(A) + v_\tau(B) - 1)$;
- $v_\tau(A \nabla B) = min(1, v_\tau(A) + v_\tau(B))$.

Za $v_\tau(A)$ kažemo da je *vrednost* formule u valuaciji τ odnosno interpretaciji v_τ. Ukoliko je $v_\tau(A) = 1$, kažemo da je formula A u toj valuaciji, odnosno interpretaciji, *tačna*, a ukoliko je $v_\tau(A) = 0$ da je *netačna*.

4.1.2 Primeri

- Formula $A \Rightarrow A$ je tautologija (kao što jeste i u L_3) jer je $min(1, 1 - v_\tau(A) + v_\tau(A)) = 1$ bez obzira na to koliko iznosi $v_\tau(A)$;
- Formula $A \nabla \neg A$ je tautologija jer je $min(1, v_\tau(A) + 1 - v_\tau(A)) = min(1, 1) = 1$;
- Formula $\neg(A \& \neg A)$ je tautologija jer je $1 - max(0, v_\tau(A) + 1 - v_\tau(A) - 1) = 1 - max(0, 0) = 1$;
- Formula $A \vee \neg A$ ima vrednost najmanje $\frac{1}{2}$ (ima upravo vrednost $\frac{1}{2}$ kada A uzima vrednost $\frac{1}{2}$) i isto važi za formulu $\neg(A \wedge \neg A)$;

Dakle, Zakon isključenja trećeg i Zakon neprotivrečnosti važe ukoliko ih formulišemo pomoću "jakih" veznika, ali ne važe ukoliko ih formulišemo pomoću "slabih" veznika.

Svi semantički rezultati o sistemu L_3, osim onih koji se tiču definabilnosti, prenose se na sistem L_∞ kada uzimamo "slabu" disjunkciju i "slabu" konjukciju za operacije disjunkcije i konjukcije.

Najpre, pošto je sistem L_∞ normalan (normalnost se definiše analogno kao za trovalentne logičke sisteme), kao i u slučaju sistema L_3, imamo sledeću teoremu.

4.1.3 Teorema *Svaka formula koja je tautologija u L_∞ je takođe tautologija u klasičnoj logici i svaka formula koja je kontradikcija u L_∞ je takođe kontradikcija u klasičnoj logici.*

4.1.4 Napomena Nije svaka formula koja je tautologija u klasičnoj logici, tautologija i u L_∞, i nije svaka formula koja je kontradikcija u klasičnoj logici, kontradikcija i u L_∞. Primeri su analogni onim koji su dati za L_3 u napomeni 3.2.3.

S obzirom da Lema normalnosti važi i za L_∞ (Lema normalnosti se formuliše analogno kao za trovalentne logičke sisteme), imamo, kao što smo imali za sisteme K_3^S i L_3 takođe, sledeću teoremu.

4.1.5 Teorema *Ako je* $\Sigma \models_{L_\infty} F$*, onda je* $\Sigma \models F$ *(tj. svaka logička posledica u* L_∞ *je takođe logička posledica u klasičnoj iskaznoj logici).*

4.1.6 Napomena Kontraprimer za suprotan smer prethodne teoreme analogan je odgovarajućem u K_3^S - primeru 3.1.6.

Pošto su "jaka" konjukcija i "jaka" disjunkcija normalni veznici, prethodne dve teoreme važe i kada njih zamenimo sa klasičnim veznicima. Kontraprimeri, u ovom slučaju, za suprotne smerove ovih dveju teorema su sledeći:

- $A \Rightarrow (A \& A)$ i $(A \nabla A) \Rightarrow A$ nisu tautologije u L_∞, dok $A \Rightarrow (A \wedge A)$ i $(A \vee A) \Rightarrow A$ jesu tautologije u klasičnoj logici.
- Argument

$$\frac{A \nabla A}{A}$$

nije ispravan u L_∞ (kada A ima vrednost $\frac{1}{2}$, premisa argumenta ima vrednost 1, dok zaključak ima vrednost $\frac{1}{2}$), a argument

$$\frac{A \vee A}{A}$$

jeste klasično ispravan.

S obzirom na to da je svaka istinitosna funkcija u L_3 takođe istinitosna funkcija u L_∞, imamo i sledeće:

4.1.7 Teorema *Svaka formula koja je tautologija u* L_∞ *je takođe tautologija u* L_3 *i svaka formula koja je kontradikcija u* L_∞ *je takođe kontradikcija u* L_3.[2]

4.1.8 Napomena Nije svaka formula koja je tautologija u L_3, tautologija i u L_∞, i nije svaka formula koja je kontradikcija u L_3, kontradikcija i u L_∞. Npr. formula $((A \Rightarrow \neg A) \Rightarrow A) \Rightarrow A$ je tautologija u L_3, ali nije tautologija u L_∞ (kada A uzima vrednost $\frac{7}{10}$, vrednost formule je takođe $\frac{7}{10}$).

[2] Primetimo da ne možemo zameniti "jak" veznik sistema L_∞ sa "slabim" veznikom sistema L_3 i očekivati da ćemo dobiti isti rezultat - npr. formula $A \nabla \neg A$ jeste tautologija u L_∞, ali $A \vee \neg A$ nije tautologija u L_3. Rezultat važi kad god koristimo tačno iste veznike, "slabe" ili "jake", i u L_∞ i u L_3.

- **ODLUČIVOST** Kod ranije viđenih sistema oko odlučivosti nismo se mnogo brinuli, jer smo kod njih mogli konstruisati istinitosne tablice koje će "odlučiti" status neke formule. Međutim taj postupak, naravno, u slučaju sistema L_∞ ne možemo primeniti. Pitanje je: postoji li neki drugi postupak ispitivanja odlučivosti koji bi se mogao primeniti na sistem L_∞? Odgovor je: POSTOJI!
  Zapravo više takvih postupaka je poznato, no, mi ćemo opisati postupak (predstavljen u [2]) Aguzzolija i Ciabattoni[3]: definiše se najpre sistem L_n za svaki ceo broj $n \geq 3$ (što smo mi i učinili). Sledeće, definiše se $\#O(A)$ kao broj pojavljivanja atomičnih formula u A (npr. $\#O(B)$ i $\#O(\neg B)$ su jednaki 1, $\#O(B \triangledown C)$ i $\#O(B \triangledown B)$ su jednaki 2). Aguzzoli i Ciabattoni su dokazali da formula A koja sadrži samo negaciju i "jaku" disjunkciju kao veznike jeste tautologija u L_∞ akko je A tautologija u L_n, gde je

  $$n = 2^{\#O(A)} + 1$$

  (npr. $B \triangledown \neg B$ je tautologija u L_∞ akko je tautologija u L_5 i $\neg B \vee (B \triangledown \neg C)$ je tautologija u L_∞ akko je tautologija u L_9). Imamo da je svaki skup tautologija u L_n odlučiv zbog mogućnosti konstruisanja istinitosnih tablica. Dalje, svaka formula u L_∞ može se preformulisati u ekvivalentnu formulu u L_∞ koja sadrži samo negacije i "jake" disjunkcije kao veznike. Prema tome, možemo odlučiti da li je formula A iz L_∞ tautologija preformulišući je u ekvivalentnu formulu B koja sadrži samo negacije i "jake" disjunkcije kao veznike i ispitujući odlučivost formule B u L_n, gde je $n = 2^{\#O(B)} + 1$.

- **DEFINABILNOST** 1951. godine McNaughton je dokazao da funkcija mora biti barem neprekidna da bi se mogla definisati u sistemu L_∞ i on je i dao karakterizaciju funkcija koje se mogu definisati u sistemu L_∞.
  Sistem L_∞ nije funkcionalno kompletan iz više razloga: normalan je sistem, pa veznike koji nisu normalni ne možemo definisati; postoji neprebrojivo mnogo funkcija sa konačnim brojem argumenata[4] koje se mogu definisati na [0,1], ali broj formula u sistemu L_∞ je prebrojiv; ne mogu se dobiti funkcije koje nisu neprekidne.

4.2 Aksiomatizacija logičkog sistema L_∞

U ovom odeljku ćemo predstaviti aksiomatski sistem, u oznaci $L_\infty A$, konstruisanog od strane Łukasiewicza za beskonačnovrednosnu logiku L_∞. $L_\infty A$ uključuje prve tri aksiome za $L_3 A$ i jednu novu:

$L_\infty 1.$ $A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$

$L_\infty 2$:$(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((B \Rightarrow C) \Rightarrow ((A \Rightarrow C))$

[3] Zapravo, Aguzzoli i Ciabattoni su dokazali samo "ako" smer teoreme, dok je drugi smer utvrđen u knjizi [1].

[4] Ovde nas za funkcionalnu kompletnost, kao i u klasičnom i trovalentnom sistemu, zanimaju samo fukcije sa konačnim brojem argumenata, zato što je svaka formula konačno dugačka i, očigledno, nijedna konačna formula ne može izraziti funkciju sa beskonačno mnogo argumenata.

$L_\infty 3$:$(\neg A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow (B \Rightarrow A)$

$L_\infty 4$:$((A \Rightarrow B) \Rightarrow B) \Rightarrow ((B \Rightarrow A) \Rightarrow A)$

Jedino pravilo izvođenja jeste modus ponens - $MP : \frac{A, A\Rightarrow B}{B}$

4.2.1 Napomena

- Aksioma $L_3 4$ iz $L_3 A$ nije tautologija u L_∞.
- Na osnovu definicije disjunkcije ($A \vee B =_{def} ((A \Rightarrow B) \Rightarrow B)$), $L_\infty 4$ se može preformulisati u formulu $(A \vee B) \Rightarrow (B \vee A)$ koja tvrdi da je disjunkcija komutativna operacija. Podsetimo se da smo ovu formulu dobili kao jedno od izvedenih pravila u $L_3 A$.
- S obzirom na to da, kao što smo ranije napomenuli, za svaki skup tautologija sistema L_n važi inkluzija $taut_\infty \subseteq taut_n$ očekivano je pretpostavljati da se nadogradnjom aksiomatskog sistema za L_∞ može dobiti aksiomatski sistem za L_n. Za formulaciju takvog aksiomatskog sistema su neophodne konačne iteracije veznika & i ∇. Stoga, za proizvoljnu familiju formula $A_1, A_2, A_3, ...$ definišu se rekurzivno:

  $$\Pi_{i=1}^{m+1} A_i =_{def} \Pi_{i=1}^{m} A_i \& A_{m+1}, \qquad \text{pri čemu je } \Pi_{i=1}^{1} A_i =_{def} A_i$$

  i

  $$\Sigma_{i=1}^{m+1} A_i =_{def} \Sigma_{i=1}^{m} A_i \nabla A_{m+1}, \qquad \text{pri čemu je } \Sigma_{i=1}^{1} A_i =_{def} A_i.$$

  Sada se pouzdan i kompletan aksiomatski sistem za L_n dobija od gorenavedenog za L_∞ dodajući mu još dve aksiome

  $$\Sigma_{i=1}^{n} A_i \Rightarrow \Sigma_{i=1}^{n-1} A_i$$

  i

  $$\Sigma_{i=1}^{n-1}(\Pi_{i=1}^{k} \nabla(\neg A_i \& \Sigma_{i=1}^{k-1} A_i)), \text{ za svako } 1 < k < n, \text{ pri čemu važi da } (k-1) \nmid (n-1).$$

Bilo koje izvođenje u sistemu $L_3 A$ koje ne uključuje $L_3 4$ jeste i izvođenje u sistemu $L_\infty A$ i bilo koje pravilo koje može da se izvede u $L_3 A$ bez korišćenja $L_3 4$ jeste izvedeno pravilo u $L_\infty A$ (tu spadaju npr. lema 3.2.12 ($\neg A \Rightarrow (A \Rightarrow B)$), izvedeno pravilo HS (Iz $A \Rightarrow B$ i $B \Rightarrow C$ sledi $A \Rightarrow C$)).
U nastavku ćemo pokazati kako se izvode pravila $\neg\neg A \Rightarrow A$ i $A \Rightarrow \neg\neg A$, no, najpre treba da izvedemo neka pomoćna pravila:

4.2.2 Lema $\vdash ((A \Rightarrow B) \Rightarrow C) \Rightarrow (\neg A \Rightarrow C)$

Dokaz. 1. $\neg A \Rightarrow (A \Rightarrow B)$.. lema 3.2.12
2. $(\neg A \Rightarrow (A \Rightarrow B)) \Rightarrow (((A \Rightarrow B) \Rightarrow C) \Rightarrow (\neg A \Rightarrow C))$.. $L_\infty 2$
3. $((A \Rightarrow B) \Rightarrow C) \Rightarrow (\neg A \Rightarrow C)$.. MP 1.2.
$\square$

4.2.3 Lema $\vdash A \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow B)$

Dokaz. 1. $A \Rightarrow ((B \Rightarrow A) \Rightarrow A)$.. $L_\infty 1$
2. $(B \Rightarrow A) \Rightarrow A) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow B)$.. $L_\infty 4$
3. $A \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow B)$ .... HS 2.1.
$\square$

4.2.4 Lema $\vdash (((B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)) \Rightarrow D) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow D)$

Dokaz. 1. $(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$.. $L_\infty 2$
2. $((A \Rightarrow B) \Rightarrow ((B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C))) \Rightarrow ((((B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)) \Rightarrow D) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow D))$.. $L_\infty 2$
3. $(((B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)) \Rightarrow D) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow D)$ .... MP 1.2.
$\square$

4.2.5 Lema $\vdash (A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((D \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow (D \Rightarrow C)))$

Dokaz. 1. $((((B \Rightarrow C) \Rightarrow (D \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow (D \Rightarrow C))) \Rightarrow ((D \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow (D \Rightarrow C)))) \Rightarrow ((A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((D \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow (D \Rightarrow C))))$.. lema 4.2.4
2. $(((B \Rightarrow C) \Rightarrow (D \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow (D \Rightarrow C))) \Rightarrow ((D \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow (D \Rightarrow C)))$ .... lema 4.2.4
3. $(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((D \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow (D \Rightarrow C)))$.. MP 2.1.
$\square$

4.2.6 Lema $\vdash (A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (B \Rightarrow (A \Rightarrow C))$

Dokaz. 1. $B \Rightarrow ((B \Rightarrow C) \Rightarrow C)$.. lema 4.2.3
2. $(B \Rightarrow ((B \Rightarrow C) \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (B \Rightarrow (A \Rightarrow C)))$.................. lema 4.2.5
3. $(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (B \Rightarrow (A \Rightarrow C))$.. MP 1.2.
$\square$

4.2.7 Lema $\vdash A \Rightarrow A$

Dokaz. 1. $(A \Rightarrow (B \Rightarrow A)) \Rightarrow (B \Rightarrow (A \Rightarrow A))$.. lema 4.2.6
2. $A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$.. $L_\infty 1$
3. $B \Rightarrow (A \Rightarrow A)$.. MP 2.1.
4. $(A \Rightarrow ((B \Rightarrow (A \Rightarrow A)) \Rightarrow A)) \Rightarrow ((B \Rightarrow (A \Rightarrow A)) \Rightarrow (A \Rightarrow A))$.................. lema 4.2.6
5. $A \Rightarrow ((B \Rightarrow (A \Rightarrow A)) \Rightarrow A)$.. $L_\infty 1$
6. $(B \Rightarrow (A \Rightarrow A)) \Rightarrow (A \Rightarrow A)$.. MP 5.4.
7. $A \Rightarrow A$.. MP 3.6.
$\square$

Sada, sa ovim izvedenim pravilima na raspolaganju izvodimo željena pravila.

4.2.8 Lema $\vdash \neg\neg A \Rightarrow A$

Dokaz. 1. $((\neg A \Rightarrow \neg(A \Rightarrow A)) \Rightarrow A) \Rightarrow (\neg\neg A \Rightarrow A)$.. lema 4.2.2
2. $(\neg A \Rightarrow \neg(A \Rightarrow A)) \Rightarrow ((A \Rightarrow A) \Rightarrow A)$.. $L_\infty 3$
3. $((\neg A \Rightarrow \neg(A \Rightarrow A)) \Rightarrow ((A \Rightarrow A) \Rightarrow A)) \Rightarrow ((A \Rightarrow A) \Rightarrow ((\neg A \Rightarrow \neg(A \Rightarrow A)) \Rightarrow A))$.. lema 4.2.6
4. $(A \Rightarrow A) \Rightarrow ((\neg A \Rightarrow \neg(A \Rightarrow A)) \Rightarrow A)$... MP 2.3.
5. $A \Rightarrow A$.. lema 4.2.7
6. $(\neg A \Rightarrow \neg(A \Rightarrow A)) \Rightarrow A$... MP 5.4.
7. $\neg\neg A \Rightarrow A$.. MP 6.1.
□

4.2.9 Lema $\vdash A \Rightarrow \neg\neg A$

Dokaz. 1. $\neg\neg\neg A \Rightarrow \neg A$... lema 4.2.8
2. $(\neg\neg\neg A \Rightarrow \neg A) \Rightarrow (A \Rightarrow \neg\neg A)$.. $L_\infty 3$
3. $A \Rightarrow \neg\neg A$ .... MP 1.2.
□

Podsetimo se "jaka" disjunkcija i "jaka" konjukcija su definisane na sledeći način:

$$A\&B =_{def} \neg(A \Rightarrow \neg B), \quad A \nabla B =_{def} \neg A \Rightarrow B$$

Znamo da je "jaka" verzija Zakona isključenja trećeg $A\nabla\neg A$ tautologija u L_∞ i ona se trivijalno izvodi u sistemu $L_\infty A$ preformulišući je u ekvivalentnu formulu $\neg A \Rightarrow \neg A$ koju direktno izvodimo koristeći lemu 4.2.7.
Takođe je "jaka" verzija Zakona neprotivrečnosti tautologija u L_∞ i ona se jednostavno izvodi u sistemu $L_\infty A$ preformulišući je u ekvivalentnu formulu $\neg\neg(A \Rightarrow \neg\neg A)$:

4.2.10 Lema $\vdash \neg\neg(A \Rightarrow \neg\neg A)$

Dokaz. 1. $(A \Rightarrow \neg\neg A) \Rightarrow \neg\neg(A \Rightarrow \neg\neg A)$... lema 4.2.9
2. $A \Rightarrow \neg\neg A$.. lema 4.2.9
3. $\neg\neg(A \rightarrow \neg\neg A)$.. MP 2.1.
□

Naposletku, dokažimo još dve jednostavne leme koje će nam biti od koristi u 6. glavi:

4.2.11 Lema $\vdash (B \Rightarrow C) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$

Dokaz. 1. $(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((B \Rightarrow C) \Rightarrow ((A \Rightarrow C))$... $L_\infty 2$
2. $((A \Rightarrow B) \Rightarrow ((B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C))) \Rightarrow ((B \Rightarrow C) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C)))$.. lema 4.2.6
3. $(B \Rightarrow C) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$.. MP 1.2.
□

4.2.12 Lema $\vdash (A \Rightarrow \neg\neg B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$

Dokaz. 1. $\neg\neg A \Rightarrow A$.. lema 4.2.8
2. $(\neg\neg A \Rightarrow A) \Rightarrow ((A \Rightarrow \neg\neg B) \Rightarrow (\neg\neg A \Rightarrow \neg\neg B))$.. $L_\infty 2$
3. $(A \Rightarrow \neg\neg B) \Rightarrow (\neg\neg A \Rightarrow \neg\neg B)$.. MP 1.2.
4. $((A \Rightarrow \neg\neg B) \Rightarrow (\neg\neg A \Rightarrow \neg\neg B)) \Rightarrow (((\neg\neg A \Rightarrow \neg\neg B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)) \Rightarrow ((A \Rightarrow \neg\neg B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)))$.. $L_\infty 2$
5. $((\neg\neg A \Rightarrow \neg\neg B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)) \Rightarrow ((A \Rightarrow \neg\neg B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A))$..................... MP 3.4.
6. $(\neg\neg A \Rightarrow \neg\neg B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$.. $L_\infty 3$
7. $(A \Rightarrow \neg\neg B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$.. MP 6.5.

□

4.2.13 Napomena U sistemu $L_\infty A$ se takođe mogu izvesti sledeća pravila i dokazati sledeće leme od kojih smo većinu izveli i dokazali u sistemu $L_3 A$:

- CON (Iz $\neg A \Rightarrow \neg B$ se izvodi zaključak $B \Rightarrow A$);

- Iz $(A \Rightarrow A) \Rightarrow B$ sledi B (lema 3.2.16);

- Iz $A \wedge B$ sledi A;

- Iz $A \wedge B$ sledi B;

- Iz $A \& B$ sledi A;

- Iz $A \& B$ sledi B;

- Iz A i B sledi $A \& B$;

- Iz A sledi $A \triangledown B$;

- Iz B sledi $A \triangledown B$;

- Iz $A \vee B$ sledi $A \triangledown B$;

- Iz $A \& B$ sledi $A \wedge B$;

- SUB (Iz pretpostavke da važe formule $A \Rightarrow B$, $B \Rightarrow A$ i formula C koja sadrži formulu A kao potformulu sledi da važi bilo koja formula C^* koja je rezultat zamene jednog ili više pojavljivanja formule A u C formulom B);

- MT (Iz $\neg A$ i $B \Rightarrow A$ se izvodi zaključak $\neg B$);

- DN (Iz bilo koje formule C koja sadrži formulu A kao potformulu sledi bilo koja formula C^* koja je rezultat zamene jednog ili više pojavljivanja formule A u C formulom $\neg\neg A$ i obratno);

- TRAN (Iz bilo koje formule C koja sadrži $A \Rightarrow (B \Rightarrow D)$ kao potformulu sledi bilo koja formula C^* koja je rezultat zamene jednog ili više pojavljivanja formule $A \Rightarrow (B \Rightarrow D)$ u C

formulom $B \Rightarrow (A \Rightarrow D)$);

- GCON (Iz bilo koje formule C koja sadrži $A \Rightarrow B$ kao potformulu sledi bilo koja formula C^* koja je rezultat zamene jednog ili više pojavljivanja formule $A \Rightarrow B$ u C formulom $\neg B \Rightarrow \neg A$ i obratno);

- Iz $\neg(A \Rightarrow B)$ sledi A (lema 3.2.22);

- Iz $\neg(A \Rightarrow B)$ sledi $\neg B$;

- GHS (Iz $(A_1 \Rightarrow (A_2 \Rightarrow (A_3 \Rightarrow ..... \Rightarrow (A_{n-1} \Rightarrow A_n).....)$ i $A_n \Rightarrow B$ sledi $(A_1 \Rightarrow (A_2 \Rightarrow (A_3 \Rightarrow ..... \Rightarrow (A_{n-1} \Rightarrow B).....).$);

- GMP (Iz $(A_1 \Rightarrow (A_2 \Rightarrow (A_3 \Rightarrow ..... \Rightarrow (A_{n-1} \Rightarrow A_n).....)$ i proizvoljnog antecedenta A_i, $1 \leq i \leq n-1$, sledi kondicional koji je rezultat brisanja A_i, kondicional koji sledi nakon A_i i pridružene zagrade);

- DS ($A \vee B, A \Rightarrow C, B \Rightarrow C \vdash C$);

- $\vdash (A \Rightarrow B) \vee (B \Rightarrow A)$ (lema 3.2.29).

Sledećim osobinama, a u isto vreme samo verzijama i smerovima jedne iste teoreme, *Teoreme kompletnosti*, Łukasiewiczeve logike L_∞ ćemo se posvetiti u 6. glavi te ćemo ih tamo i dokazati, a sada ih samo navodimo radi preglednosti i sticanja neke "velike slike".

- **POUZDANOST** Aksiomatski sistem $L_\infty A$ je pouzdan za L_∞ tj. važi:

  ako $\vdash F$, onda $\models F$ (svaka teorema u $L_\infty A$ je tautologija u L_∞)
  i
  ako $\Sigma \vdash F$, onda $\Sigma \models F$ (svaka formula koja se može izvesti iz skupa pretpostavki Σ je i semantička posledica skupa Σ).

- **SLABA KOMPLETNOST** Aksiomatski sistem $L_\infty A$ je slabo kompletan za L_∞ tj. važi:

  ako $\models F$, onda $\vdash F$ (svaka tautologija u L_∞ je teorema u $L_\infty A$).

- **JAKA KOMPLETNOST** Aksiomatski sistem $L_\infty A$ NIJE jako kompletan za L_∞ tj. NE važi:

  ako $\Sigma \models F$, onda $\Sigma \vdash F$ (svaka formula koja je semantička posledica skupa formula Σ može se i izvesti iz skupa Σ).

  Ali, ukoliko je skup Σ konačan skup, gornja implikacija važi.

  Nije problem u konkretnom sistemu $L_\infty A$, već, zapravo, nijedan pouzdan sistem za L_∞ ne može biti jako kompletan! Za sve te sisteme osobina jake kompletnosti nije zadovoljena u slučaju kada je skup Σ beskonačan skup.

4.2.14 Primer

$$\text{Neka je } \Sigma = \{\neg A \Rightarrow B, (\neg A \Rightarrow A) \Rightarrow B, (\neg A \Rightarrow (\neg A \Rightarrow A)) \Rightarrow B, (\neg A \Rightarrow (\neg A \Rightarrow (\neg A \Rightarrow A))) \Rightarrow B, (\neg A \Rightarrow (\neg A \Rightarrow (\neg A \Rightarrow (\neg A \Rightarrow A)))) \Rightarrow B, ...\}$$

(počevši od druge formule pa nadalje: antecedent svake sledeće formule je kondicional čiji je antecedent $\neg A$ i konsekvent je antecedent prethodne formule u nizu).
Pretpostavimo da su sve formule iz skupa Σ tačne i posmatrajmo različite vrednosti formule A. Ukoliko vrednost formule A iznosi 0, pretpostavka da je vrednost formule $\neg A \Rightarrow B$ jednaka 1 povlači da vrednost formule B mora biti 1. Ukoliko je vrednost formule A veća ili jednaka $\frac{1}{2}$, onda imamo da je vrednost formule $\neg A \Rightarrow A$ jednaka 1 pa ponovo pretpostavka da je vrednost formule $(\neg A \Rightarrow A) \Rightarrow B$ jednaka 1 povlači da vrednost formule B mora biti 1. Uopštenije, u L_∞, vrednost antecedenta n-tog člana beskonačnog niza formula $(\neg A \Rightarrow A) \Rightarrow B, (\neg A \Rightarrow (\neg A \Rightarrow A)) \Rightarrow B, (\neg A \Rightarrow (\neg A \Rightarrow (\neg A \Rightarrow A))) \Rightarrow B, (\neg A \Rightarrow (\neg A \Rightarrow (\neg A \Rightarrow (\neg A \Rightarrow A)))) \Rightarrow B, ...$ je minimum od 1 i n+1 puta vrednost formule A. Pa ako je vrednost formule A jednako m, pri čemu je $0 < m \leq 1$, tada za svako n (≥ 1) takvo da je $m \geq \frac{1}{n+1}$, vrednost antecedenta n-te formule jednaka je 1 pa i B mora imati vrednost 1. Pošto možemo da nađemo takvo n za svaku vrednost $m > 0$ koju A može imati i pošto smo pokazali da formula B mora imati vrednost 1 kad god formula A ima vrednost 0, sledi da formula B mora biti tačna kad god su sve formule iz skupa Σ tačne.
S druge strane, izvođenja su konačne dužine pa svako izvođenje formule B može sadržati samo konačno mnogo formula iz skupa Σ. Ali, formula B nije semantička posledica u L_∞ nijednog konačnog podskupa Ψ skupa Σ. Jasno, konačan podskup Ψ može sadržati samo konačno mnogo članova beskonačnog niza formula $(\neg A \Rightarrow A) \Rightarrow B, (\neg A \Rightarrow (\neg A \Rightarrow A)) \Rightarrow B, (\neg A \Rightarrow (\neg A \Rightarrow (\neg A \Rightarrow A))) \Rightarrow B, (\neg A \Rightarrow (\neg A \Rightarrow (\neg A \Rightarrow (\neg A \Rightarrow A)))) \Rightarrow B, ...$ Ako Ψ ne sadrži formulu $\neg A \Rightarrow B$, onda B može biti netačna kada su sve formule iz skupa Ψ tačne: ako formula A ima vrednost 0, onda su antecedenti svih formula iz skupa Ψ netačni pa su sve formule tačne čak i ako B ima vrednost 0. Ukoliko Ψ sadrži formulu $\neg A \Rightarrow B$, neka je k najveći broj članova niza koji se pojavljuje u Ψ; tj. k-ti član niza se pojavljuje u Ψ i nijedan član nakon njega se ne pojavljuje. Kad god je vrednost od A veća od 0, ali manja od $\frac{1}{k+1}$ moguće je da formula B bude netačna, dok su sve formule iz skupa Ψ tačne. Formula B može da bude netačna u ovom slučaju jer nijedan od antecedenata formula iz skupa Ψ neće biti tačan i da bi svi kondicionali iz skupa Ψ bili tačni, B treba da bude samo onoliko tačan koliko je tačan antecedent koji je najbliži bivanju tačan.
$L_\infty A$ je pouzdan sistem te ne može postojati izvođenje ukoliko ne postoji posledica. Prema tome, iz činjenice da B nije semantička posledica nijednog konačnog podskupa skupa Σ sledi da se B ne može izvesti iz konačnog podskupa u $L_\infty A$. S obzirom da je B semantička posledica beskonačnog skupa formula Σ, a ne postoji odgovarajuće izvođenje, $L_\infty A$ nije jako kompletan. Štaviše ovo rezonovanje pokazuje da

NE POSTOJI POUZDAN AKSIOMATSKI SISTEM ZA L_∞ KOJI BI MOGAO BITI I JAKO KOMPLETAN

- zato što smo razmatrali generalno izvođenja u pouzdanim sistemima, a ne specijalno izvođenja u sistemu $L_\infty A$.

- **KOMPAKTNOST** Primer koji smo koristili da pokažemo da ne postoji pouzdan aksiomatski sistem za L_∞ koji bi bio jako kompletan takođe pokazuje da relacija semantičke posledice u sistemu L_∞ NIJE kompaktna (podsetimo se: kompaktnost podrazumeva da, kad god je proizvoljna formula semantička posledica proizvoljnog beskonačnog skupa formula, onda je ta formula semantička posledica barem jednog konačnog podskupa tog beskonačnog skupa formula)[5]. Dakle, imamo:

L_∞ NIJE KOMPAKTAN PA SLEDI DA NIJEDAN AKSIOMATSKI SISTEM ZA L_∞ NE MOŽE BITI JAKO KOMPLETAN.

- **TEOREMA DEDUKCIJE** Teorema dedukcije ne važi za aksiomatski sistem $L_\infty A$, kao što nije važila ni za aksiomatski sistem L_3A. Zapravo, istim kontraprimerom se možemo poslužiti: kad god $A \wedge ((A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow (B \Rightarrow C)))$ ima vrednost 1 u L_∞ i formula C ima vrednost 1, ali formula $(A \wedge ((A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow (B \Rightarrow C)))) \Rightarrow C$ nije tautologija u L_∞. S obzirom da imamo pouzdanost i kompletnost argumenata sa konačnim brojem premisa, imamo da je formula C izvodiva iz $A \wedge ((A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow (B \Rightarrow C)))$ u L_∞, ali $(A \wedge ((A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow (B \Rightarrow C)))) \Rightarrow C$ nije teorema u ovom sistemu. No, sledeća teorema važi za $L_\infty A$:

  4.2.15 Teorema *(Modifikovana teorema dedukcije) B je izvodivo iz A u $L_\infty A$ akko je*

  $$A \Rightarrow (A \Rightarrow (A \Rightarrow (..... \Rightarrow (A \Rightarrow B).....)$$

  teorema za neki konačan broj antecedenata A[6]*.*

  Dokaz. Neka formula $A \Rightarrow (A \Rightarrow (A \Rightarrow (..... \Rightarrow (A \Rightarrow B).....)$ ima k antecedenata A.

  Smer ($\leftarrow$): Imajući formulu A kao hipotezu, primenjujući k puta uzastopno pravilo MP na $A \Rightarrow (A \Rightarrow (A \Rightarrow (..... \Rightarrow (A \Rightarrow B).....)$ izvodimo formulu B.
  Smer ($\rightarrow$): Pretpostavimo sada da postoji izvođenje formule B iz formule A i neka je odgovarajući dokazni niz:

  $$A_1, A_2, ..., A_n = B.$$

  Indukcijom po n dokažimo da je $\vdash A \Rightarrow (A \Rightarrow (A \Rightarrow (..... \Rightarrow (A \Rightarrow B).....)$.

---

[5] Napomenimo da se kompaktnost često, ekvivalentno, definiše pomoću pojma zadovoljivosti. Skup formula iskazne logike je zadovoljiv ako postoji barem jedna dodela istinitosnih vrednosti za koju su svi članovi skupa tačni. Logički sistem je zadovoljivo kompaktan akko važi sledeće za svaki skup formula Σ: Σ je zadovoljiv akko je svaki konačan podskup skupa Σ zadovoljiv. Ekvivalentnost definicija sledi iz činjenice da je formula B semantička posledica skupa Σ akko skup $\Sigma \cup \{\neg B\}$ nije zadovoljiv.

[6] Napomenimo da je ova teorema generalizacija Modifikovane teoreme dedukcije date ranije za aksiomatski sistem L_3A. Semantička verzija teoreme dedukcije za Łukasiewiczevu beskonačnovrednosnu logiku je dokazana u knjizi Pogorzelskog (Henry Andrew Pogorzelski (1922 - 2015) - američki matematičar) 1964. godine.

BI $n = 1$: Dokazni niz za B iz A ima samo jednu formulu, B, pa imamo dve mogućnosti:

a.) B je aksioma. Tada je dokazni niz za $\vdash A \Rightarrow (A \Rightarrow (A \Rightarrow (..... \Rightarrow (A \Rightarrow B).....)$. sledeći:

1. B.. redni broj aksiome
2. $B \Rightarrow (A \Rightarrow B)$... $L_\infty 1$
3. $A \Rightarrow B$... MP 1.2.
4. $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow (A \Rightarrow B))$.. $L_\infty 1$
5. $A \Rightarrow (A \Rightarrow B)$.. MP 3.4.
6. $(A \Rightarrow (A \Rightarrow B)) \Rightarrow (A \Rightarrow (A \Rightarrow (A \Rightarrow B)))$.. $L_\infty 1$

.
.
.
.
.

2k+1. $A \Rightarrow (A \Rightarrow (A \Rightarrow (..... \Rightarrow (A \Rightarrow B).....)$... MP 2k.2k-1.

b.) $B = A$. Tada je formula $A \Rightarrow (A \Rightarrow (A \Rightarrow (..... \Rightarrow (A \Rightarrow B).....)$ ustvari formula $A \Rightarrow (A \Rightarrow (A \Rightarrow (..... \Rightarrow (A \Rightarrow A).....)$. Znamo da je formula $A \Rightarrow A$ teorema te sledi da je posmatrana formula takođe teorema (dokazuje se, polazeći od $A \Rightarrow A$, naizmenično koristeći aksiomu $L_\infty 1$ i pravilo MP).

IH Pretpostavimo da je tvrđenje važi za sve formule čiji je dokaz dužine manje od n.

IK Neka je sada $A_1, A_2, ..., A_n = B$ dokazni niz za formulu B iz A. Tada za B imamo tri mogućnosti:

a.) B je aksioma.

b.) $B = A$.

Ova prva dva slučaja su ista kao u BI.

c.) B sledi iz ranijih formula u nizu na osnovu pravila MP, recimo iz formula A_i i $A_i \Rightarrow B$. Kako je formula A_i ranija u nizu, ima dokaz kraći od n, pa za nju važi IH. To znači da imamo $\vdash A \Rightarrow (A \Rightarrow (A \Rightarrow (..... \Rightarrow (A \Rightarrow A_i).....)$. Pošto imamo i $\vdash A_i \Rightarrow B$, koristeći pravilo GHS dobijamo željeno:

$\vdash A \Rightarrow (A \Rightarrow (A \Rightarrow (..... \Rightarrow (A \Rightarrow B).....)$. □

Glava 5

MV-algebre

Pojam MV-algebri uveden je od strane Changa 1958. godine tokom njegovog ispitivanja važenja teoreme kompletnosti za Łukasiewiczeve beskonačnovrednosne logike. Od podjednake su važnosti za Łukasiewiczevu beskonačnovrednosnu logiku kao što su Bulove algebre za klasičnu logiku. Zapravo, imaju važnu ulogu u algebarskom ispitivanju svih Łukasiewiczevih viševrednosnih logika i ispostavilo se da su interesantno povezane sa drugim strukturama takođe.

5.1 Definicije i osnovne osobine

Sledeća definicija, zapravo, nije data od strane Changa već predstavlja pojednostavljenu ekvivalentnu verziju Changove definicije, koju je formulisao Mangani 1973. godine.

5.1.1 Definicija *MV-algebra je algebra* $(A, \oplus, \neg, 0)$*, gde je* $\oplus$ *binarna operacija,* $\neg$ *unarna operacija i 0 konstanta, koja zadovoljava sledeće jednakosti za svako* x, y *i* $z \in A$*:*

$MV1.$ $x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$

$MV2.$ $x \oplus y = y \oplus x$

$MV3.$ $x \oplus 0 = x$

$MV4.$ $\neg\neg x = x$

$MV5.$ $x \oplus \neg 0 = \neg 0$

$MV6.$ $\neg(\neg x \oplus y) \oplus y = \neg(\neg y \oplus x) \oplus x$

5.1.2 Napomena Aksiome MV1-MV3. zajedno tvrde da je $(A, \oplus, 0)$ Abelov monoid.

MV-algebru nazivamo *netrivijalnom* ukoliko njen nosač ima više od jednog elementa.

5.1.3 Primeri

1. Singlton $\{0\}$ je primer trivijalne MV-algebre.

2. Posmatrajmo interval $[0,1] = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$ i za svako $x, y \in [0,1]$ definišimo

$$x \oplus y =_{def} min(1, x+y) \quad \text{i} \quad \neg x =_{def} 1 - x.$$

Tada je

$$[\mathbf{0}, \mathbf{1}] = ([0,1], \oplus, \neg, 0)$$

primer netrivijalne MV-algebre.

3. Ako je $(A, \vee, \wedge, -, 0, 1)$ Bulova algebra, tada je $(A, \vee, -, 0)$ primer još jedne netrivijalne MV-algebre, gde $\vee, -$ i 0, redom, označavaju uniju, komplement i najmanji element u skupu A.

5.1.4 Definicija *Podalgebra MV-algebre A je podskup S nosača A koji sadrži nulu skupa A, zatvoren je u odnosu na operacije nad skupom A i snabdeven restrikcijama tih operacija u odnosu na skup S.*

Presek proizvoljne neprazne familije podalgebri MV-algebre A je takođe podalgebra MV-algebre A.

5.1.5 Definicija *Neka je X podskup nosača MV-algebre A. Presek svih podalgebri od A koji sadrže skup X je podalgebra od A i naziva se najmanja podalgebra od A generisana skupom X.*

5.1.6 Primeri

1. Racionalni brojevi iz intervala $[0,1]$ i, za svaki ceo broj $n \geq 2$, n-elementni skup:

$$L_n =_{def} \{0, \tfrac{1}{n-1}, \tfrac{2}{n-1}....., \tfrac{n-2}{n-1}, 1\}$$

su primeri podalgrebri MV-algebre **[0,1]**.

2. Neka su dati MV-algebra A i skup X. Skup svih funkcija $f : X \to A$, koji obeležavamo sa A^X, postaje MV-algebra ako su operacije $\oplus, \neg$ i 0 definisane tačkasto. Neprekidne funkcije iz skupa $[0,1]$ u skup $[0,1]$ formiraju podalgebru MV-algebre $[\mathbf{0}, \mathbf{1}]^{[\mathbf{0},\mathbf{1}]}$.

Definišimo sada na svakoj MV-algebri A konstantu 1 i operacije $\odot$ i $\ominus$ na sledeći način:

$$1 =_{def} \neg 0 \qquad x \odot y =_{def} \neg(\neg x \oplus \neg y) \qquad x \ominus y =_{def} x \odot \neg y$$

MV-algebra je netrivijalna akko $0 \neq 1$. Sledeći identiteti su direktne posledice $MV4$:

$MV7$. $\neg 1 = 0$

$MV8.\ x \oplus y = \neg(\neg x \odot \neg y)$

$MV5.$ i $MV6.$ se sada mogu preformulisati na sledeći način:

$MV5'.\ x \oplus 1 = 1$

$MV6'.\ (x \ominus y) \oplus y = (y \ominus x) \oplus x$

Stavljajući $y = \neg 0$ u $MV6.$ dobijamo:

$MV9.\ x \oplus \neg x = 1$

Zapazimo da u MV-algebri $[\mathbf{0}, \mathbf{1}]$ imamo da je $x \odot y = max(0, x+y-1)$ i $x \ominus y = max(0, x-y)$.

5.1.7 Napomena Operacija $\neg$ ima prednost pri primenjivanju u odnosu na sve ostale operacije, a operacija $\odot$ u odnosu na operacije $\oplus$ i $\ominus$.

5.1.8 Lema *Neka je A MV-algebra i $x, y \in A$. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:*

a.) $\neg x \oplus y = 1$,

b.) $x \odot \neg y = 0$,

c.) $y = x \oplus (y \ominus x)$ *i*

d.) postoji elemenat $z \in A$ takav da je $x \oplus z = y$.

Dokaz. *a.)* $\Rightarrow$ *b.)* Pretpostavimo da je $\neg x \oplus y = 1$. Na osnovu MV4. i MV7. imamo da je $x \odot \neg y = \neg(\neg x \oplus \neg\neg y) = \neg(\neg x \oplus y) = \neg 1 = 0$.

b.) $\Rightarrow$ *c.)* Pretpostavimo da je $x \odot \neg y = 0$, što po definiciji znači da je $x \ominus y = 0$. Na osnovu MV2, MV3. i MV6'. imamo da je $y = 0 \oplus y = (x \ominus y) \oplus y = x \oplus (y \ominus x)$.

c.) $\Rightarrow$ *d.)* Pretpostavimo da je $y = x \oplus (y \ominus x)$. Očigledno je da je za $z = y \ominus x$ željena jednakost zadovoljena.

d.) $\Rightarrow$ *a.)* Neka je $x \oplus z = y$, za neko $z \in A$. Na osnovu MV9, MV2. i MV5. imamo da je $\neg x \oplus y = \neg x \oplus x \oplus z = 1 \oplus z = 1$. $\square$

Neka je A MV-algebra. Za proizvoljna dva elementa x i y iz A pisaćemo

$$x \leq y$$

akko x i y zadovoljavaju gorenavedene ekvivaletne uslove $a.) - d.)$. Sledi da je $\leq$ parcijalno uređenje tzv. *prirodno uređenje* na A. Zbilja, refleksivnost je ekvivaletna sa $MV9$, antisimetričnost sledi iz uslova $b.)$ i $c.)$ i tranzitivnost sledi iz uslova $d.)$.

MV-algebra čije je prirodno uređenje i totalno naziva se *MV-lanac*. Primetimo da se na osnovu uslova $d.)$ prirodno uređenje na MV-lancu $[\mathbf{0}, \mathbf{1}]$ poklapa sa prirodnim uređenjem realnih brojeva.

5.1.9 Lema *Neka je A MV-algebra. Za svako $a \in A$, $\neg a$ je jedinstveno rešenje x sledećih dveju jednačina*

$$a \oplus x = 1$$
$$i$$
$$a \odot x = 0.$$

Dokaz. Na osnovu $a.)$ i $b.)$ prethodne leme, ove dve jednačine skupa daju $\neg a \leq x \leq \neg a$, a odatle sledi da je $x = \neg a$.

□

5.1.10 Lema *U svakoj MV-algebri A prirodno uređenje $\leq$ ima sledeća svojstva:*

a.) $x \leq y$ akko $\neg y \leq \neg x$

b.) Ako je $x \leq y$, tada je za svako $z \in A$ $\quad x \oplus z \leq y \oplus z \quad i \quad x \odot z \leq y \odot z$

c.) $x \odot y \leq z$ akko je $x \leq \neg y \oplus z$

Dokaz. a.) Pretpostavimo da je $x \leq y$. Na osnovu uslova a.) leme 5.1.8 imamo da je $1 = \neg x \oplus y = \neg\neg y \oplus \neg x$ tj. $\neg y \leq \neg x$.

b.) Monotonost operacije $\oplus$ je posledica uslova d.) leme 5.1.8 , a koristeći upravo dokazano svojstvo a.) direktno se dobija i monotonost operacije $\odot$.

c.) $x \odot y \leq z$ je ekvivalentno sa $1 = \neg(x \odot y) \oplus z = \neg x \oplus \neg y \oplus z$ što je ekvivalentno sa $x \leq \neg y \oplus z$.

□

5.1.11 Propozicija *Na svakoj MV-algebri A prirodno uređenje određuje mrežnu strukturu, pri čemu su unija i presek elemenata x i y dati sa*

$$x \vee y = (x \odot \neg y) \oplus y = (x \ominus y) \oplus y$$
$$i$$
$$x \wedge y = \neg(\neg x \vee \neg y) = x \odot (\neg x \oplus y).$$

Dokaz. Da bismo dokazali prvu tvrdnju, uočimo da na osnovu $MV6'$, $MV9$. i uslova b.) prethodne leme imamo da je $x \leq (x \ominus y) \oplus y$ i $y \leq (x \ominus y) \oplus y$. Pretpostavimo da je $x \leq z$ i

$y \leq z$. Na osnovu uslova a.) i c.) leme 5.1.8 imamo da je $\neg x \oplus z = 1$ i $z = (z \ominus y) \oplus y$. Sada na osnovu $MV6'$. možemo pisati:

$$\neg((x \ominus y) \oplus y) \oplus z = (\neg(x \ominus y) \ominus y) \oplus y \oplus (z \ominus y) = (y \ominus \neg(x \ominus y)) \oplus \neg(x \ominus y) \oplus (z \ominus y) =$$

$$(y \ominus \neg(x \ominus y)) \oplus \neg x \oplus y \oplus (z \ominus y) = (y \ominus \neg(x \ominus y)) \oplus \neg x \oplus z = 1.$$

Sledi da je $(x \ominus y) \oplus y \leq z$, čime je dokazana prva tvrdnja. Sada se druga tvrdnja dobija direktno kao posledica upravo dokazanog i uslova a.) prethodne leme.

□

5.1.12 Propozicija *Sledeće jednakosti važe u svakoj MV-algebri:*

a.) $x \odot (y \vee z) = (x \odot y) \vee (x \odot z)$

b.) $x \oplus (y \wedge z) = (x \oplus y) \wedge (x \oplus z)$

Dokaz. Na osnovu $MV6'$. i uslova b.) prethodne leme imamo da je $x \odot y \leq x \odot (y \vee z)$ i da je $x \odot z \leq x \odot (y \vee z)$. Pretpostavimo da važi $x \odot y \leq t$ i $x \odot z \leq t$. Na osnovu uslova c.) prethodne leme važi $y \leq \neg x \oplus t$ (jer je $x \odot y$ ekvivaletno sa $y \odot x$ na osnovu komutativnosti operacije $\oplus$) i $z \leq \neg x \oplus t$ (jer je, takodje, $x \odot z$ ekvivaletno sa $z \odot x$), odakle dobijamo da je $y \vee z \leq \neg x \oplus t$. Još jedna primena uslova c.) prethodne leme daje $(y \vee z) \odot x \leq t$, čime je dokazan deo a.). Deo b.) se sada dobija kao posledica upravo dokazanog, uslova a.) prethodne leme, $MV4$. i $MV8$. □

5.1.13 Propozicija *Svaka MV-algebra zadovoljava jednakost* $(x \ominus y) \wedge (y \ominus x) = 0$.

Dokaz. Uzastopnim korišćenjem $MV6$. i njenih varijanti zajedno sa osnovnim svojstvima operacija $\oplus$ i $\odot$ dobijamo:

$$(x \ominus y) \wedge (y \ominus x) = (x \ominus y) \odot (\neg(x \ominus y) \oplus (y \ominus x)) = x \odot \neg y \odot (y \oplus \neg x \oplus (y \ominus x)) = x \odot (\neg x$$

$$\oplus (y \ominus x)) \odot (\neg(\neg x \oplus (y \ominus x)) \oplus \neg y) = (y \ominus x) \odot (\neg(y \ominus x) \oplus x) \odot (\neg(\neg x \oplus (y \ominus x)) \oplus \neg y) =$$

$$y \odot \neg x \odot (\neg(y \ominus x) \oplus x) \odot ((x \odot \neg(y \ominus x)) \oplus \neg y) = \neg x \odot (x \oplus \neg(y \ominus x)) \odot y \odot (\neg y \oplus (x \odot (\neg y \oplus x))) =$$

$\neg x \odot (x \oplus \neg(y \ominus x)) \odot (x \odot (\neg y \oplus x)) \odot (\neg(x \odot (\neg y \oplus x)) \oplus y) = 0$ jer je, na osnovu $MV8$. i $MV9$, $\neg x \odot x = 0$.

□

Neka je A MV-algebra. Za svako $x \in A$ definišimo

$$0x = 0$$
i
$$\text{za svaki ceo broj } n \geq 0, \quad (n+1)x = nx \oplus x.$$

5.1.14 Lema *Neka su x i y proizvoljni elementi MV-algebre A. Ako je $x \wedge y = 0$, tada je, za svaki ceo broj $n \geq 0$, $nx \wedge ny = 0$.*

Dokaz. Ako važi $x \wedge y = 0$, tada na osnovu monotonosti (lema 5.1.10) i distributivnosti (propozicija 5.1.12) imamo da je $x = x \oplus (x \wedge y) = (x \oplus x) \wedge (x \oplus y) \geq 2x \wedge y$, odakle sledi da je $0 = x \wedge y \geq 2x \wedge y$. Sledi da važi $0 = 2x \wedge 2y = 4x \wedge 4y = 8x \wedge 8y = ...$ Željeni rezultat sada sledi iz $nx \wedge ny \leq 2^n x \wedge 2^n y = 0$. □

5.2 Teorema reprezentacije poddirektnosti

5.2.1 Definicija *Neka su A i B MV-algebre. Funkciju $h : A \rightarrow B$ nazivamo homomorfizmom akko zadovoljava sledeće uslove za svako $x, y \in A$:*

H1. $h(0) = 0$;

H2. $h(x \oplus y) = h(x) \oplus h(y)$;

H3. $h(\neg x) = \neg h(x)$.

Ukoliko je funkcija h i "1-1" nazivamo je monomorfizmom (ili utapanjem), ukoliko je i "na" epimorfizmom (ili samo: homomorfizmom koji je "na"), a ukoliko je i "1-1" i "na" izomorfizmom (pisaćemo $A \cong B$ akko postoji izomorfizam između A i B).
Jezgro homomorfizma $h : A \rightarrow B$ je skup $Ker(h) =_{def} h^{-1}(0) = \{x \in A \mid h(x) = 0\}$.

5.2.2 Definicija *Ideal MV-algebre A je podskup I nosača MV-algebre A koji zadovoljava sledeće uslove:*

I1. $0 \in I$;

I2. Ako $x \in I$, $y \in A$ i $y \leq x$ tada $y \in I$;

I3. Ako $x \in I$ i $y \in I$ tada $x \oplus y \in I$.

Presek proizvoljne familije ideala MV-algebre A je takođe ideal MV-algebre A. Za svaki podskup $W \subseteq A$, presek svih ideala $I \supseteq W$ je ideal generisan sa W i obeležavaćemo ga sa $< W >$.

5.2.3 Lema *Neka je W podskup MV-algebre A. Ako je $W = \emptyset$, tada je $< W >= \{0\}$, a ako je $W \neq \emptyset$, tada je*

$$< W >= \{x \in A \mid x \leq w_1 \oplus w_2 \oplus ..... \oplus w_k \text{ za neke } w_1, w_2, ..., w_k \in W\}.$$

5.2.4 Definicija *Za svaki element x MV-algebre A, ideal $< x >=< \{x\} >$ se naziva glavni ideal generisan sa x i važi*

$$< x >= \{a \in A \mid nx \geq a \text{ za neki ceo broj } n \geq 0\}.$$

5.2.5 Napomena Uočimo da je $< 0 >= \{0\}$, $< 1 >= A$ i za svaki ideal I MV-algebre A i za svako $x \in A$ imamo da je $< I \cup \{x\} >= \{a \in A \mid a \leq nx \oplus i$ za neko $n \in \mathbb{N}$ i $i \in I\}$.

5.2.6 Definicija

- *Ideal I MV-algebre A je pravi akko je $I \neq A$.*
- *Ideal I je prost akko je pravi i zadovoljava sledeći uslov: za svako $x, y \in A$, ili $x \ominus y \in I$ ili $y \ominus x \in I$.*
- *Ideal I MV-algebre A je maksimalan akko je pravi i nijedan drugi pravi ideal MV-algebre A ne sadrži strogo I, tj. za svaki ideal $J \neq I$, ako je $I \subseteq J$, tada je $J = A$.*

Sa $I(A)$ ćemo obeležavati skup svih ideala, a sa $P(A)$ skup svih prostih ideala MV-algebre A.

U sledećoj lemi dajemo nekoliko relacija između ideala i jezgra homomorfizma, koje će biti korisne za dokazivanje nekih budućih teorema.

5.2.7 Lema *Neka su A i B MV-algebre i $h : A \to B$ homomorfizam. Tada važe sledeća tvrđenja:*

a.) Za svaki ideal J MV-algebre B skup $h^{-1}(J) =_{def} \{x \in A \mid h(x) \in J\}$ je ideal MV-algebre A. Prema tome, istaknimo: $Ker(h) \in I(A)$;

b.) $h(x) \leq h(y)$ akko $x \ominus y \in Ker(h)$;

c.) h je injektivno akko $Ker(h) = \{0\}$;

d.) $Ker(h) \neq A$ akko je B netrivijalna MV-algebra;

e.) $Ker(h) \in P(A)$ akko je B netrivijalna MV-algebra i slika $h(A)$, kao podalgebra MV-algebre B, je MV-lanac.

5.2.8 Definicija *Funkcija rastojanja $d : A \times A \to A$ definisana je na sledeći način:*

$$d(x, y) =_{def} (x \ominus y) \oplus (y \ominus x).$$

U MV-algebri **[0,1]** je $d(x, y) = |x - y|$.

5.2.9 Propozicija *U svakoj MV-algebri A važi:*

1.) $d(x, y) = 0$ akko $x = y$;

2.) $d(x, y) = d(y, x)$;

3.) $d(x, z) \leq d(x, y) \oplus d(y, z)$;

4.) $d(x, y) = d(\neg x, \neg y)$;

5.) $d(x \oplus s, y \oplus t) \leq d(x, y) \oplus d(s, t)$.

Kao direktnu posledicu imamo sledeću propoziciju.

5.2.10 Propozicija *Neka je I ideal MV-algebre A. Tada je binarna relacija $\equiv_I$ na A, definisana sa $x \equiv_I y$ akko $d(x,y) \in I$, relacija kongruencije. (Drugim rečima, $\equiv_I$ je relacija ekvivalencije takva da pretpostavka da važe $x \equiv_I s$ i $y \equiv_I t$ implicira da važe $\neg x \equiv_I \neg s$ i $x \oplus y \equiv_I s \oplus t$.) Štaviše, $I = \{x \in A \mid x \equiv_I 0\}$.*
Obratno, ako je $\equiv$ relacija kongruencije na A, tada je $\{x \in A \mid x \equiv 0\}$ ideal i važi $x \equiv y$ akko $d(x,y) = 0$. Prema tome, korespodencija $I \rightarrow \equiv_I$ je bijekcija iz skupa ideala MV-algebre A na skup kongruencija na A.

Za proizvoljno $x \in A$, klasa ekvivalencije elementa x s obzirom na relaciju $\equiv_I$ označava se sa x/I, a količnički skup $A/\equiv_I$ sa A/I. S obzirom na to da je $\equiv_I$ kongruencija, definisanjem sledećih operacija na skupu A/I :

$$\neg(x/I) =_{def} \neg x/I \quad \text{i} \quad x/I \oplus y/I =_{def} (x \oplus y)/I,$$

sistem $(A/I, \oplus, \neg, 0/I)$ postaje MV-algebra tzv. *količnička algebra* MV-algebre A u odnosu na ideal I.
Povrh toga, korespodencija $x \rightarrow x/I$ definiše homomorfizam h_I iz A na količničku algebru A/I, koji se naziva *prirodni homomorfizam* iz A na A/I. Primetimo da je $Ker(h_I) = I$.

5.2.11 Lema *Ako su A, B i C MV-algebre i ako su $f : A \rightarrow B$ i $g : A \rightarrow C$ homomorfizmi koji su "na", tada je $Ker(f) \subseteq Ker(g)$ akko postoji homomorfizam koji je "na" $h : B \rightarrow C$ tako da je $h \circ f = g$ tj. $h(f(x)) = g(x)$ za svako $x \in A$. Ovaj homomorfizam h je izomorfizam akko je Ker(f)=Ker(g).*

Uočavanjem da je $Ker(h) = Ker(h_{Ker(h)})$, dobija se sledeća teorema.

5.2.12 Teorema *Neka su A i B MV-algebre. Ako je $h : A \rightarrow B$ homomorfizam koji je "na", onda postoji izomorfizam $f : A/Ker(h) \rightarrow B$, tako da je $f(x/Ker(h)) = h(x)$ za svako $x \in A$.*

Sledeća propozicija, tačnije, posledica sledeće propozicije, odigraće veliku ulogu u dokazu Changove teoreme reprezentacije poddirektnosti.

5.2.13 Propozicija *Neka je A MV-algebra, J ideal MV-algebre A i $a \in A \setminus J$. Tada postoji prost ideal P MV-algebre A, tako da je $J \subseteq P$ i $a \notin P$.*

Dokaz. Na osnovu Zornove[1] leme[2] uviđamo da postoji ideal I MV-algebre A koji je maksimalan u odnosu na svojstvo $J \subseteq I$ i $a \notin I$. Pokazaćemo da je I prost ideal. Neka $x, y \in A$ i pretpostavimo da $x \ominus y \notin I$ i $y \ominus x \notin I$. Tada ideal generisan sa I i $x \ominus y$ mora sadržati element a. Na osnovu napomene 5.2.5 sledi da je $a \leq s \oplus p(x \ominus y)$, za neko $s \in I$ i neki ceo broj $p \geq 1$. Slično, postoje element $t \in I$ i ceo broj $q \geq 1$, tako da je $a \leq t \oplus q(y \ominus x)$.
Neka je $u = s \oplus t$ i $n = max(p,q)$. Tada imamo da $u \in I$, $a \leq u \oplus n(x \ominus y)$ i $a \leq u \oplus n(y \ominus x)$. Stoga, na osnovu propozicija 5.1.11 i 5.1.13 zajedno sa propozicijom 5.1.12 b.) i lemom 5.1.14, imamo da je $a \leq (u \oplus n(x \ominus y)) \wedge (u \oplus n(y \ominus x)) = u \oplus (n(x \ominus y) \wedge n(y \ominus x)) = u$, odakle, na osnovu definicije ideala, sledi da $a \in I$, što je kontradikcija. □

[1] Max Zorn (1906 - 1993) - američki matematičar nemačkog porekla
[2] *Ako je $(P, \leq)$ parcijalno uredjen skup u kome svaki lanac ima gornje ograničenje, onda u P postoji maksimalan elemenat.*

5.2.14 Posledica *Svaki pravi ideal MV-algebre je presek prostih ideala.*

Neka je I neprazan skup.

5.2.15 Definicija *Direktni proizvod familije MV-algebri $\{A_i\}_{i\in I}$, koji ćemo obeležavati sa $\Pi_{i\in I}A_i$, je MV-algebra čiji je nosač skup svih funkcija $f : I \to \bigcup_{i\in I} A_i$ takvih da je $f(i) \in A_i$ za svako $i \in I$, sa operacijama $\neg$ i $\oplus$ definisanim na sledeći način:*

$$(\neg f)(i) =_{def} \neg f(i) \quad i \quad (f \oplus g)(i) =_{def} f(i) \oplus g(i).$$

Nula element je funkcija $i \in I \to 0_i \in A_i$.

Za svako $j \in I$, preslikavanje $\pi_j : \Pi_{i\in I}A_i \to A_j$ definisano je sa:

$$\pi_j(f) =_{def} f(j).$$

Svaka funkcija π_j je homomorfizam na A_j, koja se naziva *j-ta projekcija*. Posebno, za svaku MV-algebru A i neprazan skup X, MV-algebra A^X je direktan proizvod familije $\{A_x\}_{x\in X}$, gde je $A_x = A$ za svako $x \in X$.

5.2.16 Definicija *MV-algebra A je poddirektni proizvod familije MV-algebri $\{A_i\}_{i\in I}$ akko postoji monomorfizam $h : A \to \Pi_{i\in I}A_i$ tako da je, za svako $j \in I$, kompozicija preslikavanja $\pi_j \circ h$ homomorfizam na A_j.*

Ako je A poddirektni proizvod familije $\{A_i\}_{i\in I}$, tada je A izomorfno podalgebri $h(A)$ proizvoda $\Pi_{i\in I}A_i$; štaviše, restrikcija na $h(A)$ svake projekcije je surjektivno preslikavanje.

5.2.17 Teorema *MV-algebra A je poddirektni proizvod familije MV-algebri $\{A_i\}_{i\in I}$ akko postoji familija ideala $\{J_i\}_{i\in I}$ MV-algebre A tako da je*

1.) $A_i \cong A/J_i$ za svako $i \in I$ i

2.) $\bigcap_{i\in I} J_i = \{0\}$.

Dokaz. Pretpostavimo prvo da je A poddirektni proizvod familije MV-algebri $\{A_i\}_{i\in I}$. Neka je $h : A \to \Pi_{i\in I}A_i$ monomorfizam dat u prethodnoj definiciji; za svako $j \in I$ neka je $J_j = Ker(\pi_j \circ h)$. Na osnovu teoreme 5.2.12, sledi da je $A_j \cong A/J_j$. Ako $x \in \bigcap_{i\in I} J_i$, tada je $\pi_j(h(x)) = 0$ za svako $j \in I$. To implicira da je $h(x) = 0$ i, s obzirom da je h injektivno, dobijamo da je $x = 0$. Prema tome, $\bigcap_{i\in I} J_i = \{0\}$ - uslovi 1.) i 2.) su ispunjeni.

Obratno, pretpostavimo da je $\{J_i\}_{i\in I}$ familija ideala MV-algebre A koja zadovoljava uslove 1.) i 2.). Neka je ϵ_i izomorfizam A/J_i na A_i, za koji znamo da postoji na osnovu uslova 1.). Neka je funkcija $h : A \to \Pi_{i\in I}A_i$ definisana tako da je, za svako $x \in A$, $(h(x))(i) = \epsilon_i(x/J_i)$. Iz uslova 2.) sledi da je $Ker(h) = \{0\}$, odakle, na osnovu leme 5.2.7 c.), sledi da je h injektivno. Pošto je, za svako $i \in I$, preslikavanje $a \in A \to a/J_i \in A/J_i$ surjektivno, sledi da $\pi_i \circ h$ preslikava A na A_i. Prema tome, A je poddirektni proizvod familije $\{A_i\}_{i\in I}$, što je i trebalo dokazati. $\square$

Sledeći rezultat je ključni.

5.2.18 Teorema *(Changova teorema reprezentacije poddirektnosti) Svaka netrivijalna MV-algebra je poddirektni proizvod MV-lanaca.*

Dokaz. Na osnovu prethodne teoreme i leme 5.2.7 e.), znamo da je MV-algebra A poddirektni proizvod familije MV-lanaca akko postoji familija prostih ideala $\{P_i\}_{i\in I}$ MV-algebre A tako da je $\bigcap_{i\in I} P_i = \{0\}$. Sada, primenjujući posledicu 5.2.14 na ideal $\{0\}$ dobijamo traženo. □

5.3 Zadovoljivost MV-identiteta

5.3.1 Definicija *Pod nizom (ili rečju) nad nepraznim skupom S podrazumevamo konačnu listu elemenata iz S.*

5.3.2 Definicija *Za svako $t \in \mathbb{N}$, neka je $S_t =_{def} \{0, \neg, \oplus, x_1, x_2, ..., x_t, (,)\}$. MV-term po promenljivama $x_1, x_2, ..., x_t$ je reč nad S_t koja nastaje primenom, konačno mnogo puta, sledećih pravila:*

T1. Elementi 0 i x_i, $i = 1, 2, ..., t$ posmatrani kao jednoelemente reči su MV-termi;

T2. Ako je reč τ MV-term, tada je i $\neg\tau$ MV-term;

T3. Ako su reči τ i σ MV-termi, tada je i $(\tau \oplus \sigma)$ MV-term.

Drugim rečima, reč τ nad S_t je MV-term akko postoji *formacioni niz* za τ, tj. ako postoji konačna lista reči nad S_t, recimo $\tau_1, \tau_2, ..., \tau_n$, tako da je $\tau_n = \tau$ i za svako $i \in \{1, 2, ..., n\}$, τ_i zadovoljava barem jedan od sledećih uslova:

1.) $\tau_i = 0$ ili $\tau_i = x_j$ za neko $1 \leq j \leq t$;

2.) postoji $j < i$ tako da je $\tau_i = \neg\tau_j$;

3.) postoje $j < i$ i $k < i$ tako da je $\tau_i = (\tau_j \oplus \tau_k)$.

One reči τ_i koje pripadaju svakom formacionom nizu za τ nazivamo *podtermima* od τ.

5.3.3 Teorema *(Teorema jedinstvene čitljivosti[3]) Svaki term τ_i po promenljivama $x_1, x_2, ...$ $, x_n$ zadovoljava tačno jedan od gorenavedenih uslova 1.), 2.) i 3.). Povrh toga, i term τ_j iz uslova 2.) i par (τ_j, τ_k) iz uslova 3.) jedinstveno su određeni.*

5.3.4 Napomena Nadalje ćemo ćemo pisati $\tau(x_1, x_2, ..., x_n)$ za označavanje osobine da je τ MV-term po promenljivama $x_1, x_2, ..., x_n$.

5.3.5 Primeri Sledeći nizovi su primeri MV-terma po promenljivama x_1, x_2, x_3: $(\neg 0 \oplus x_1)$, $((x_2 \oplus 0) \oplus \neg(x_3 \oplus x_1))$ i $(x_2 \oplus \neg x_1)$.

[3] engl. *Unique readability theorem*

5.3.6 Definicija *Neka je A MV-algebra,* τ *MV-term po promenljivama* $x_1, x_2, ..., x_t$ *i pretpostavimo da su* $a_1, a_2, ..., a_t$ *elementi MV-algebre A. Zamenjujući sva pojavljivanja elementa* x_i *u* τ *za svako* $i = 1, 2, ..., t$ *elementom* $a_i \in A$ *koristeći prethodnu teoremu i interpretirajući simbole 0,* $\oplus$ *i* $\neg$ *kao odgovarajuće operacije u A, dobijamo element MV-algebre A koji označavamo sa* $\tau^A(a_1, a_2, ..., a_t)$.

Tačnije, na osnovu indukcije po broju pojavljivanja simbola operacija u τ, definišemo $\tau^A(a_1, a_2, ..., a_t)$ na sledeći način:

1.) $x_i^A = a_i$ za svako $i = 1, 2, ..., t$;

2.) $(\neg\sigma)^A = \neg(\sigma^A)$;

3.) $(\sigma \oplus \rho)^A = (\sigma^A \oplus \rho^A)$.

Na osnovu prethodne definicije sledi da ukoliko imamo proizvoljnu MV-algebru A, svakom MV-termu τ po promenljivama $x_1, x_2, ..., x_n$ možemo pridružiti funkciju $\tau^A : A^n \to A$. Funkcije koje dobijamo na ovaj način nazivamo *term-funkcijama* na A.

5.3.7 Definicija *MV-identitet po promenljivama* $x_1, x_2, ..., x_t$ *je par* (τ, σ) *MV-terma po promenljivama* $x_1, x_2, ..., x_t$.

5.3.8 Napomena

- Pisaćemo $\tau = \sigma$ umesto (τ, σ). MV-algebra A *zadovoljava* MV-identitet $\tau = \sigma$, što ćemo obeležavati sa $A \models \tau = \sigma$, akko je
$$\tau^A(a_1, a_2, ..., a_t) = \sigma^A(a_1, a_2, ..., a_t),$$
za svako $a_1, a_2, ..., a_t \in A$.
- Aksiome MV1-MV6. su primeri MV-identiteta po promenljivama x, y i z. Po definiciji, te identitete zadovoljavaju sve MV-algebre.
- MV-identitet $\tau = \sigma$ važi u MV-algebri A akko identitet $(\tau \ominus \sigma) \oplus (\sigma \ominus \tau) = 0$ važi u A. Prema tome, možemo sa sigurnošću smatrati da su svi MV-identiteti oblika $\rho = 0$, gde je ρ MV-term.

5.3.9 Lema *Neka su A, B i* A_i *(za svako* $i \in I$*) MV-algebre. Tada:*

a.) Ako je $A \models \tau = \sigma$*, tada je* $S \models \tau = \sigma$ *za svaku podalgebru S MV-algebre A;*

b.) Ako je $h : A \to B$ *homomorfizam, tada za svaki MV-term* τ *po promenljivama* $x_1, x_2, ...,$ x_s *i svaku s-torku* $(a_1, a_2, ..., a_s)$ *elemenata iz A imamo da važi*
$$\tau^B(h(a_1), h(a_2), ..., h(a_s)) = h(\tau^A(a_1, a_2, ..., a_s)).$$
Posebno, kada h preslikava A na B, iz $A \models \tau = \sigma$ *sledi* $B \models \tau = \sigma$*;*

c.) Ako je $A_i \models \tau = \sigma$ *za svako* $i \in I$*, tada je* $\Pi_{i \in I} A_i \models \tau = \sigma$.

Dokaz. *a.*) i *b.*) se direktno dobijaju. Što se tiče *c.*), neka su $f_1, f_2, ..., f_s \in A = \Pi_{i \in I} A_i$. Na osnovu pretpostavke, za svako $i \in I$ možemo pisati:

$$\tau^A(f_1, f_2, ..., f_s)(i) = \tau^{A_i}((f_1(i), f_2(i), ..., f_s(i)) = \sigma^{A_i}((f_1(i), f_2(i), ..., f_s(i)) =$$

$\sigma^A(f_1, f_2, ..., f_s)(i)$, odakle sledi da je $\tau^A(f_1, f_2, ..., f_s) = \sigma^A(f_1, f_2, ..., f_s)$. □

5.3.10 Teorema *Neka je A poddirektni proizvod familije MV-algebri $\{A_i\}_{i \in I}$ i neka je $\tau = \sigma$ MV-identitet. Tada je $A \models \tau = \sigma$ akko je $A_i \models \tau = \sigma$ za svako $i \in I$.*

Dokaz. Neka je $h : A \to \Pi_{i \in I} A_i$ monomorfizam (dat u nekoj od prethodnih definicija). Pretpostavimo da je $A \models \tau = \sigma$. S obzirom da je, za svako $i \in I$, $\pi \circ h$ preslikavanje A na A_i, sledi da je $A_i \models \tau = \sigma$.

Obratno, pretpostavimo da je $A_i \models \tau = \sigma$, za svako $i \in I$. Na osnovu prethodne leme, imamo da je $\Pi_{i \in I} A_i \models \tau = \sigma$ i, pošto je $h(A)$ podalgebra od $\Pi_{i \in I} A_i$, sledi da je $h(A) \models \tau = \sigma$. Pošto h^{-1} preslikava $h(A)$ na A, zaključujemo da je $A \models \tau = \sigma$. □

5.3.11 Posledica *MV-identitet zadovoljavaju sve MV-algebre akko ga zadovoljavaju svi MV-lanci.*

Dokaz. Pretpostavimo da MV-identitet $\tau = \sigma$ zadovoljavaju svi MV-lanci i neka je A MV-algebra. Ako je $A = \{0\}$, tada je, trivijalno, $\tau^A(0, 0, ..., 0) = 0 = \sigma^A(0, 0, ..., 0)$, odakle je $A \models \tau = \sigma$. Ako je A netrivijalna MV-algebra, traženi rezultat dobija se pomoću Changove teoreme reprezentacije poddirektnosti i prethodne teoreme. □

Dakle, jednakosna teorija MV-algebri poklapa se sa jednakosnom teorijom MV-lanaca.

Glava 6

Kompletnost Łukasiewiczeve logike L_∞

6.0.1 Definicija *Neka je A MV-algebra.*

- *A-valuacija je funkcija* $\nu : Form \to A$ *koja zadovoljava sledeća dva uslova, pri čemu su F i G proizvoljne formule:*

  1.) $\nu(\neg F) =_{def} \neg \nu(F)$ *i*

  2.) $\nu(F \Rightarrow G) =_{def} \nu(F) \Rightarrow \nu(G)$.

- *A-valuacija* ν *A-zadovoljava formulu F akko je* $\nu(F) = 1$.
- *Formula F je A-tautologija akko je A-zadovoljavaju sve A-valuacije.*
- *Formule F i G su semantički A-ekvivalentne akko je* $\nu(F) = \nu(G)$ *za sve A-valuacije* ν. *Na osnovu 2.) imamo da su formule F i G A-ekvivalentne akko su formule* $F \Rightarrow G$ *i* $G \Rightarrow F$ *A-tautologije.*
- *Neka je* Σ *skup formula. Kažemo da je formula F semantička A-posledica skupa* Σ *akko svaka A-valuacija* ν *koja A-zadovoljava sve formule skupa* Σ*, takođe A-zadovoljava formulu F. Posebno, formula F je A-tautologija akko je semantička A-posledica praznog skupa formula.*

6.0.2 Napomena U nastavku ćemo sa $Var(F)$ obeležavati skup svih iskaznih promenljivih koje se pojavljuju u formuli F.

Svaka formula F koja sadrži promenljive $x_1, x_2, ..., x_t$ se koristeći

$$x \oplus y =_{def} \neg x \Rightarrow y \qquad \text{i} \qquad x \Rightarrow y =_{def} \neg x \oplus y$$

može jednostavno transformisati u MV-term po istim tim promenljivama. Suprotno, zamenjujući svako pojavljivanje konstantne 0 u MV-termu τ, npr. formulom $\neg(F \Rightarrow F)$, MV-term τ transformišemo u iskaznu formulu. Primenu ovog zapažanja navodimo u sledećoj propoziciji (dokazuje se indukcijom po broju veznika u formuli F).

6.0.3 Propozicija

1.) Neka je A MV-algebra i F proizvoljna formula, pri čemu je $Var(F) \subseteq \{x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_t}\}$*. Tada, za svaku A-valuaciju* ν*, važi*

$$\nu(F) = F^A(\nu(x_{i_1}), \nu(x_{i_2}), ..., \nu(x_{i_t})),$$

gde je $F^A : A^t \to A$ *term-funkcija.*

2.) Formula F je A-tautologija akko je MV-identitet $F = 1$ *zadovoljen u A.*

3.) Formule F i G su semantički A-ekvivalentne akko je identitet $F = G$ *zadovoljen u A akko je* $F^A = G^A$*.*

Dakle, u slučaju Łukasiewiczeve logike L_n, u pitanju je relacija semantičke L_n[1]-ekvivalencije, a u slučaju Łukasiewiczeve logike L_∞, relacija semantičke [0,1]-ekvivalencije.

Poslednja posledica prethodne glave značajno je "pojačana" sledećim tvrđenjem:

6.0.4 Teorema *(Changova teorema kompletnosti) MV-identitet važi u MV-algebri* **[0,1]** *akko važi u svakoj MV-algebri.*

Na osnovu prethodne propozicije, imamo sledeću ekvivalentnu formulaciju Changove teoreme kompletnosti.

6.0.5 Teorema *Formula F je [0,1]-tautologija akko je, za svaku MV-algebru A, formula F A-tautologija. Prema tome, za proizvoljne formule F i G važi*

$$F^{[0,1]} = G^{[0,1]} \text{ akko je } F^A = G^A,$$

za sve MV-algebre A.

6.0.6 Definicija *W-algebra*[2] *je algebra* $(A, \Rightarrow, \neg, 1)$*, gde je A neprazan skup i binarna operacija* $\Rightarrow$*, unarna operacija* $\neg$ *i element 1 zadovoljavaju sledeće jednakosti:*

W1. $1 \Rightarrow x = x$;

W2. $(x \Rightarrow y) \Rightarrow ((y \Rightarrow z) \Rightarrow (x \Rightarrow z)) = 1$;

W3. $(x \Rightarrow y) \Rightarrow y = (y \Rightarrow x) \Rightarrow x$;

W4. $(\neg x \Rightarrow \neg y) \Rightarrow (y \Rightarrow x) = 1$.

6.0.7 Lema *Neka je A MV-algebra i definišimo*

$$x \Rightarrow y =_{def} \neg x \oplus y \quad i \quad 1 =_{def} \neg 0.$$

Tada je $(A, \Rightarrow, \neg, 1)$ *W-algebra.*

[1] definisana je u primeri 5.1.6

[2] ili *Wajsberg-algebra*, koristićemo kraći zapis

Naš sledeći zadatak je da pokažemo da važi i suprotan smer tvrđenja, tj. da svaka W-algebra postaje MV-algebra kada joj se dodele operacija $x \oplus y =_{def} \neg x \Rightarrow y$ i element $0 =_{def} \neg 1$.

6.0.8 Lema *Neka je $(A, \Rightarrow, 1)$ sistem koji zadovoljava W1, W2. i W3. Tada važe sledeće osobine za svako x, y i $z \in A$:*

W5. $x \Rightarrow x = 1$;

W6. Ako $x \Rightarrow y = y \Rightarrow x = 1$, *tada* $x = y$;

W7. $x \Rightarrow 1 = 1$;

W8. $x \Rightarrow (y \Rightarrow x) = 1$;

W9. Ako $x \Rightarrow y = y \Rightarrow z = 1$, *tada* $x \Rightarrow z = 1$;

W10. $(x \Rightarrow y) \Rightarrow ((z \Rightarrow x) \Rightarrow (z \Rightarrow y)) = 1$;

W11. $x \Rightarrow (y \Rightarrow z) = y \Rightarrow (x \Rightarrow z)$.

Dokaz. W5. Na osnovu W2. imamo da je $(1 \Rightarrow 1) \Rightarrow ((1 \Rightarrow x) \Rightarrow (1 \Rightarrow x)) = 1$, pa je sada na osnovu W1. $x \Rightarrow x = 1 \Rightarrow (x \Rightarrow x) = 1$.

W6. Ako $x \Rightarrow y = y \Rightarrow x = 1$, tada, na osnovu W1. i W3, imamo da je $x = 1 \Rightarrow x = (y \Rightarrow x) \Rightarrow x = (x \Rightarrow y) \Rightarrow y = 1 \Rightarrow y = y$.

W7. Na osnovu W3, W1. i W5. imamo da je $(x \Rightarrow 1) \Rightarrow 1 = (1 \Rightarrow x) \Rightarrow x = x \Rightarrow x = 1$. Iz ove jednakosti, W2, W1. i W5. imamo da je $1 = (1 \Rightarrow x) \Rightarrow ((x \Rightarrow 1) \Rightarrow (1 \Rightarrow 1)) = x \Rightarrow ((x \Rightarrow 1) \Rightarrow 1) = x \Rightarrow 1$.

W8. Na osnovu W2, W7. i W1. imamo da je $1 = (y \Rightarrow 1) \Rightarrow ((1 \Rightarrow x) \Rightarrow (y \Rightarrow x)) = 1 \Rightarrow (x \Rightarrow (y \Rightarrow x)) = x \Rightarrow (y \Rightarrow x)$.

W9. Ako $x \Rightarrow y = y \Rightarrow z = 1$, tada na osnovu W2. imamo da je $1 = (x \Rightarrow y) \Rightarrow ((y \Rightarrow z) \Rightarrow (x \Rightarrow z)) = 1 \Rightarrow (1 \Rightarrow (x \Rightarrow z))$, pa primenjujući W1. dva puta dobijamo da je $x \Rightarrow z = 1$.

W10. Kao pomoćni korak dokazaćemo sledeću slabiju verziju osobine W11:

W11'. Ako $x \Rightarrow (y \Rightarrow z) = 1$, tada $y \Rightarrow (x \Rightarrow z) = 1$.

Pretpostavimo da je $x \Rightarrow (y \Rightarrow z) = 1$. Zamenjujući y sa $y \Rightarrow z$ u W2. dobijamo da je $1 = (x \Rightarrow (y \Rightarrow z)) \Rightarrow (((y \Rightarrow z) \Rightarrow z) \Rightarrow (x \Rightarrow z)) = 1 \Rightarrow (((y \Rightarrow z) \Rightarrow z) \Rightarrow (x \Rightarrow z))$. Prema tome, na osnovu W1. i W3. sledi da je $((z \Rightarrow y) \Rightarrow y) \Rightarrow (x \Rightarrow z) = 1$. Sa druge strane, na osnovu W8. imamo da je $y \Rightarrow ((z \Rightarrow y) \Rightarrow y) = 1$. Primenjujući W9. na ove jednakosti sa $x = y, y = (z \Rightarrow y) \Rightarrow y$ i $z = x \Rightarrow z$ dobijamo da je $y \Rightarrow (x \Rightarrow z) = 1$. Sada W10. sledi iz W11'. i W2.

W11. Na osnovu W3. i W8. imamo da je $y \Rightarrow ((y \Rightarrow z) \Rightarrow z) = y \Rightarrow ((z \Rightarrow y) \Rightarrow y) = 1$ i na osnovu W10. imamo da je $((y \Rightarrow z) \Rightarrow z) \Rightarrow ((x \Rightarrow (y \Rightarrow z)) \Rightarrow (x \Rightarrow z)) = 1$. Primenjujući W9. na poslednje dve jednakosti, dobijamo da je $y \Rightarrow ((x \Rightarrow (y \Rightarrow z)) \Rightarrow (x \Rightarrow z)) = 1$. Sada, na osnovu W11'. imamo da je, takođe, $(x \Rightarrow (y \Rightarrow z)) \Rightarrow (y \Rightarrow (x \Rightarrow z)) = 1$. Zamenjujući x i y u ovoj jednakosti dobijamo da je $(y \Rightarrow (x \Rightarrow z)) \Rightarrow (x \Rightarrow (y \Rightarrow z)) = 1$ i sada možemo primeniti W6. nakon čega se dobija W11. □

6.0.9 Lema *Sledeće jednakosti važe u svakoj W-algebri A:*

a.) $\neg 1 \Rightarrow x = 1$;

b.) $\neg x = x \Rightarrow \neg 1$;

c.) $\neg\neg x = x$;

d.) $x \Rightarrow y = \neg y \Rightarrow \neg x$.

Dokaz. a.) Na osnovu W10. imamo da je $((\neg x \Rightarrow \neg 1) \Rightarrow x) \Rightarrow ((\neg 1 \Rightarrow (\neg x \Rightarrow \neg 1) \Rightarrow (\neg 1 \Rightarrow x)) = 1$. Pošto na osnovu W1. i W4. važi da je $(\neg x \Rightarrow \neg 1) \Rightarrow x = (\neg x \Rightarrow \neg 1) \Rightarrow (1 \Rightarrow x) = 1$ i na osnovu W8. važi da je $\neg 1 \Rightarrow (\neg x \Rightarrow \neg 1) = 1$, odakle $\neg 1 \Rightarrow x = 1$ sledi na osnovu W9.

b.) Na osnovu W8. imamo da je $\neg x \Rightarrow (\neg\neg 1 \Rightarrow \neg x) = 1$. Na osnovu W4. imamo da je $(\neg\neg 1 \Rightarrow \neg x) \Rightarrow (x \Rightarrow \neg 1) = 1$. Sada, koristeći W9. dobijamo da je $\neg x \Rightarrow (x \Rightarrow \neg 1) = 1$ i primenjujući W11. imamo da je $x \Rightarrow (\neg x \Rightarrow \neg 1) = 1$. Kao što smo videli u dokazu jednakosti pod a.), imamo, takođe, da je $(\neg x \Rightarrow \neg 1) \Rightarrow x = 1$. Prema tome, na osnovu W6. dobijamo da je $x = \neg x \Rightarrow \neg 1$ i uzimajući u obzir W3. zajedno sa jednakošću pod a.) i W1, dobijamo da je $x \Rightarrow \neg 1 = (\neg x \Rightarrow \neg 1) \Rightarrow \neg 1 = (\neg 1 \Rightarrow \neg x) \Rightarrow \neg x = 1 \Rightarrow \neg x = \neg x$.

c.) Na osnovu b.), W3, a.) i W1. možemo pisati da je $\neg\neg x = (x \Rightarrow \neg 1) \Rightarrow \neg 1 = (\neg 1 \Rightarrow x) \Rightarrow x = 1 \Rightarrow x = x$.

d.) Na osnovu W4. i c.) imamo da je $1 = (\neg\neg x \Rightarrow \neg\neg y) \Rightarrow (\neg y \Rightarrow \neg x) = (x \Rightarrow y) \Rightarrow (\neg y \Rightarrow \neg x)$. Sada preostaje da se primene W4. i W6. □

6.0.10 Teorema *Neka je $(A, \Rightarrow, \neg, 1)$ W-algebra i definišimo*

$$x \oplus y =_{def} \neg x \Rightarrow y \ \text{ i } 0 =_{def} \neg 1.$$

Tada je $(A, \oplus, \neg, 0)$ MV-algebra.

Dokaz. Dokaz se bez teškoća sprovodi jer su aksiome MV1-MV6. jednostavne posledice prethodnih lema.

MV2. $x \oplus y = \neg x \Rightarrow y = \neg y \Rightarrow \neg\neg x = y \oplus x$.
MV1. $x \oplus (y \oplus z) = \neg x \Rightarrow (\neg y \Rightarrow z) = \neg x \Rightarrow (\neg z \Rightarrow y) = \neg z \Rightarrow (\neg x \Rightarrow y) = z \oplus (x \oplus y) = (x \oplus y) \oplus z$.

MV3. $x \oplus 0 = \neg x \Rightarrow \neg 1 = 1 \Rightarrow x = x$.
MV4. Ova aksioma je dokazana u lemi 6.0.5 c.).
MV5. $x \oplus \neg 0 = \neg x \Rightarrow \neg\neg 1 = \neg 1 \Rightarrow x = 1 = \neg 0$.
MV6. $\neg(\neg x \oplus y) \oplus y = \neg\neg(\neg\neg x \Rightarrow y) \Rightarrow y = (x \Rightarrow y) \Rightarrow y = (y \Rightarrow x) \Rightarrow x = \neg\neg(\neg\neg y \Rightarrow x) \Rightarrow x = \neg(\neg y \oplus x) \oplus x$. □

6.0.11 Teorema *Neka je binarna relacija $\equiv$ na $Form$ definisana sa $F \equiv G$ akko $\vdash F \Rightarrow G$ i $\vdash G \Rightarrow F$. Tada je $\equiv$ relacija ekvivalencije koja se naziva sintaktička ekvivalencija i koja zadovoljava sledeće uslove*

1.) Ako je $F \equiv H$ i $G \equiv I$, tada je $(F \Rightarrow G) \equiv (H \Rightarrow I)$ i

2.) Ako je $F \equiv G$, tada je $\neg F \equiv \neg G$.

Dokaz. Očigledno je da $F \equiv G$ implicira $G \equiv F$ i, na osnovu leme 4.2.7, $F \equiv F$. Na osnovu aksiome $L_\infty 2$. imamo da $\{F \Rightarrow G, G \Rightarrow H\} \vdash F \Rightarrow H$ i $\{H \Rightarrow G, G \Rightarrow F\} \vdash H \Rightarrow F$. Prema tome, $\equiv$ je i tranzitivna relacija i time smo pokazali da je $\equiv$ relacija ekvivalencije na $Form$. Na osnovu aksiome $L_\infty 2$, za proizvoljne formule F, G i H imamo

$$\{H \Rightarrow F\} \vdash (F \Rightarrow G) \Rightarrow (H \Rightarrow G) \text{ i } \{F \Rightarrow H\} \vdash (H \Rightarrow G) \Rightarrow (F \Rightarrow G).$$

Zaključujemo da, ako $F \equiv H$, tada $F \Rightarrow G \equiv H \Rightarrow G$ $(*)$. Analogno, na osnovu leme 4.2.11, dobijamo da, ako $G \equiv I$, tada $H \Rightarrow G \equiv H \Rightarrow I$ $(**)$. Sada 1.) sledi na osnovu $(*)$, $(**)$ i tranzitivnosti relacije $\equiv$.
Na osnovu leme 4.2.8 i leme 4.2.9, za svaku formulu G važi $G \equiv \neg\neg G$. Tako da, na osnovu $(**)$, za proizvoljne formule F i G imamo da važi $F \Rightarrow G \equiv F \Rightarrow \neg\neg G$. Prema tome, $\vdash (F \Rightarrow G) \Rightarrow (F \Rightarrow \neg\neg G)$. Iz ovog zaključka i leme 4.2.12 dobijamo $\vdash (F \Rightarrow G) \Rightarrow (\neg G \Rightarrow \neg F)$, F odavde, na osnovu pravila MP, dobijamo da je $\vdash \neg G \Rightarrow \neg F$. Zamenjujući uloge F i G, na analogan način dobijamo da je $\vdash \neg F \Rightarrow \neg G$ i time smo dokazali da je $\neg F \equiv \neg G$. □

6.0.12 Napomena Klasu ekvivalencije formule F s obzirom na sintaktičku ekvivalenciju obeležavaćemo sa $|F|$. Dakle,

$$|F| =_{def} \{G \in Form \mid G \equiv F\}.$$

6.0.13 Napomena U nastavku ćemo, radi preglednosti, sa $\Sigma^{\vdash}$ obeležavati skup svih sintaktičkih posledica skupa formula Σ, a sa $\Sigma^{\models}$ skup svih semantičkih posledica skupa formula Σ. [3]

6.0.14 Napomena Navedimo i više nego očiglednu posledicu aksiome $L_\infty 1$ i pravila MP kojom ćemo se poslužiti u sledećoj lemi, a i teoremi:

$F \vdash G \Rightarrow F$

[3] U 2. glavi, dakle u opštem slučaju, umesto $\Sigma^{\vdash}$ uvedena je oznaka $Cons(\Sigma)$, no, sada biramo oznaku $\Sigma^{\vdash}$ da bi bila u skladu sa oznakom $\Sigma^{\models}$.

Dokaz. 1. F... hipoteza
2. $F \Rightarrow (G \Rightarrow F)$... $L_\infty 1$
3. $G \Rightarrow F$.. MP 1.2.

□

6.0.15 Lema *Za svaku formulu F važi $F \in \emptyset^\vdash$ akko $|F| = \emptyset^\vdash$.*

Dokaz. Ako je $|F| = \emptyset^\vdash$, tada $F \in \emptyset^\vdash$ jer $F \in |F|$.
Obratno, pretpostavimo da $F \in \emptyset^\vdash$, tj. da je $\vdash F$. Uzmimo $G \in \emptyset^\vdash$. Na osnovu prethodne napomene sledi da je $G \equiv F$. Odatle dobijamo da je $\emptyset^\vdash \subseteq |F|$. Sada uzmimo $G \in |F|$. Sada je $\vdash (F \Rightarrow G)$ i, na osnovu pravila MP, imamo da je $\vdash G$. Time smo dobili i drugu inkluziju $|F| \subseteq \emptyset^\vdash$. □

6.0.16 Teorema *Količnički skup $Form/\equiv$ postaje W-algebra kada mu dodelimo operacije $\Rightarrow$ i $\neg$ i konstantu 1 na sledeći način:*

1.) $|F| \Rightarrow |G| =_{def} |F \Rightarrow G|$;

2.) $\neg|F| =_{def} |\neg F|$;

3.) $1 =_{def} \emptyset^\vdash$.

Dokaz. Na osnovu uslova 1.) i 2.) prethodne teoreme, sledi da identiteti 1.) i 2.) ove teoreme daju dobro definisane operacije na količničkom skupu $Form/\equiv$. Dalje, na osnovu prethodne leme, imamo da je $\emptyset^\vdash \in Form/\equiv$. Preostaje da se proveri da operacije i konstantna definisane u 1.), 2.) i 3.) zadovoljavaju jednakosti W1-W4. iz definicije W-algebre.
Da bismo dokazali W1, primetimo najpre da

$$1 \Rightarrow |F| = \emptyset^\vdash \Rightarrow |F| = |G \Rightarrow F|, \text{ gde } G \in \emptyset^\vdash.$$

Na osnovu aksiome $L_\infty 1$, imamo da je $\vdash F \Rightarrow (G \Rightarrow F)$. Sa druge strane, na osnovu aksiome $L_\infty 4$, imamo da je $(G \Rightarrow F) \Rightarrow F \equiv (F \Rightarrow G) \Rightarrow G$ i ,pošto je $\vdash G$, sledi, iz prethodne napomene, da je $\vdash (F \Rightarrow G) \Rightarrow G$. Pošto na osnovu prethodne leme imamo da je $\vdash (G \Rightarrow F) \Rightarrow F$, sledi i $G \Rightarrow F \equiv F$. Stoga:

$$1 \Rightarrow |F| = \emptyset^\vdash \Rightarrow |F| = |G \Rightarrow F| = |F|,$$

ovo dokazuje W1.
Koristeći prethodnu lemu, jednakosti W2, W3. i W4. slede odmah iz $L_\infty 2$, $L_\infty 4$. i $L_\infty 3$. respektivno. □

Iz teoreme 6.0.10 sledi sledeća posledica:

6.0.17 Posledica *Količnički skup $Form/\equiv$ postaje MV-algebra sa operacijama $\neg$ i $\oplus$ i konstantom 0 definisanim na sledeći način:*

1.) $\neg|F| =_{def} |\neg F|$;

2.) $|F| \oplus |G| =_{def} |\neg F \Rightarrow G|$;

3.) $0 =_{def} \neg\emptyset^{\vdash} = \{F \in Form \mid$ *postoji* $G \in \emptyset^{\vdash}$ *tako da je* $F \equiv \neg G\}$.

MV-algebra

$$\mathcal{L} =_{def} (Form/\equiv, \oplus, \neg, 0)$$

naziva se *Lindenbaum algebra* Łukasiewiczeve logike L_∞.

Konačno se približismo cilju. Za "zagrevanje" sledi jednostavan smer naše željene teoreme.

6.0.18 Napomena U nastavku, s obzirom na to da nam je jedina od interesa Łukasiewiczeva logika L_∞ :

- pod terminom *valuacija* podrazumevaćemo *[0,1]-valuacija*
- pod terminom *tautologija* podrazumevaćemo *[0,1]-tautologija*
- pod terminom *semantička ekvivalencija* podrazumevaćemo *semantička [0,1]-ekvivalencija*
- pod terminom *semantička posledica* podrazumevaćemo *semantička [0,1]-posledica*

6.0.19 Lema *(Pouzdanost) Za proizvoljan skup formula* Σ, *važi*

$$\Sigma^{\vdash} \subseteq \Sigma^{\models}.$$

Dokaz. Neka je $\nu : Form \to [0,1]$ valuacija takva da je $\nu(F) = 1$, za svako $F \in \Sigma$. Indukcijom po n dokazaćemo da ako je $F_1, F_2, ..., F_n$ dokaz iz Σ, tada je $\nu(F_n) = 1$.

1^0 Ako je $n = 1$, tada je F_1 ili aksioma ili pripada skupu Σ. U prvom slučaju imamo da je $\nu(F_1) = 1$ zato što su sve aksiome tautologije (direktno sledi iz aksioma $L_\infty 1$-$L_\infty 4$.), dok u drugom slučaju imamo da je $\nu(F_1) = 1$, na osnovu izbora ν.

2^0 Pretpostavimo da je $n > 1$ i da je za svaki dokaz iz Σ $G_1, G_2, ..., G_m$, za koji važi da je $m < n$, $\nu(G_m) = 1$.

3^0 Neka je $F_1, F_2, ..., F_n$ dokaz iz Σ. Ako F_n nije aksioma i ne pripada skupu Σ, onda postoje $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$ takvi da se F_j poklapa sa formulom $F_i \Rightarrow F_n$ i F_n sledi, na osnovu pravila MP, iz F_i i F_j. S obzirom na to da su $F_1, F_2, ..., F_i$ i $F_1, F_2, ..., F_j$ dokazi iz skupa Σ, sledi na osnovu indukcijske hipoteze da je $\nu(F_i) = \nu(F_j) = 1$. Prema tome,

$$1 = \nu(F_j) = 1 \Rightarrow \nu(F_n) = \nu(F_n).$$ □

Dakle, posebno, svaka teorema je tautologija, tj.

$$\emptyset^{\vdash} \subseteq \emptyset^{\models}.$$

Suprotni smer teoreme sledi na osnovu Changove teoreme kompletnosti i to ćemo sada dokazati, čime će biti dokazana oba smera *Male teoreme kompletnosti.*

6.0.20 Teorema *Svaka tautologija je teorema, tj.*

$$\emptyset^{\models} \subseteq \emptyset^{\vdash}.$$

Dokaz. Najpre, primetimo da je za svaku iskaznu promenljivu x_i sintaktička klasa ekvivalencije $|x_i|$ element Lindenbaum algebre $\mathcal{L}$. Neka je F proizvoljna formula i neka je $Var(F) \subseteq \{x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_n}\}$. Indukcijom po broju veznika u F može se pokazati da je

$$F^{\mathcal{L}}(|x_{i_1}|, |x_{i_2}|, ..., |x_{i_n}|) = |F|.$$

Ukoliko pretpostavimo da formula F nije teorema, na osnovu leme 6.0.15 i uslova 3.) teoreme 6.0.16 sledi da je $|F| \neq 1$, tj. da je $F^{\mathcal{L}}(|X_{i_1}|, |X_{i_2}|, ..., |X_{i_n}|) \neq 1$. Drugim rečima, Lindenbaum algebra $\mathcal{L}$ ne zadovoljava identitet $F = 1$. Sada sledi, na osnovu Changove teoreme kompletnosti, da ni MV-algebra $\mathbf{[0,1]}$ ne zadovoljava identitet $F = 1$, tj. F nije tautologija. Dakle, važi inkluzija $\emptyset^{\models} \subseteq \emptyset^{\vdash}$. □

Prema tome, skup tautologija i skup teorema se poklapaju.

6.0.21 Posledica *Relacija semantičke i sintaktičke ekvivalencije se poklapaju, stoga, za proizvoljne formule F i G važi*

$$F^{\mathbf{[0,1]}} = G^{\mathbf{[0,1]}} \text{ akko } F \equiv G.$$

6.0.22 Napomena Kad god su dve formule sintaktički odnosno semantički ekvivalentne, reći ćemo da su *logički* ekvivaletne.

Najzad, nakon utvrđivanja i pouzdanosti i slabe kompletnosti Łukasiewiczeve logike L_∞, preostaje nam jedino da ostvarimo željeni cilj:

SAZNATI KOJI SU TO POTREBNI I DOVOLJNI USLOVI NEOPHODNI ZA JAKU KOMPLETNOST ŁUKASIEWICZEVE LOGIKE L_∞, A ONDA SE U TO I UVERITI.

U nastavku navodimo još samo par informacija neophodnih za formulaciju i dokaz našeg cilja.

6.0.23 Lema *Neka je A MV-algebra i $\nu : Form \to A$ A-valuacija. Tada zahtev*

$$h_\nu(|F|) = \nu(F)$$

definiše homomorfizam $h_\nu : \mathcal{L} \to A$. Obratno, za svaki homomorfizam $h : \mathcal{L} \to A$ zahtev

$$\nu_h(F) = h(|F|)$$

definiše A-valuaciju $\nu_A : Form \to A$. Povrh toga, korespodencija $\nu \mapsto h_\nu$ je injektivno preslikavanje skupa A-valuacija na skup homomorfizama u A Lindenbaum algebre $\mathcal{L}$. Inverzno preslikavanje dato je sa $h \to \nu_h$.

6.0.24 Definicija *Implikativni filter MV-algebre A je podskup $\mathcal{F}$ nosača A koji zadovoljava sledeće uslove*

$\mathcal{F}1$. $1 \in \mathcal{F}$ *i*

$\mathcal{F}2$. *Za svako $x, y \in A$ ako $x \in \mathcal{F}$ i $x \Rightarrow y \in \mathcal{F}$, tada $y \in \mathcal{F}$.*

Implikativni filter $\mathcal{F}$ nazivamo pravim akko je $F \neq A$; $\mathcal{F}$ nazivamo maksimalnim akko je $\mathcal{F}$ pravi i A je jedini implikativni filter koji strogo sadrži $\mathcal{F}$.

6.0.25 Lema *Sledeći uslovi su ekvivalentni za svaki podskup $\mathcal{F}$ MV-algebre A :*

1.) F je implikativni filter;

2.) $F \neq \emptyset$; ako $x \in F$ i $x \leq y \in A$, tada $y \in F$; ako $x, y \in F$, tada $x \odot y \in F$;

3.) Skup $\neg F =_{def} \{\neg x \mid x \in F\}$ je ideal MV-algebre A.

Gornja lema nam omogućava da osobine implikativnih filtera otkrivamo preko osobina ideala. Npr. ako je $h : A \to A'$ homomorfizam, tada je skup $F(h) =_{def} \{x \in A \mid h(x) = 1\}$ implikativni filter; štaviše, $h(x) = h(y)$ akko $(x \Rightarrow y) \wedge (y \Rightarrow x) \in F(h)$. Za proizvoljan implikativni filter F, koristićemo oznaku A/F za obeležavanje količničke MV-algebre $A/\neg F$.

6.0.26 Napomena Presek proizvoljne neprazne familije implikativnih filtera MV-algebre A je takođe implikativni filter MV-algebre A.

6.0.27 Definicija *Teorija Łukasiewiczeve logike L_∞ je skup formula Σ koji zadovoljava sledeće uslove:*

T1. Sve aksiome pripadaju skupu Σ

T2. Ako $F \in \Sigma$ i $F \Rightarrow G \in \Sigma$, tada $G \in \Sigma$

6.0.28 Propozicija *Za svaki skup formula Σ važi sledeće:*

1.) $\Sigma^\vdash$ je najmanja teorija koja sadrži Σ;

2.) Σ je teorija akko je $\Sigma = \Sigma^\vdash$;

3.) Ako je Σ teorija i $F \in \Sigma$, tada $|F| \subseteq \Sigma$.

Neka je $\{\Sigma_i\}_{i \in I}$ neprazna familija teorija. $\bigcap_{i \in I} \Sigma_i$ je takođe teorija; dalje, iz prethodne propozicije, sledi da je $(\bigcup_{i \in I} \Sigma_i)^\vdash$ najmanja teorija koja sadrži Σ_i za svako $i \in I$. Prema tome, skup teorija Łukasiewiczeve logike L_∞, sa uređenjem $\subseteq$, čini kompletnu mrežu i tu mrežu obeležavaćemo sa $Theo$.

Upoređujući definicije 6.0.24 i 6.0.27 dobijamo sledeću teoremu.

6.0.29 Teorema *Korespodencija*

$$\Sigma \mapsto |\Sigma| =_{def} \{|F| \in \mathcal{L} \mid F \in \Sigma\}$$

definiše izomorfizam iz mreže $Theo$ na mrežu implikativnih filtera Lindenbaum algebre $\mathcal{L}$. Inverzni izomorfizam dat je sa

$$\mathcal{F} \mapsto \{F \in Form \mid |F| \in \mathcal{F}\}.$$

6.0.30 Definicija *MV-algebru A nazivamo jednostavnom akko ima tačno dva ideala, tj. MV-algebra A je jednostavna akko je A netrivijalna i $\{0\}$ joj je jedini pravi ideal.*

Konačno smo spremni za željenu teoremu.

6.0.31 Teorema *(Kompletnost) Za proizvoljan skup formula Σ, važi*

$$\Sigma^{\vdash} = \Sigma^{\models}$$

akko je

$|\Sigma^{\vdash}|$ *presek maksimalnih implikativnih filtera Lindenbaum algebre $\mathcal{L}$.*

Dokaz. Za svaku valuaciju $\nu : Form \to [0,1]$, imamo da je

$$|\nu^{-1}(\{1\})| = h_\nu^{-1}(\{1\}),\ (*)$$

gde je $h_\nu : \mathcal{L} \to [0,1]$ homomorfizam definisan u lemi 6.0.23. Sledeće što primećujemo je da, kad god formula F ne pripada skupu $\Sigma^{\models}$, postoji valuacija $\nu_F : Form \to [0,1]$ tako da je $\nu_F(G) = 1$, za sve $G \in \Sigma$, i da je $\nu_F(F) < 1$. Prema tome, imamo da je

$$\Sigma^{\models} = \bigcap_{F \notin \Sigma^{\models}} \nu_F^{-1}(1),$$

odakle je na osnovu teoreme 6.0.29 i $(*)$

$$|\Sigma^{\models}| = \bigcap_{F \notin \Sigma^{\models}} |\nu_F^{-1}(\{1\})| = \bigcap_{F \notin \Sigma^{\models}} h_\nu^{-1}(\{1\}).$$

Stoga, ako je $\Sigma^{\vdash} = \Sigma^{\models}$, tada je $|\Sigma^{\vdash}|$ presek maksimalnih implikativnih filtera Lindenbaum algebre $\mathcal{L}$.

Obratno, pretpostavimo da postoji familija $\{M_i\}_{i\in I}$ maksimalnih implikativnih filtera Lindenbaum algebre $\mathcal{L}$ takva da je $|\Sigma^{\vdash}| = \bigcap_{i\in I} M_i$. Pošto je za svako $i \in I$ količnička MV-algebra $\mathcal{L}/M_i$ jednostavna, postoji homomorfizam $h_i : \mathcal{L} \to [0,1]$ takav da je $M_i = h_i^{-1}(\{1\})$. Na osnovu leme 6.0.23, za svako $i \in I$, postoji valuacija $\nu_i : Form \to [0,1]$ takva da je $h_i = h_{\nu_i}$. Stoga, ponovo na osnovu teoreme 6.0.29 i $(*)$, zaključujemo da je

$$\Sigma^{\vdash} = \bigcap_{i\in I} \nu_i^{-1}(1).$$

Prema tome, kad god $F \notin \Sigma^{\vdash}$, postoji $j \in I$ tako da je $\nu_j(F) < 1$, sledi da $F \notin \Sigma^{\models}$. Zaključujemo da važi

$$\Sigma^{\models} \subseteq \Sigma^{\vdash},$$

što zajedno sa lemom 6.0.19 daje $\Sigma^{\vdash} = \Sigma^{\models}$. $\square$

Zaključak

S obzirom na to da se logički sistem može odrediti ili na osnovu pojma dokaza ili na osnovu pojma istine, prirodno se nameću pitanja pouzdanosti (da li dokazivost implicira istinu?) i kompletnosti (da li i istina implicira dokazivost?) logičkog sistema. Za Łukasiewiczevu logiku L_3 postoji pouzdan i (jako) kompletan aksiomatski sistem - L_3A (koji je predstavljen u radu). Zapravo, pouzdan i (jako) kompletan aksiomatski sistem postoji za sve Łukasiewiczeve logike L_n. Za Łukasiewiczevu logiku L_∞ postoji pouzdan aksiomatski sistem - $L_\infty A$ (koji je predstavljen u radu). Međutim, za Łukasiewiczevu logiku L_∞ NE postoji pouzdan aksiomatski sistem koji bi mogao biti i (jako) kompletan (što je dokazano u radu). Iz tog razloga pristupa se detaljnijem algebarskom ispitivanju Łukasiewiczeve logike L_∞. Zahvaljujući konceptu MV-algebre, koja je od podjednake važnosti za Łukasiewiczevu logiku L_∞ kao što je Bulova algebra za klasičnu logiku, obezbeđuju se potrebni i dovoljni uslovi neophodni za (jaku) kompletnost Łukasiewiczeve logike L_∞ (što je dokazano u radu).

Literatura

[1] Ackermann, R. *Introduction to Many-Valued Logics.* London: Routledge & Kegan Paul, 1967.

[2] Aguzzoli, S., Ciabattoni A. *Finiteness in Infinite-Valued Łukasiewicz Logic.* Journal of Logic, Language, and Information 9, 2000, str. 5-29.

[3] Bergmann, M. *An Introduction to Many-Valued and Fuzzy Logic.* Cambridge University Press, 2008.

[4] Bolc L., Borowik P. *Many-Valued Logics 1, Theoretical Foundations.* Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1992.

[5] Chang, C.C. *Proof of an Axiom of Łukasiewicz.* Transactions of the American Mathematical Society 87, 1958, str. 55-56.

[6] Chang, C.C. *A New Proof of the Completness of the Łukasiewicz Axioms.* Transactions of the American Mathematical Society 93, 1959, str. 74-80.

[7] Cignoli R.L.O., Ottaviano I.M.L.D., Mundici D. *Algebraic Foundations of Many-Valued Reasoning.* Kluwer Academic Publishers, 2000.

[8] Gottwald, S. *Many-Valued Logic and Fuzzy Set Theory, in: Mathematics of Fuzzy Sets, Logic, Topology, and Measure Theory.* Kluwer Academic Publishers, 1999, str. 5-89.

[9] Hájek, P. *Metamathematics of Fuzzy Logics.* Kluwer Academic Publishers, 1998.

[10] Hájek, P. *On Very True.* Fuzzy Sets and Systems 124, 2001, str. 329-333.

[11] Hájek, P. *What is Mathematical Fuzzy Logic.* Fuzzy Sets and Systems 157, 2006, str. 597-603.

[12] Meredith, C.A. *The Dependence of an Axiom of Łukasiewicz.* Transactions of the American Mathematical Society 87, 1958, str. 54.

[13] Priest, Graham *An Introduction to Non-Classical Logic.* Cambridge: Cambridge University Press, 2001, str. 215.

Biografija

Kristina Fruža je rođena 20. januara 1993. u Zrenjaninu. Osnovnu školu ,,Servo Mihalj" završila je 2008. godine, kao nosilac Vukove diplome i učenik generacije. Zatim je upisala Zrenjaninsku gimnaziju, koju je završila 2012. godine kao nosilac Vukove diplome. Iste godine upisala je osnovne akademske studije na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu. Diplomirala je oktobra 2016. godine sa prosečnom ocenom 9.35 i stekla zvanje Diplomirani profesor matematike. Iste godine je upisala master akademske studije na istom fakultetu, smer Master profesor matematike. Položivši poslednji ispit oktobra 2017. godine, stekla je pravo na odbranu ovog master rada.

Novi Sad, februar 2018. Kristina Fruža

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:
RBR
Identifikacioni broj:
IBR
Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija
TD
Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal
TZ
Vrsta rada: Master rad
VR
Autor: Kristina Fruža
AU
Mentor: dr Rozália Sz. Madarász
MN
Naslov rada: Łukasiewiczeve viševrednosne logike i MV-algebre
NR
Jezik publikacije: srpski (latinica)
JP
Jezik izvoda: srpski i engleski
JI
Zemlja publikovanja: Srbija
ZP
Uže geografsko područje: Vojvodina
UGP
Godina: 2018.
GO
Izdavač: Autorski reprint
IZ
Mesto i adresa: Novi Sad, Departman za matematiku i informatiku, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, Trg Dositeja Obradovića 4
MA
Fizički opis rada: 6 glava/76 strana/13 referenci/ 0 tabela/ 0 slika/ 0 grafika/ 0 priloga
FO
Naučna oblast: Matematika

NO
Naučna disciplina: Algebra i Matematička Logika
ND
Predmetna odrednica/ ključne reči: viševrednosna logika, Modifikovana teorema dedukcije, jaka kompletnost, MV-algebra, MV-identitet, W-algebra, Lindenbaum algebra Łukasiewiczeve logike L_∞
PO
UDK:
Čuva se: Biblioteka Departmana za matematiku i informatiku Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta u Novom Sadu
ČU
Važna napomena:
VN

Izvod: U ovom master radu bavimo se Łukasiewiczevim viševrednosnim logikama i MV-algebrama. Rad se sastoji iz šest glava. Prva glava je uvodnog karaktera - ukratko je opisan proces razvijanja viševrednosne logike tokom vremena. U drugoj glavi dat je pregled osnovnih karakteristika sintakse i semantike logičkih sistema. Treća glava posvećena je isključivo trovalentnim logičkim sistemima. Najpre je predstavljen Kleenejev trovalentni logički sistem K_3^S, a zatim Łukasiewiczev trovalentni logički sistem L_3. U narednoj glavi upoznajemo se sa Łukasiewiczevim beskonačnovrednosnim logičkim sistemom L_∞. Ispostavlja se da ne postoji pouzdan aksiomatski sistem za L_∞ koji bi mogao biti i jako kompletan! Upravo je taj rezultat predstavljao motivaciju za uvođenje pojma MV-algebri. Stoga je peta glava rezervisana samo za MV-algebre. Cilj poslednje glave je stići do potrebnih i dovoljnih uslova neophodnih za jaku kompletnost Łukasiewiczeve logike L_∞, a onda se u to i uveriti.
IZ

Datum prihvatanja teme od strane NN veća: 25.08.2017.
DP
Datum odbrane:
DO
Članovi komisije:
KO
Predsednik: dr Siniša Crvenković , redovni profesor u penziji, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu
Član: dr Rozália Sz. Madarász, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu
Član: dr Ivica Bošnjak, vanredni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCES
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:
ANO
Identification number:
INO
Document type: Monograph type
DT
Type of record: Printed text
TR
Contents code: Master's thesis
CC
Author: Kristina Fruža
AU
Mentor: Rozália Sz. Madarász, Ph.D.
MN
Title: Łukasiewicz many-valued logics and MV-algebras
TI
Language of text: Serbian (latin)
LT
Language of abstract: Serbian and English
LA
Country of publication: Republic of Serbia
CP
Locality of publication: Vojvodina
LP
Publication year: 2018.
PY
Publisher: Author's reprint
PB
Publication place: Novi Sad, Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science, University of Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4
PP
Physical description: 6 chapters/76 pages/13 references/ 0 tables/ 0 pictures/ 0 graphs/ 0 appendixes
PD

Scientific field: Mathematics
SF
Scientific discipline: Algebra and Mathematical Logic
SD
Subject/Key words: many-valued logic, Modified deduction theorem, strong completness, MV-algebra, MV-equation, W-algebra, Lindenbaum algebra of Łukasiewicz's logic L_∞
S/KW
UC:
Holding data: The Library of the Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Sciences, University of Novi Sad
HD
Note:
N

Abstract: In this Master's Thesis we deal with Lukasiewicz's many-valued logic and MV-algebras. The thesis consists of six chapters. The first chapter is of an introductory character - the process of developing of many-valued logic over time is briefly described. The second chapter gives an overview of the basic characteristics of syntax and semantics of logical systems. The third chapter examines three-valued logical systems only. Firstly, Kleene's three-valued logical system K_3^S, and then Lukasiewicz's three-valued logical system L_3 is introduced. In the next chapter we get to know Lukasiewicz's infinite-valued logical system L_∞. It turns out that there is no sound axiomatic system for L_∞ which could be strongly complete! This result was the motivation for introducing MV-algebras. So, the fifth chapter is reserved for MV-algebras only. The goal of the last chapter is to find out what are the conditions necessary for the strong completeness of the Łukasiewicz's logic L_∞, and then to verify that.
AB

Accepted by the Scientific Board on: 25/08/2017
ASB
Defended on:
DE
Defend board:
DB
Chair: Siniša Crvenković, Ph.D., Retired Full Professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad
Member: Rozália Sz. Madarász, Ph.D. , Full Professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad
Member: Ivica Bošnjak, Ph.D., Associate Professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad