UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DERARTMAN ZA MATEMATIKU
I INFORMATIKU

Jelena Čolić

Neke klase maksimalnih hiperklonova

- završni rad -

MENTOR:
Prof. dr Rozalija Madaras-Silađi

Novi Sad, 2012.

Predgovor

Već prilikom prvog susreta sa Galoisovim vezama tokom kursa Univerzalne algebre na osnovnim studijama, bila sam fascinirana njihovom suštinskom jednostavnošću, a opet s druge strane veoma širokim spektrom primene. Otuda je moja velika želja bila da u master radu pišem „nešto o Galoisovim vezama”. S obzirom da moja mentorka, profesorica Rozalija Madaras-Silađi, i ja isprva baš i nismo znali kako bi to moglo da izgleda, na neko vreme smo odustali od te ideje.

Međutim, sudbina je htela da mi jedan od prvih radnih zadataka, kao saradnika u nastavi na Fakultetu tehničkih nauka, bude držanje vežbi na predmetu Algebra, za studente Geodezije, na kom je predmetni nastavnik profesorica Jovanka Pantović. Nakon samo mesec dana saradnje na predmetu, ona mi je, na moje neizmerno oduševljenje, ponudila da budem koautor u radu koji su pisali ona i Hajime Machida. Tema su bili maksimalni hiperklonovi, za čije je potpunije razumevanje bilo neophodno vratiti se nekoliko koraka unazad i posvetiti pažnju proučavanju klonova. Ali, tada sam shvatila da sam indirektnim putem ipak stigla do Galoisovih veza i da moja prvobitna želja ima izglednu šansu da bude realizovana. To se, na moje veliko zadovoljstvo, i desilo, a rezultat tog rada se sada nalazi pred vama.

* * *

Ovom prilikom bih želela da se zahvalim profesorici Jovanki Pantović, koja me je uvela u zanimljivi svet klonova, na divnoj saradnji kako u nauci, tako i u nastavi, kao i na bezrezervnoj moralnoj i logističkoj podršci pri izradi ovog rada.

Takođe bih se zahvalila članovima komisije Maji Pech i Petru Đapiću, koji su izuzetno korisnim sugestijama doprineli poboljšanju ovog rada.

Veliku zahvalnost dugujem svojoj mentorki, profesorici Rozaliji Madaras-Silađi, ne samo na pomoći tokom pisanja rada, već prevashodno zato što je verovala u mene i kada sam ja dizala ruke od svega, i što me je u više navrata sprečila da odustanem od univerzitetske karijere.

Iznad svega, hvala mojoj porodici i prijateljima na ljubavi, strpljenju i razumevanju.

Novi Sad, maj 2012. Jelena Čolić

Sadržaj

Glava 1

Uvod

Kada čujemo reč klon, sigurno ćemo pre pomisliti na biologiju ili naučnu fantastiku nego na matematiku. Klon je reč grčkog porekla i znači „grančica”, što u biološkom smislu aludira na mogućnost da se „kloniranjem”od jedne grančice dobije čitavo drvo. U svetu matematike klon predstavlja operacijsku strukturu i to onu koja je *zatvorena* u odnosu na kompoziciju operacija. Zato se smatra da je engleska reč *clone* zapravo skraćenica od "***cl***osed ***one***"ili "***cl***osed ***o***peration ***ne***twork". Iako je termin klon ušao u širu upotrebu tek poslednjih nekoliko decenija, prvi rezultati teorije klonova datiraju još s početka prošlog veka.

Klonovi se, kao što ćemo kasnije videti, mogu definisati na više načina, ali svakako je najinteresantnije predstavljanje klona kao skupa svih operacija koje čuvaju sve relacije iz nekog skupa. U ovom pristupu suštinsku ulogu igra jedna Galoisova veza. Galoisove veze su veoma moćan alat kojim se služe mnoge grane matematike. One znatno pojednostavljuju probleme jer povezuju različite matematičke objekte, a zapravo se vrlo lako definišu. Naziv potiče od poznate veze između elemenata (a) nekog polja i automorfizama (π) tog polja, takvih da je $\pi(a) = a$, koju je opisao Évariste Galois. Inspirisan ovim rezultatom, Marc Krasner je došao do veze između permutacija i relacija na nekom skupu. Ovo je bila polazna tačka u istraživanjima koja su tridesetak godina kasnije dovela do jedne od najpoznatijih Galoisovih veza (Pol, Inv), između skupa operacija i skupa relacija na nekom datom skupu. Nju su opisali Bondarčuk, Kalužnin, Kotov i Romov, i nezavisno Geiger.

Moglo bi se reći da je osnovni problem teorije klonova opis mreže svih klonova na datom skupu. Međutim, do sada je jedino kompletno opisana mreža klonova na dvoelementnom skupu, za šta je zaslužan Emil Leon Post. Kako već mreža klonova na troelementnom skupu ima neprebrojivo mnogo elemenata, vrlo je izvesno da su pokušaji da se u potpunosti opišu mreže klonova u opštem slučaju bez mnogo izgleda za uspeh. Zato se istraživanja okreću ka ispitivanju nekih delova tih mreža. Jedan od mogućih pravaca je opis atoma i koatoma. Rezultat dobijen pri proučavanju koatoma, koje još nazivamo i maksimalni klonovi, svakako je jedan od najimpresivnijih u teoriji klonova. Naime, Ivo Rosenberg je pokazao da su svi mogući maksimalni klonovi na datom skupu oblika $Pol\rho$, pri čemu ρ pripada jednoj od samo šest klasa relacija. Ovaj izuzetni rezultat inspirisao je mnoge istraživače u oblasti da pokušaju da otkriju slične karakterizacije i za neke druge delove mreže klonova, kao i za mreže objekata koji predsavljaju uopštenja pojma klona (hiperklonovi, parcijalni klonovi...). Ovaj rad samo je mali korak u tom smeru.

Hiperoperacije su preslikavanja koja svakoj n-torki elemenata nekog skupa pridružuju neki neprazan podskup tog skupa. One igraju bitnu ulogu u modeliranju nedeterminističkih procesa. Zbog sve veće ekspanzije oblasti teorijskog računarstva, javila se potreba za razvojem algebarske teorije hiperstruktura.

U [18] i [19] Rosenberg uvodi pojam hiperklona kao poduniverzuma algebre koja je proširenje algebre $\mathcal{O}_A = (O_A; *, \zeta, \tau, \Delta, \pi_1^2)$ na slučaj hiperoperacija. Hiperklon se ekvivalentno može definisati i kao skup hiperoperacija koji sadrži sve projekcije i zatvoren je u odnosu na kompoziciju. Skup svih hiperklonova čini algebarsku mrežu u odnosu na skupovnu inkluziju, čiji je najmanji element skup svih projekcija, a najveći element skup svih hiperoperacija. Ova mreža je dosta složenija od mreže klonova, pa je realno očekivati da se samo neki njeni delovi mogu u potpunosti sagledati. Cilj ovog rada je opiše neke od koatoma ove mreže.

S obzirom na temu ovog rada, akcenat je stavljen na hiperklonove, dok je o klonovima rečeno samo ono najneophodnije da bi se razumeli navedeni rezultati iz teorije hiperklonova. Više detalja o teoriji klonova može se naći, na primer, u [14], [21], [9] i [13].

Rad se sastoji iz tri dela.

U prvom delu su navedene oznake, kao i neke dobro poznate definicije i teoreme koje će biti korišćene u ostatku rada. Posebno je izdvojena Galoisova veza kao jedan od fundamentalnih alata u proučavanju mreža klonova i hiperklonova.

U drugom delu je dat uporedni pregled nekih rezultata iz teorije klonova i hiperklonova. Na početku navodimo nekoliko različitih načina za uvođenje pojma klona i hiperklona, i ispitujemo neke od osnovnih osobina, direktno izvedenih iz ovih definicija. Nastavljamo sa predstavljanjem mreže klonova i mreže hiperklonova na dvoelementnom skupu. U trećem poglavlju najpre uvodimo Galoisovu vezu (Pol, Inv) i pokazujemo da su zatvoreni skupovi operatora $Pol\, Inv$ upravo klonovi operacija, dok su zatvoreni skupovi operatora $Inv\, Pol$ relacijski klonovi, a zatim navodimo nekoliko Galoisovih veza između relacija i hiperoperacija, koje su definisane u [2], [16], [20], [6] i [4], i ispitujemo međusobne odnose zatvorenih skupova za ove veze.

Treći deo je posvećen koatomima mreža klonova i hiperklonova. Prvo predstavljamo jedan od najznačajnijih rezultata teorije klonova - Rosenbergovu klasifikaciju maksimalnih klonova, uz skicu dokaza. U nastavku dajemo kriterijum koji treba da zadovolji skup $hPol\rho$ da bi bio maksimalan hiperklon. Koristeći taj kriterijum, u naredna četiri poglavlja pokazujemo da je $hPol\rho$ maksimalan hiperklon u slučaju da je ρ ograničeno parcijalno uređenje, netrivijalna relacija ekvivalencije, centralna, odnosno regularna relacija. Poglavlja 4.4–4.6 se baziraju na rezultatima iz [11], dok je poglavlje 4.3 zasnovano na radovima [3] i [4] u kojima je potpisnik ovih redova jedan od koautora.

Glava 2

Osnovni pojmovi

Ovde ćemo samo navesti najvažnije algebarske pojmove i tvrđenja koja ćemo u radu koristiti. Više detalja se može pronaći u [12].

2.1 Oznake

Neka je $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$ skup prirodnih brojeva. Za dati skup A neka je $\mathcal{P}(A)$ partitivni skup, tj. skup svih podskupova skupa A. Sa $|A|$ ćemo označavati kardinalnost skupa A. Direktan proizvod skupova $A_1, \ldots, A_n$, za $n > 1$ je $A_1 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, \ldots, a_n) : a_i \in A_i, i \in \{1, \ldots, n\}\}$. Specijalno, ako je $A_1 = \ldots = A_n = A$, onda umesto $A_1 \times \cdots \times A_n$ pišemo A^n.

Operacije ćemo označavati malim slovima latinice $(f, g, h, \ldots)$, a relacije malim grčkim slovima $(\rho, \sigma, \theta, \ldots)$. Specijalno, relaciju ekvivalencije označavamo sa ε, pri čemu je C_x klasa ekvivalencije nekog elementa x, a relaciju poretka ćemo u nekim slučajevima označiti sa $\leq$. Arnost operacija i relacija označavamo sa ar.

Uređeni par $\mathcal{A} = (A, F)$ je *algebra* ako je A proizvoljan neprazan skup, a F je skup operacija na A. Skup A je *nosač (univerzum)*, a F je skup *fundamentalnih operacija* algebre $\mathcal{A}$.

2.2 Mreže

Mreža se može definisati kao uređen skup $(A, \leq)$ takav da za sve $x, y \in A$ postoje $\inf\{x, y\}$ i $\sup\{x, y\}$. S druge strane mreža se može posmatrati i kao algebra $(A, \wedge, \vee)$, pri čemu binarne operacije $\wedge$ i $\vee$ na A zadovoljavaju uslove komutativnoti, asocijativnosti, idempotentnosti i apsorpcije.

U mreži sa najmanjim elementom $\mathbf{0}$ i najvećim elementom $\mathbf{1}$, elemente koji neposredno pokrivaju $\mathbf{0}$ zovemo *atomima*, a elemente koje neposredno pokriva $\mathbf{1}$ zovemo *koatomima*.

Pošto ćemo u ovom radu više puta koristiti pojmove kompletne i algebarske mreže, u nastavku navodimo njihove definicije i osnovna svojstva.

Definicija 2.2.1 *Mreža $(A, \leq)$ je **kompletna** ako za svako $X \subseteq A$ postoje $\inf X$ i $\sup X$.*

Teorema 2.2.1 *Za uređen skup $(A, \leq)$ sledeći uslovi su ekvivalentni:*

(1) $(A, \leq)$ je kompletna mreža.

(2) $(A, \leq)$ ima najmanji element i postoji $\sup X$, za sve $\emptyset \neq X \subseteq A$.

(3) $(A, \leq)$ ima najveći element i postoji $\inf X$, za sve $\emptyset \neq X \subseteq A$.

Definicija 2.2.2 *Preslikavanje $C : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$ se naziva **operator zatvaranja** ako za sve $X, Y \subseteq A$ važi:*

(C1) $X \subseteq C(X)$

(C2) $X \subseteq Y \Rightarrow C(X) \subseteq C(Y)$

(C3) $C(C(X)) = C(X)$.

*Skup $X \subseteq A$ je **zatvoren** ako je $C(X) = X$. Skup svih zatvorenih skupova uređen skupovnom inkluzijom označavamo sa L_C.*

Teorema 2.2.2 *Neka je C operator zatvaranja na skupu A. Tada je $(L_C, \subseteq)$ kompletna mreža.*

Ako je C operator zatvaranja na A, i $Y \subseteq A$ je zatvoren skup tako da je $Y = C(X)$, onda kažemo da X *generiše* Y. Skup Y je *konačno generisan* ako postoji konačan skup koji ga generiše.

Definicija 2.2.3 *Neka je $(A, \leq)$ mreža. Tada za element $a \in A$ kažemo da je* ***kompaktan*** *ako za sve $X \subseteq A$ za koje postoji $\sup X$ i $a \leq \sup X$, postoji konačan skup $B \subseteq A$ za koji je $a \leq \sup B$.*

Mreža je ***kompaktno generisana*** *ako je svaki element supremum kompaktnih elemenata.*

Mreža je ***algebarska*** *ako je kompletna i kompaktno generisana.*

Definicija 2.2.4 *Operator zatvaranja C na skupu A je* ***algebarski operator zatvaranja*** *ako za sve $X \subseteq A$ važi*

(C4) $C(X) = \bigcup\{C(Y) : Y \subseteq X \text{ i } Y \text{ je konačan}\}$.

Teorema 2.2.3 *Ako je C algebarski operator zatvaranja, onda je $(L_C, \subseteq)$ algebarska mreža, pri čemu su kompaktni elementi tačno konačno generisani podskupovi od A.*

Teorema 2.2.4 (Birkhoff-Frink) *Svaka algebarska mreža izomorfna je mreži poduniverzuma neke algebre.*

2.3 Galoisova veza

Definicija 2.3.1 Galoisova veza *između skupova A i B je par preslikavanja (α, β), gde su $\alpha : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(B)$ i $\beta : \mathcal{P}(B) \to \mathcal{P}(A)$, tako da za sve $X, X_1, X_2 \in \mathcal{P}(A)$ i $Y, Y_1, Y_2 \in \mathcal{P}(B)$ važi*

(i) $X_1 \subseteq X_2 \Rightarrow \alpha(X_1) \supseteq \alpha(X_2)$,
$Y_1 \subseteq Y_2 \Rightarrow \beta(Y_1) \supseteq \beta(Y_2)$;

(ii) $X \subseteq \beta(\alpha(X))$,
$Y \subseteq \alpha(\beta(Y))$.

Teorema 2.3.1 *Neka je (α, β) Galoisova veza između skupova A i B. Tada važi:*

(1) $\alpha\beta\alpha = \alpha$ *i* $\beta\alpha\beta = \beta$;

(2) $\alpha\beta$ i $\beta\alpha$ su operatori zatvaranja na B odnosno na A;

(3) Zatvoreni skupovi operatora $\beta\alpha$ su upravo skupovi oblika $\beta(Y)$, za neko $Y \subseteq B$, a zatvoreni skupovi operatora $\alpha\beta$ su upravo skupovi oblika $\alpha(X)$, za neko $X \subseteq A$.

Dokaz.

(1) Neka je $X \subseteq A$. Prema drugoj osobini Galoisove veze imamo $X \subseteq \beta(\alpha(X))$. Kada na ovu nejednakost primenimo α, na osnovu prve osobine dobijamo $\alpha(X) \supseteq \alpha(\beta\alpha(X))$. Kada ponovo primenimo drugu osobinu, ali ovoga puta na skup $\alpha(X)$, dobijamo i obrnutu inkluziju $\alpha(X) \subseteq \alpha\beta(\alpha(X))$.

(2) Pokažimo da je $\beta\alpha$ operator zatvaranja na A. Analogno se dokazuje da je i $\alpha\beta$ operator zatvaranja na B. Neka su $X, X_1, X_2 \in \mathcal{P}(A)$.

(C1) Zbog druge osobine Galoisove veze imamo $X \subseteq \beta\alpha(X)$.

(C2) Ako su X_1 i X_2 podskupovi od A, onda su $\alpha(X_1)$ i $\alpha(X_2)$ podskupovi od B, pa dvostrukom primenom osobine (i) dobijamo

$$X_1 \subseteq X_2 \Rightarrow \alpha(X_1) \supseteq \alpha(X_2) \Rightarrow \beta\alpha(X_1) \subseteq \beta\alpha(X_2).$$

(C3) Kada na $\alpha\beta\alpha(X) = \alpha(X)$, što važi prema (1), primenimo preslikavanje β, dobijamo $\beta\alpha(\beta\alpha(X)) = \beta\alpha(X)$.

(3) Trivijalno važi.

□

U nastavku ćemo pokazati kako se može definisati Galoisova veza između proizvoljnih skupova A i B.

Teorema 2.3.2 *Neka su A i B neprazni skupovi i neka je $R \subseteq A \times B$. Definišimo preslikavanja*

$$\overrightarrow{R} : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(B) \ \ i \ \ \overleftarrow{R} : \mathcal{P}(B) \to \mathcal{P}(A)$$

na sledeći način

$$\begin{aligned} \overrightarrow{R}(X) &= \{y \in B : (\forall x \in X)\,(x,y) \in R\},\ X \subseteq A \\ \overleftarrow{R}(Y) &= \{x \in A : (\forall y \in Y)\,(x,y) \in R\},\ Y \subseteq B. \end{aligned}$$

Tada je par $(\overrightarrow{R}, \overleftarrow{R})$ Galoisova veza između skupova A i B.

Dokaz. Dokazaćemo da par $(\overrightarrow{R}, \overleftarrow{R})$ zadovoljava uslove (i) i (ii) iz definicije 2.3.1. Neka su $X, X_1, X_2 \in \mathcal{P}(A)$ i $Y, Y_1, Y_2 \in \mathcal{P}(B)$.

(i) Neka je $X_1 \subseteq X_2$ i $y \in \overrightarrow{R}(X_2)$. Tada za sve $x \in X_2$ važi $(x, y) \in R$. Međutim, zbog $X_1 \subseteq X_2$ je za sve $x \in X_1$ zadovoljeno $(x, y) \in R$, tj. $y \in \overrightarrow{R}(X_1)$.

Slično se pokazuje da $Y_1 \subseteq Y_2$ implicira $\overleftarrow{R}(Y_1) \supseteq \overleftarrow{R}(Y_2)$.

(ii) Imamo

$$\overleftarrow{R}(\overrightarrow{R}(X)) = \{x \in A : (\forall y \in \overrightarrow{R}(X))\,(x, y) \in R\}.$$

Tada je $X \subseteq \overleftarrow{R}(\overrightarrow{R}(X))$ jer su u $\overrightarrow{R}(X)$ sadržani baš oni $y \in B$ takvi da za sve $x \in X$ važi $(x, y) \in R$.

Slično, $Y \subseteq \overrightarrow{R}(\overleftarrow{R}(Y))$.

□

Par $(\overrightarrow{R}, \overleftarrow{R})$ nazivamo i *Galoisova veza indukovana relacijom R.*

Glava 3

Klonovi i hiperklonovi

Iako je hiperklon zapravo uopštenje pojma klona, ne mogu se svi rezultati iz teorije klonova direktno preneti na slučaj hiperklonova. U ovoj glavi ćemo prikazati neke pokušaje da se mreža hiperklonova potopi u mrežu klonova, koji, nažalost, nemaju željeni efekat. Još jedna poteškoća proizilazi iz činjenice da se saglasnost relacije sa hiperoperacijom može definisati na različite načine. Ovde ćemo takođe prezentovati neke od tih mogućih Galoisovih veza i ispitati njihove međusobne odnose.

3.1 Osnovne definicije i osobine

Postoji više načina da se uvedu pojmovi klona i hiperklona. U ovom poglavlju ćemo predstaviti neke od njih i navesti osnovna svojstva koja iz tih definicija proističu.

3.1.1 Pojam klona

U čitavom radu ćemo smatrati da je osnovni skup A konačan sa bar dva elementa. Preslikavanje $f : A^n \to A$ nazivamo *n-arna operacija* na A. Neka je $O_A^{(n)} = A^{A^n}$ skup svih n-arnih operacija na $A, n \geq 1$, i $O_A = \bigcup_{n\geq 1} O_A^{(n)}$ skup svih finitarnih operacija na A. Za $F \subseteq O_A$ neka je $F^{(n)} = F \cap O_A^{(n)}$.

Napomena. Ako je $n = 0$ onda se nularna operacija $f : \{\emptyset\} \to A$ može identifikovati sa elementom $a \in A$ za koji je $f(\emptyset) = a$. Međutim, ovakve operacije se mogu zameniti unarnim konstantnim operacijama. Tako se umesto prethodno pomenute nularne operacije posmatra unarna operacija $c_a : A \to A$ data sa $c_a(x) = a$, za sve $x \in A$.

Označimo sa π_i^n *i-tu n-arnu projekciju*:

$$\pi_i^n(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) = x_i,$$

i neka je Π_A skup svih projekcija svih konačnih arnosti skupa A.

Neka su $f \in O_A^{(n)}$ i $g_1, \dots, g_n \in O_A^{(m)}$. *Kompozicija* operacija f i $g_1, \dots, g_n$ je m-arna operacija $f(g_1, \dots g_n)$ definisana na sledeći način

$$f(g_1, \dots g_n)(x_1, \dots, x_m) = f(g_1(x_1, \dots, x_m), \dots, g_n(x_1, \dots, x_m)).$$

Definicija 3.1.1 *Skup $C \subseteq O_A$ se naziva* **klon operacija** *na A ako sadrži sve projekcije na A i zatvoren je u odnosu na kompoziciju operacija, tj. ako $f \in C^{(n)}$ i $g_1, \dots g_n \in C^{(m)}$, onda i $f(g_1, \dots g_n) \in C$.*

Primer 3.1.1 *Naredni skupovi predstavljaju klonove operacija:*

1) Skup O_A svih operacija na skupu A;

2) Skup Π_A svih projekcija na skupu A;

3) Skup svih idempotentnih operacija na skupu A (f je idempotentna *ako važi $f(x, \dots, x) = x$, za sve $x \in A$).*

Dokažimo sledeće jednostavno tvrđenje.

Tvrđenje 3.1.1 *Presek proizvoljne familije klonova je klon.*

Dokaz. Neka je $C_i \in O_A$, $i \in I \subseteq \mathbb{N}$, proizvoljna familija klonova. Označimo $C = \bigcap_{i \in I} C_i$. Kako $\Pi_A \subseteq C_i$, za sve $i \in I$, to je $\Pi_A \subseteq \bigcap_{i \in I} C_i = C$. Pokažimo još da je C zatvoren u odnosu na kompoziciju operacija. Neka je $f \in C^{(n)}$ i $g_1, \dots g_n \in C^{(m)}$. Tada imamo

$$\begin{aligned} f, g_1, \dots g_n \in C = \bigcap_{i \in I} C_i \quad &\Leftrightarrow (\forall i \in I)\, f, g_1, \dots, g_n \in C_i \\ &\Leftrightarrow (\forall i \in I)\, f(g_1, \dots, g_n) \in C_i \text{ (jer je svako } C_i \text{ klon)} \\ &\Leftrightarrow f(g_1, \dots, g_n) \in \bigcap_{i \in I} C_i = C. \end{aligned}$$

Dakle, $C = \bigcap_{i \in I} C_i$ je klon. $\Box$

Sada za proizvoljan skup operacija F možemo odrediti najmanji klon koji sadrži F na sledeći način

$$\langle F \rangle = \bigcap \{C : F \subseteq C \text{ i } C \text{ je klon}\}.$$

Za $\langle F \rangle$ još kažemo da je *generisan* skupom F. Klon C je *konačno generisan* ako važi $C = \langle \{f_1, \ldots, f_n\} \rangle$, za neke $f_i \in O_A$.

Definicija 3.1.2 *Za skup $F \subseteq O_A$ kažemo da je* **kompletan** *ako važi*

$$\langle F \rangle = O_A.$$

Definicija klona se može posmatrati i u kontekstu univerzalne algebre. Naime, svaki klon C na skupu A je zapravo skup termovskih operacija algebre $\mathcal{A} = (A, C)$. S druge strane, skup termovskih operacija proizvoljne algebre $\mathcal{A} = (A, F)$ čini klon na skupu A.

Međutim, ovo nisu jedine definicije klona operacija. Sledeća teorema predstavlja motivaciju za još jedan način uvođenja ovog pojma.

Teorema 3.1.1 *Svi klonovi operacija na skupu A čine algebarsku mrežu $\mathcal{L}_A$ u odnosu na skupovnu inkluziju. Najmanji element te mreže je Π_A, a najveći O_A. Mrežne operacije su definisane sa*

$$C_1 \wedge C_2 = C_1 \cap C_2 \quad i \quad C_1 \vee C_2 = \langle C_1 \cup C_2 \rangle.$$

Dokaz. Dokazaćemo da je $\langle\ \rangle : \mathcal{P}(O_A) \to \mathcal{P}(O_A)$ algebarski operator zatvaranja.

(C1) Uslov $F \subseteq \langle F \rangle$ je trivijalno zadovoljen.

(C2) Pokazujemo da $F \subseteq G$ povlači $\langle F \rangle \subseteq \langle G \rangle$. Neka je $g \in \langle F \rangle$. Tada postoje $f, g_1, \ldots, g_n \in F$ tako da je $g = f(g_1, \ldots, g_n)$. Međutim, $f, g_1, \ldots, g_n \in G$, pa je $g = f(g_1, \ldots, g_n) \in \langle G \rangle$.

(C3) Kako je očigledno $\langle F \rangle$ najmanji klon koji sadrži $\langle F \rangle$, dobijamo $\langle \langle F \rangle \rangle = \langle F \rangle$.

(C4) Pokažimo da važi

$$\langle F\rangle = \bigcup\{\langle G\rangle : G \subseteq F \text{ i } G \text{ je konačan}\}.$$

Pretpostavimo da neka operacija g pripada $\langle F\rangle$. Tada postoje operacije $f, g_1, \ldots, g_n \in F$ tako da je $g = f(g_1, \ldots, g_n)$. Uzmimo $G = \{f, g_1, \ldots, g_n\}$. Trivijalno, $g \in \langle G\rangle$, pri čemu je $G \subseteq F$ i $|G| = n + 1$. S druge strane, ako $g \in \bigcup\{\langle G\rangle : G \subseteq F \text{ i } G \text{ je konačan}\}$, onda postoji neki konačan podskup G od F takav da $g \in \langle G\rangle$, što implicira postojanje $f, g_1, \ldots, g_n \in G$ takvih da je $g = f(g_1, \ldots, g_n)$. Međutim, $f, g_1, \ldots, g_n$ su istovremeno u F, pa je $g = f(g_1, \ldots, g_n) \in \langle F\rangle$.

Dakle, $\mathcal{L}_A$ je algebarska mreža. $\square$

Na osnovu prethodne teoreme i teoreme Birkhoff-Frinka jasno je da je $C \subseteq O_A$ klon ako i samo ako je poduniverzum neke algebre. U nastavku eksplicitno navodimo takvu algebru. Uvedimo unarne operacije ζ, τ, Δ i binarnu operaciju $*$ na O_A, pri čemu ćemo, zbog jednostavnosti zapisa, slike ovih operacija označavati sa:

$$\zeta f = \zeta(f), \quad \tau f = \tau(f), \quad \Delta f = \Delta(f), \quad f * g = *(f, g).$$

- Za $f \in O_A^{(1)}$ neka je $\zeta f = \tau f = \Delta f = f$;
- za $f \in O_A^{(n)}, n \geq 2$, neka su $\zeta f, \tau f \in O_A^{(n)}, \Delta f \in O_A^{(n-1)}$ definisane sa

$$\begin{aligned}
(\zeta f)(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= f(x_2, \ldots, x_n, x_1)\\
(\tau f)(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) &= f(x_2, x_1, x_3, \ldots, x_n)\\
(\Delta f)(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) &= f(x_1, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1});
\end{aligned}$$

- za $f \in O_A^{(n)}$ i $g \in O_A^{(m)}$ neka je $f * g \in O_A^{(m+n-1)}$ definisana sa

$$(f*g)(x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_{m+n-1}) = f(g(x_1, \ldots, x_m), x_{m+1}, \ldots, x_{m+n-1}).$$

Teorema 3.1.2 *Skup $C \subseteq O_A$ je klon ako i samo ako je poduniverzum algebre $\mathcal{O}_A = (O_A; *, \zeta, \tau, \Delta, \pi_1^2)$.*

Dokaz. ($\Rightarrow$) Pretpostavimo da je $C \subseteq O_A$ klon. Tada je $\Pi_A \subseteq C$, pa imamo $\pi_1^2 \in C$, a pošto je C takođe zatvoreno u odnosu na kompoziciju operacija, za $f \in C^{(n)}$ i $g \in C^{(m)}$ važi

$$\zeta f = f(\pi_2^n, \ldots, \pi_n^n, \pi_1^n),$$

$$\tau f = f(\pi_2^n, \pi_1^n, \pi_3^n, \ldots, \pi_n^n),$$

$$\Delta f = f(\pi_1^{n-1}, \pi_1^{n-1}, \pi_2^{n-1}, \ldots, \pi_{n-1}^{n-1}) \quad \text{i}$$

$$f * g = f(g(\pi_1^{m+n-1}, \ldots, \pi_m^{m+n-1}), \pi_{m+1}^{m+n-1}, \ldots, \pi_{m+n-1}^{m+n-1}).$$

($\Leftarrow$) Ako je C poduniverzum algebre $\mathcal{O}_A$, treba pokazati da se sve projekcije i kompozicije mogu prikazati pomoću operacija $\{*, \zeta, \tau, \Delta, \pi_1^2\}$.

Pokažimo indukcijom po $n \in \mathbb{N}$ da za sve $i \in \{1, \ldots, n\}$ važi $\pi_i^n \in C$.

Za $n = 1$ imamo $\pi_1^1 = \Delta\pi_1^2$, jer za sve $x_1 \in A$ važi

$$(\Delta\pi_1^2)(x_1) = \pi_1^2(x_1, x_1) = x_1 = \pi_1^1(x_1).$$

Za $n = 2$ je $\pi_2^2 = \tau\pi_1^2$, jer za sve $x_1, x_2 \in A$ važi

$$(\tau\pi_1^2)(x_1, x_2) = \pi_1^2(x_2, x_1) = x_2 = \pi_2^2(x_1, x_2).$$

Pretpostavimo da tvrđenje važi za $n - 1$, tj. za svako $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ je $\pi_i^{n-1} \in C$.

Tada za svako $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ imamo $\pi_i^n = \pi_1^2 * \pi_i^{n-1}$ jer za proizvoljne $x_1, \ldots, x_n \in A$ važi

$$\begin{aligned}(\pi_1^2 * \pi_i^{n-1})(x_1, \ldots, x_n) &= \pi_1^2(\pi_i^{n-1}(x_1, \ldots, x_{n-1}), x_n) = \pi_1^2(x_i, x_n)\\ &= x_i = \pi_i^n(x_1, \ldots, x_n).\end{aligned}$$

Takođe je $\pi_n^n = \pi_2^2 * \pi_1^{n-1}$ jer za sve $x_1, \ldots, x_n \in A$ važi

$$\begin{aligned}(\pi_2^2 * \pi_1^{n-1})(x_1, \ldots, x_n) &= \pi_2^2(\pi_1^{n-1}(x_1, \ldots, x_{n-1}), x_n) = \pi_2^2(x_1, x_n)\\ &= x_n = \pi_n^n(x_1, \ldots, x_n).\end{aligned}$$

Dokazaćemo da je C zatvoren u odnosu na kompoziciju. Neka su $f \in C^{(n)}$ i $g_1, \ldots, g_n \in C^{(m)}$. Posmatraćemo kompoziciju $f(g_1, \ldots, g_n)$ kao $(n \cdot m)$-arnu operaciju, umesto kao operaciju iz $O_A^{(m)}$, tj. uzećemo

$$f(g_1(x_1^1, \ldots, x_m^1), \ldots g_n(x_1^n, \ldots, x_m^n)) = f(g_1, \ldots g_n)(x_1^1, \ldots, x_m^1, \ldots, x_1^n, \ldots, x_m^n),$$

(gornjim indeksima su označene kopije istih promenljivih). Jednostavno se pokazuje da se od ove kompozicije može dobiti uobičajena m-arna pomoću operacija ζ, τ i Δ. Na primer,

$$\begin{aligned}
\tau\zeta\Delta\zeta^2\Delta f(x_1,x_2) &= \tau\zeta\Delta\zeta^2 f(x_1,x_1,x_2) = \tau\zeta\Delta f(x_2,x_1,x_1)\\
&= \tau\zeta f(x_2,x_2,x_1,x_1) = \tau f(x_2,x_1,x_1,x_2)\\
&= f(x_1,x_2,x_1,x_2).
\end{aligned}$$

Sada ćemo indukcijom po n pokazati da je

$$f(g_1,\dots g_n) = \zeta(\zeta(\dots\zeta(\zeta f * g_n) * g_{n-1}\dots) * g_2) * g_1.$$

Dokažimo da važi za $n = 1$.

$$\begin{aligned}
(\zeta f * g_1)(x_1,\dots,x_m) &= \zeta f(g_1(x_1,\dots,x_m))\\
&= f(g_1(x_1,\dots,x_m))\\
&= f(g_1)(x_1,\dots,x_m).
\end{aligned}$$

Pretpostavimo da tvrđenje važi za $n-1$. Tada imamo

$$\begin{aligned}
\zeta(\zeta(\dots\zeta(\zeta f * g_n) * g_{n-1}\dots) * g_2) * g_1 &= (\zeta f * g_n)(g_1,\dots,g_{n-1})\\
&= \zeta f(g_n, g_1,\dots,g_{n-1})\\
&= f(g_1,\dots,g_{n-1},g_n).
\end{aligned}$$

Dakle, svaki poduniverzum algebre $\mathcal{O}_A$ sadrži sve projekcije i zatvoren je u odnosu na kompoziciju operacija, što znači da je klon. $\square$

3.1.2 Pojam hiperklona

Neka je $\mathcal{P}(A)$ partitivni skup od A i neka je $P_A^* = \mathcal{P}(A)\backslash\{\emptyset\}$. Preslikavanje $f : A^n \to P_A^*$ nazivamo *n-arna hiperoperacija* na A. Neka je $H_A^{(n)} = (P_A^*)^{A^n}$ skup svih n-arnih hiperoperacija na A, $n \geq 1$, a $H_A = \bigcup_{n\geq 1} H_A^{(n)}$ skup svih finitarnih hiperoperacija na A. Za $F \subseteq H_A$ označimo $F^{(n)} = F \cap H_A^{(n)}$.

U slučaju da su sve vrednosti n-arne hiperoperacije jednoelementni skupovi, možemo je posmatrati kao n-arnu operaciju (ako svaki singlton $\{a\}$ izjednačimo sa elementom a). Zato ćemo poistovetiti skup svih operacija sa skupom svih hiperoperacija čije su vrednosti singltoni i oba skupa ćemo označavati sa O_A.

Označimo sa π_i^n *i-tu n-arnu (hiper)projekciju*:

$$\pi_i^n(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) = \{x_i\}.$$

Neka su $f \in H_A^{(n)}$ i $g_1, \ldots, g_n \in H_A^{(m)}$, $m, n \in \mathbb{N}$. *Kompozicija hiperoperacija* f i $g_1, \ldots, g_n$ je m-arna hiperoperacija $f[g_1, \ldots, g_n]$ data sa

$$f[g_1, \ldots, g_n](x_1, \ldots, x_m) = \bigcup_{\substack{y_i \in g_i(x_1, \ldots, x_m) \\ 1 \leq i \leq n}} f(y_1, \ldots, y_n). \tag{3.1}$$

Lako se uočava da se kompozicija hiperoperacija poklapa sa kompozicijom operacija ako se primenjuje na hiperoperacije čije su vrednosti singltoni, odnosno za $f, g_1, \ldots, g_n \in O_A$ imamo $f[g_1, \ldots, g_n] = f(g_1, \ldots, g_n)$.

Definicija 3.1.3 *Skup hiperoperacija koji sadrži sve projekcije i zatvoren je u odnosu na kompoziciju nazivamo* **hiperklon**.

Primer 3.1.2 *Skupovi svih projekcija Π_A, svih operacija O_A i svih hiperoperacija H_A na skupu A su hiperklonovi.*

Kao i u slučaju klonova, presek proizvoljne familije hiperklonova je ponovo hiperklon, pa za svaki skup $F \subseteq H_A$ možemo odrediti najmanji hiperklon koji ga sadrži, kao presek svih hiperklonova koji su nadskupovi od F. Označimo takav hiperklon sa $\langle F \rangle_h$. Jasno, ako je $F \subseteq O_A$, onda važi $\langle F \rangle_h = \langle F \rangle$.

Teorema analogna teoremi 3.1.1 važi i za hiperklonove.

Teorema 3.1.3 *Neka je $\mathcal{L}_A^h$ skup svih hiperklonova na skupu A. Tada je $(\mathcal{L}_A^h, \subseteq)$ algebarska mreža. Najmanji element te mreže je Π_A, a najveći H_A. Mrežne operacije su definisane sa*

$$C_1 \wedge_h C_2 = C_1 \cap C_2 \quad i \quad C_1 \vee_h C_2 = \langle C_1 \cup C_2 \rangle_h.$$

Primetimo da za $C_1, C_2 \in O_A$ važi

$$C_1 \wedge_h C_2 = C_1 \wedge C_2 \quad \text{i} \quad C_1 \vee_h C_2 = C_1 \vee C_2,$$

pa je mreža klonova $\mathcal{L}_A$ podmreža mreže hiperklonova $\mathcal{L}_A^h$.

Kako je mreža hiperklonova algebarska, i hiperklonove možemo posmatrati kao poduniverzume neke algebre. Definišimo unarne operacije ζ, τ, Δ i binarnu operaciju $\circ$ na H_A:

- za $f \in H_A^{(1)}$ neka je $\zeta f = \tau f = \Delta f = f$;
- za $f \in H_A^{(n)}, n \geq 2$, neka su $\zeta f, \tau f \in H_A^{(n)}, \Delta f \in H_A^{(n-1)}$ date sa

$$
\begin{aligned}
(\zeta f)(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= f(x_2, \ldots, x_n, x_1) \\
(\tau f)(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) &= f(x_2, x_1, x_3, \ldots, x_n) \\
(\Delta f)(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) &= f(x_1, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1});
\end{aligned}
$$

- za $f \in H_A^{(n)}$ i $g \in H_A^{(m)}$ neka je $f \circ g \in H_A^{(m+n-1)}$ data sa

$$(f \circ g)(x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_{m+n-1}) = \bigcup_{y \in g(x_1, \ldots, x_m)} f(y, x_{m+1}, \ldots, x_{m+n-1}).$$

Jasno, restrikcija operacije $\circ$ na O_A je zapravo operacija $*$, tj. za $f, g \in O_A$ važi $f \circ g = f * g$.

Slično kao u slučaju klonova se dokazuje

Teorema 3.1.4 *Skup $C \subseteq H_A$ je hiperklon ako i samo ako je poduniverzum algebre $\mathcal{H}_A = (H_A; \circ, \zeta, \tau, \Delta, \pi_1^2)$.*

3.1.3 Operacije indukovane hiperoperacijama

Do sad smo posmatrali neka svojstva klonova koja se direktno prenose na hiperklonove. No, svakako bi bilo pogrešno pretpostaviti da se hiperklonovi u nekom smislu mogu poistovetiti sa klonovima, odnosno da svaka osobina hiperklonova ima svoj analogon u slučaju klonova. U nastavku ćemo predstaviti jedan način da svakoj hiperoperaciji pridružimo odgovarajuću operaciju. Naime, svaka hiperoperacija na skupu A indukuje operaciju na skupu P_A^*, odnosno možemo definisati preslikavanje

$$\# : H_A \to O_{P_A^*}, \text{ dato sa } \#(f) = f^{\#},$$

gde je za sve $A_1, \ldots, A_n \in P_A^*$

$$f^{\#}(A_1, \ldots, A_n) = \bigcup \{f(a_1, \ldots, a_n) : a_i \in A_i, 1 \leq i \leq n\}.$$

Ako je $F \subseteq H_A$, označimo $F^{\#} = \{f^{\#} : f \in F\}$.

Napomena. Primetimo da za $f \in H_A^{(n)}$ i $g_1, \ldots, g_n \in H_A^{(m)}$ važi

$$f[g_1, \ldots, g_n](x_1, \ldots, x_m) = f^{\#}(g_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, g_n(x_1, \ldots, x_m)),$$

pa ćemo u ostatku rada, kada nam to bude zgodno, koristiti ovaj zapis umesto (3.1).

U ovom obliku je hiperoperacije ispitivao Rosenberg u [18] i [19], a Pöschel i Drescher su u [6] naveli neke prednosti i nedostatke ovakvog pristupa.

Iako se na prvi pogled čini da bi preslikavanje # moglo biti potapanje algebre $(H_A; \circ, \zeta, \tau, \Delta, \pi_1^{2,A})$ u $(O_{P_A^*}; *, \zeta, \tau, \Delta, \pi_1^{2,P_A^*})$, to nije potpuno tačno, tj. važi

Tvrđenje 3.1.2 [18] *Preslikavanje* $\# : H_A \to O_{P_A^*}$ *dato sa* $\#(f) = f^{\#}$ *je monomorfizam iz* $(H_A; \circ, \zeta, \tau, \pi_1^{2,A})$ *u* $(O_{P_A^*}; *, \zeta, \tau, \pi_1^{2,P_A^*})$. *U opštem slučaju ne važi* $(\Delta f)^{\#} = \Delta f^{\#}$.

Dokaz. Pokažimo najpre da je # injektivno.

Neka za proizvoljne $f, g \in H_A$ važi $\#(f) = \#(g)$. To znači da za sve $A_1, \ldots, A_n \in P_A^*$ imamo $f^{\#}(A_1, \ldots, A_n) = g^{\#}(A_1, \ldots, A_n)$, pa to važi i za proizvoljne singltone, tj.

$$f^{\#}(\{a_1\}, \ldots, \{a_n\}) = g^{\#}(\{a_1\}, \ldots, \{a_n\}), \text{ za sve } a_1, \ldots, a_n \in A.$$

Odavde je $f(a_1, \ldots, a_n) = g(a_1, \ldots, a_n)$, za sve $a_1, \ldots, a_n \in A$, pa je $f = g$.

U nastavku ćemo pokazati da je # saglasno sa operacijama $\circ, \zeta$ i τ.

Neka $f \in H_A^{(n)}$ i $g \in H_A^{(m)}$. Zbog jednostavnosti zapisa, označimo

$p = m + n - 1$. Tada za sve $A_1, \ldots, A_p \in P_A^*$ imamo

$$\begin{aligned}
(f \circ g)^{\#}(A_1, \ldots, A_p) &= \bigcup \{(f \circ g)(a_1, \ldots, a_p) : a_i \in A_i, 1 \le i \le p\} \\
&= \bigcup \{f(y, a_{m+1}, \ldots, a_p) : a_i \in A_i, 1 \le i \le p, \\
&\qquad y \in g(a_1, \ldots, a_m)\} \\
&= f^{\#}(\bigcup \{g(a_1, \ldots, a_m) : a_i \in A_i, 1 \le i \le m\}, \\
&\qquad A_{m+1}, \ldots, A_p) \\
&= f^{\#}(g^{\#}(A_1, \ldots, A_m), A_{m+1}, \ldots, A_p) \\
&= (f^{\#} * g^{\#})(A_1, \ldots, A_p).
\end{aligned}$$

Neka je $f \in H_A$. Tada za sve $A_1, \ldots, A_n \in P_A^*$ važi

$$\begin{aligned}
(\zeta f)^{\#}(A_1, \ldots, A_n) &= \bigcup \{\zeta f(a_1, a_2, \ldots, a_n) : a_i \in A_i,\ 1 \le i \le n\} \\
&= \bigcup \{f(a_2, \ldots, a_n, a_1) : a_i \in A_i,\ 1 \le i \le n\} \\
&= f^{\#}(A_2, \ldots, A_n, A_1) \\
&= \zeta f^{\#}(A_1, \ldots, A_n).
\end{aligned}$$

Dakle, $(\zeta f)^{\#} = \zeta f^{\#}$. Slično se pokazuje i $(\tau f)^{\#} = \tau f^{\#}$. Trivijalno važi $\#(\pi_1^{2,A}) = \pi_1^{2,P_A^*}$.

Stoga je $\#$ monomorfizam iz $(H_A; \circ, \zeta, \tau, \pi_1^{2,A})$ u $(O_{P_A^*}; *, \zeta, \tau, \pi_1^{2,P_A^*})$.

Međutim, generalno ne važi $(\Delta f)^{\#} = \Delta f^{\#}$. Naime, za sve $A_1, \ldots, A_{n-1} \in P_A^*$ je

$$\begin{aligned}
(\Delta f)^{\#}(A_1, \ldots, A_{n-1}) &= \bigcup \{\Delta f(a_1, \ldots, a_{n-1}) : a_i \in A_i,\ 1 \le i \le n-1\} \\
&= \bigcup \{f(a_1, a_1, \ldots, a_n) : a_i \in A_i,\ 1 \le i \le n-1\}
\end{aligned}$$

dok je

$$\begin{aligned}
(\Delta f^{\#})(A_1, \ldots, A_{n-1}) &= f^{\#}(A_1, A_1, \ldots, A_n) \\
&= \bigcup \{f(a_1', a_1'', \ldots, a_n) : a_1', a_1'' \in A_1,\ a_i \in A_i, \\
&\qquad 2 \le i \le n-1\},
\end{aligned}$$

pri čemu a_1' i a_1'' mogu biti različiti elementi iz A_1. Na primer, neka je f binarna hiperoperacija na $\{0, 1\}$ data sa

f	0	1
0	$\{0\}$	$\{1\}$
1	$\{0,1\}$	$\{0\}$

i neka je $A_1 = \{0, 1\}$. Tada imamo

$$\begin{aligned}(\Delta f^{\#})(A_1) &= f^{\#}(A_1, A_1) = f(0,0) \cup f(0,1) \cup f(1,0) \cup f(1,1) = \{0,1\},\\ (\Delta f)^{\#}(A_1) &= \Delta f(0) \cup \Delta f(1) = f(0,0) \cup f(1,1) = \{0\}.\end{aligned}$$

□

Iz prethodnog tvrđenja neposredno zaključujemo da ako je C hiperklon na A, onda $C^{\#}$ ne mora biti klon na P_A^*, s obzirom da u opštem slučaju nije zatvoren u odnosu na operaciju Δ.

Preslikavanje $\#$ nije sirjektivno jer za proizvoljno $f \in O_{P_A^*}$ ne možemo uvek naći $f' \in H_A$ takvo da je $f = (f')^{\#}$.

Primer 3.1.3 *Neka je $A = \{0, 1\}$ i $f \in O_{P_A^*}^{(1)}$ definisano sa*

	$\{0\}$	$\{1\}$	$\{0,1\}$
f	$\{0\}$	$\{0,1\}$	$\{1\}$

Pretpostavimo da postoji $f' \in H_A$ tako da je $f = (f')^{\#}$. Stoga mora biti $f'(0) = f(\{0\}) = \{0\}$ i $f'(1) = f(\{1\}) = \{0,1\}$. Međutim, tada dobijamo

$$(f')^{\#}(\{0,1\}) = f'(0) \cup f'(1) = \{0,1\} \neq \{1\} = f(\{0,1\}),$$

odnosno $f \neq (f')^{\#}$.

3.2 Mreže klonova i hiperklonova

Videli smo da su i mreža klonova i mreža hiperklonova algebarske. Međutim, one se po mnogo čemu i razlikuju. Na početku ovog poglavlja ćemo dati jednu jednostavnu vezu između pomenutih mreža, koja nije mrežni homomorfizam. Potom ćemo reći nekoliko reči o mrežama klonova i hiperklonova na dvoelementnom skupu i pokazati da mreža hiperklonova na skupu $A = \{0, 1\}$ ima kardinalnost kontinuum.

Tvrđenje 3.2.1 *Ako je $C \subsetneq H_A$ hiperklon, onda je $C \cap O_A$ klon.*

Dokaz. Skup $C \cap O_A$ sadrži sve projekcije jer svaki hiperklon sadrži sve projekcije. Neka su $f \in C^{(n)} \cap O_A$ i $g_1, \ldots, g_n \in C^{(m)} \cap O_A$. Pošto se kompozicija hiperoperacija poklapa sa kompozicijom operacija ako se primenjuje na hiperoperacije čije su vrednosti singltoni (i kompozicija operacija je uvek operacija), a znamo da je C zatvoreno u odnosu na kompoziciju, onda je i $C \cap O_A$ zatvoreno u odnosu na kompoziciju, tj. važi $f(g_1, \ldots, g_n) \in C^{(m)} \cap O_A$, čime smo pokazali da je $C \cap O_A$ klon. □

Sada imamo vezu između mreže hiperklonova i mreže klonova

$$\varphi : \mathcal{L}_A^h \to \mathcal{L}_A, \text{ dato sa } \varphi(C) = C \cap O_A.$$

Očigledno je φ saglasno sa $\subseteq$, ali nije mrežni homomorfizam. Naime, φ se slaže sa $\wedge$ jer je za sve $C_1, C_2 \in \mathcal{L}_A^h$

$$\begin{aligned} \varphi(C_1 \wedge_h C_2) &= \varphi(C_1 \cap C_2) = (C_1 \cap C_2) \cap O_A \\ &= (C_1 \cap O_A) \cap (C_2 \cap O_A) \\ &= \varphi(C_1) \cap \varphi(C_2) = \varphi(C_1) \wedge \varphi(C_2). \end{aligned}$$

Za operaciju $\vee$ imamo

$$\begin{aligned} \varphi(C_1 \vee_h C_2) &= (C_1 \vee_h C_2) \cap O_A = \langle C_1 \cup C_2 \rangle_h \cap O_A, \\ \varphi(C_1) \vee \varphi(C_2) &= (C_1 \cap O_A) \vee (C_2 \cap O_A) = \langle (C_1 \cup C_2) \cap O_A \rangle. \end{aligned}$$

Ako $g \in \langle (C_1 \cup C_2) \cap O_A \rangle$, onda postoje $f, g_1, \ldots, g_n \in (C_1 \cup C_2) \cap O_A$ tako da je $g = f(g_1, \ldots, g_n)$. Odavde je jasno $g \in \langle C_1 \cup C_2 \rangle_h \cap O_A$. Dakle, važi $\varphi(C_1) \vee \varphi(C_2) \subseteq \varphi(C_1 \vee_h C_2)$.

Međutim, ako $g \in \langle C_1 \cup C_2 \rangle_h \cap O_A$, onda je g operacija koja je generisana nekim hiperoperacijama iz $C_1 \cup C_2$, dok su svi elementi iz $\langle (C_1 \cup C_2) \cap O_A \rangle$ generisani operacijama iz $C_1 \cup C_2$. Stoga, inkluzija $\varphi(C_1 \vee_h C_2) \subseteq \varphi(C_1) \vee \varphi(C_2)$ u opštem slučaju ne mora biti zadovoljena jer je moguće da kompozicija hiperoperacija koje nisu u O_A bude u O_A, što ćemo pokazati u sledećem primeru.

Primer 3.2.1 *Neka je $A = \{0, 1, 2\}$, i neka su $f \in H_A^{(2)}$ i $g_1, g_2 \in H_A^{(1)}$ date sa*

f	0	1	2
0	$\{0\}$	$\{0\}$	$\{2\}$
1	$\{1\}$	$\{1\}$	$\{0\}$
2	$\{0\}$	$\{1\}$	$\{2\}$

	0	1	2
g_1	$\{1\}$	$\{0\}$	$\{0,2\}$
g_2	$\{1\}$	$\{0,1\}$	$\{2\}$

Tada očigledno $g_1, g_2 \in H_A \setminus O_A$, ali za $g = f[g_1, g_2]$ imamo

$$\begin{aligned} f[g_1,g_2](0) &= f^{\#}(g_1(0), g_2(0)) = f^{\#}(\{1\}, \{1\}) \\ &= f(1,1) = \{1\}, \\ f[g_1,g_2](1) &= f^{\#}(g_1(1), g_2(1)) = f^{\#}(\{0\}, \{0,1\}) \\ &= f(0,0) \cup f(0,1) = \{0\}, \\ f[g_1,g_2](2) &= f^{\#}(g_1(2), g_2(2)) = f^{\#}(\{0,2\}, \{2\}) \\ &= f(0,2) \cup f(2,2) = \{2\}, \end{aligned}$$

odnosno g je u O_A.

Značajna razlika između mreže klonova i mreže hiperklonova na nekom skupu A uočava se već u slučaju kada je A dvoelementni skup.

Naime, E.L. Post je 1920. godine u dodatku svoje doktorske disertacije (što je kasnije objavljeno i 1941. godine u monografiji *Two-valued Iterative Systems of Mathematical Logic*) u potpunosti opisao mrežu klonova operacija na dvoelementnom skupu i pokazao da tih klonova ima prebrojivo mnogo. Međutim, H. Machida je u [10] dokazao da je mreža hiperklonova na dvoelementnom skupu kardinalnosti kontinuum. Ovaj rezultat ćemo detaljnije predstaviti u nastavku poglavlja.

Za $A = \{0, 1\}$ je H_A prebrojiv, pa je

$$|\mathcal{L}_A^h| \leq |\mathcal{P}(H_A)| = 2^{|H_A|} = \mathfrak{c}. \tag{3.2}$$

Dakle, da bismo pokazali da je kardinalnost mreže $\mathcal{L}_A^h$ baš $\mathfrak{c}$, dovoljno je pronaći kontinuum različitih hiperklonova na A. U tu svrhu ćemo definisati sledeću familiju hiperoperacija.

Definicija 3.2.1 *Za svako $n \geq 1$, neka je g_n n-arna hiperoperacija na $\{0,1\}$ data sa*

$$g_n(x_1,\ldots,x_n) = \begin{cases} \{1\}, & \text{za } x_1+\ldots+x_n \leq 1, \\ \{0,1\}, & \text{inače.} \end{cases}$$

Označimo $\mathcal{G} = \{g_n : n \geq 1\}$ i $\mathcal{G}_n = \mathcal{G} \setminus \{g_n\}$, $n \geq 1$.

Lema 3.2.1 *Za svako $n \geq 1$, važi $g_n \notin \langle \mathcal{G}_n \rangle_h$.*

Dokaz. Označimo sa Π_2 skup svih projekcija na $\{0,1\}$. Primetimo da za svaku m-arnu hiperoperaciju $f \in \langle \mathcal{G}_n \rangle_h \setminus \Pi_2$, i za sve $a_1,\ldots,a_m \in \{0,1\}$ važi $1 \in f(a_1,\ldots,a_m)$.

Pretpostavimo da $g_n \in \langle \mathcal{G}_n \rangle_h$. Tada za neko $m \neq n$ postoje $g_m, h_1,\ldots,h_m \in \langle \mathcal{G}_n \rangle_h$ tako da je

$$g_n = g_m[h_1,\ldots,h_m].$$

Razlikujemo sledeće slučajeve:

1) Postoje različiti $i,j \in \{1,\ldots,m\}$ takvi da $h_i, h_j \in \langle \mathcal{G}_n \rangle_h \setminus \Pi_2$. Na osnovu definicije operacije g_m zaključujemo da važi

$$g_m(x_1,\ldots,x_m) = g_m(x_{\pi(1)},\ldots,x_{\pi(m)}),$$

gde je π proizvoljna permutacija skupa $\{1,\ldots,m\}$. Zato ćemo zbog jednostavnosti zapisa pretpostaviti da $h_1, h_2 \in \langle \mathcal{G}_n \rangle_h \setminus \Pi_2$. Tada za $\bar{0} = (0,\ldots,0)$ dobijamo

$$\begin{aligned} \{1\} = g_n(\bar{0}) &= g_m[h_1,h_2,h_3,\ldots,h_m](\bar{0}) \\ &= g_m^{\#}(h_1(\bar{0}),h_2(\bar{0}),h_3(\bar{0}),\ldots,h_m(\bar{0})) \\ &\supseteq g_m^{\#}(\{1\},\{1\},h_3(\bar{0}),\ldots,h_m(\bar{0})) \\ &= \{0,1\}, \end{aligned}$$

što nije moguće.

2) Postoji tačno jedno $h_i \in \langle \mathcal{G}_n \rangle_h \setminus \Pi_2$. Kao i u prethodnom slučaju možemo uzeti da je $h_i = h_1$. Tada $h_2 \in \Pi_2$, tj. $h_2 = \pi_j^n$, za neko $j \in \{1, \ldots, n\}$. Neka je $\bar{a} = (a_1, \ldots, a_n)$, tako da je $a_j = 1$ i $a_\ell = 0$, za $\ell \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{j\}$.

$$\begin{aligned} \{1\} = g_n(\bar{a}) &= g_m[h_1, \pi_j^n, \pi_{j_3}^n, \ldots, \pi_{j_m}^n](\bar{a}) \\ &= g_m^{\#}(h_1(\bar{a}), \pi_j^n(\bar{a}), \pi_{j_3}^n(\bar{a}), \ldots, \pi_{j_m}^n(\bar{a})) \\ &\supseteq g_m^{\#}(\{1\}, \{1\}, a_{j_3}, \ldots, a_{j_m}) \\ &= \{0, 1\}, \end{aligned}$$

što takođe nije moguće.

3) Pretpostavimo $\{h_1, \ldots, h_m\} \subseteq \Pi_2$. Tada postoje $i_1, \ldots, i_m \in \{1, \ldots, n\}$ tako da

$$g_n(x_1, \ldots, x_n) = g_m(x_{i_1}, \ldots, x_{i_m}).$$

Ako postoje različiti $j, k \in \{1, \ldots, m\}$, takvi da je $i_j = i_k$, tada za n-torku $\bar{a} = (a_1, \ldots, a_n)$, takvu da je $a_{i_j} = 1$ i $a_\ell = 0$, za $\ell \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{i_j\}$, dobijamo

$$\{1\} = g_n(\bar{a}) = g_m(a_{i_1}, \ldots, 1, \ldots, 1, \ldots, a_{i_m}) = \{0, 1\}.$$

što je očigledno nemoguće.

Druga mogućnost je da su svi $i_1, \ldots, i_m$ međusobno različiti. Odavde, pošto je $g_n \neq g_m$, sledi $m < n$, pa postoji $j \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{i_1, \ldots, i_m\}$. Izaberimo n-torku $\bar{a} = (a_1, \ldots, a_n)$, tako da je $a_j = a_{i_1} = 1$ i $a_\ell = 0$, za $\ell \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{j, i_1\}$. Tada je

$$\{0, 1\} = g_n(\bar{a}) = g_m(a_{i_1}, \ldots, a_{i_m}) = \{1\},$$

pa ponovo imamo kontradikciju.

Dakle, za sve moguće slučajeve pretpostavka da $g_n \in \langle \mathcal{G}_n \rangle_h$ dovodi do kontradikcije, što znači da $g_n \notin \langle \mathcal{G}_n \rangle_h$. $\square$

Sada jednostavno možemo dokazati sledeću teoremu.

Teorema 3.2.1 *Mreža $\mathcal{L}^h_{\{0,1\}}$ svih hiperklonova na skupu $\{0, 1\}$ je kardinalnosti kontinuum.*

Dokaz. Iz prethodne leme direktno sledi da ako su F_1 i F_2 različiti neprazni podskupovi od $\mathcal{G}$, onda oni generišu različite hiperklonove, tj. $\langle F_1\rangle_h \neq \langle F_2\rangle_h$. Kako je $\mathcal{G}$ prebojiv, to je $|\mathcal{P}(\mathcal{G}) \setminus \{\emptyset\}| = \mathfrak{c}$, što znači da sigurno imamo bar kontinuum različitih hiperklonova na $\{0,1\}$, pa zbog 3.2 sledi $\left|\mathcal{L}^h_{\{0,1\}}\right| = \mathfrak{c}$. □

3.3 Galoisove veze

Kao što smo već napomenuli u uvodu, Galoisove veze su od velike važnosti u opisivanju mreža klonova i hiperklonova. U ovom poglavlju ćemo najpre navesti osnovne osobine poznate Galoisove veze (Pol, Inv) između relacija i operacija na nekom skupu, a zatim ćemo predstaviti neke od mogućih Galoisovih veza između relacija i hiperoperacija.

3.3.1 Galoisova veza između relacija i operacija

Za $m \geq 1$, *m-arna relacija* ρ na A je podskup od A^m. Neka je $R_A^{(m)} = \mathcal{P}(A^m)$ skup svih m-arnih relacija na A i neka je $R_A = \bigcup_{m\geq 1} R_A^{(m)}$ skup svih relacija konačnih arnosti na A. Za $Q \subseteq R_A$ neka je $Q^{(m)} = Q \cap R_A^{(m)}$.

Ako je ρ m-arna relacija koja ima k elemenata, možemo je prikazati u obliku matrice formata $m \times k$, čije su kolone m-torke iz ρ. Označimo sa ρ^* skup svih matrica formata $m \times n$ na A tako da su kolone svih ovih matrica elementi relacije ρ. Dakle, ako

$$(a_{11}, a_{21}, \dots, a_{m1}), (a_{12}, a_{22}, \dots, a_{m2}), \dots, (a_{1n}, a_{2n}, \dots, a_{mn}) \in \rho,$$

to možemo zapisati kao

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \in \rho^*.$$

Za matricu $M = [a_{ij}]_{m\times n}$ označimo vrste sa $M_{1*}, \dots, M_{m*}$, a kolone sa $M_{*1}, \dots, M_{*n}$.

U O_A su projekcije trivijalne operacije, dok su trivijalne relacije u R_A *dijagonalne relacije*, koje definišemo na sledeći način: za proizvoljnu relaciju ekvivalencije ε na $\{1, \ldots, n\}$ neka je

$$\delta^n_{A;\varepsilon} = \{(x_1, \ldots, x_n) \in A^n : (\forall i, j)\ ((i, j) \in \varepsilon \Rightarrow x_i = x_j)\}.$$

Relaciju ε ćemo zapisivati tako što ćemo navesti sve njene klase sa bar dva elementa. Označimo sa Δ_A skup svih dijagonalnih relacija svih arnosti.

Primer 3.3.1 *1)* $\delta^2_{A;\{1,2\}} = \{(a_1, a_1) : a_1 \in A\}$;

2) $\delta^3_{A;\{1,2\}} = \{(a_1, a_1, a_3) : a_1, a_3 \in A\}$;

3) $\delta^n_{A;} = A^n$.

Za razliku od klonova operacija za koje je uobičajeno da se definišu kao skupovi operacija koji sadrže sve projekcije i zatvoreni su u odnosu na kompozicije, klonovi relacija se češće opisuju kao poduniverzumi neke algebre. U tu svrhu uvešćemo nekoliko operacija na relacijama iz R_A, i to unarne operacije ζ, τ, pr i binarne operacije $\cap, \times$, pri čemu ćemo slike ovih operacija označavati sa:

$$\zeta\rho = \zeta(\rho),\ \tau\rho = \tau(\rho),\ pr\rho = pr(\rho),\ \rho_1 \cap \rho_2 = \cap(\rho_1, \rho_2),\ \rho_1 \times \rho_2 = \times(\rho_1, \rho_2).$$

- Za $\rho \in R^{(1)}_A$ ili $\rho = \emptyset$ neka je $\zeta\rho = \tau\rho = \rho$ i $pr\rho = \emptyset$;
- za $\rho \in R^{(m)}_A$, $m \geq 2$, neka su $\zeta\rho, \tau\rho \in R^{(m)}_A$ i $pr\rho \in R^{(m-1)}_A$ definisane sa

$$\begin{aligned}
\zeta\rho &= \{(a_1, a_2, \ldots, a_m) \in A^m : (a_2, \ldots, a_m, a_1) \in \rho\};\\
\tau\rho &= \{(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_m) \in A^m : (a_2, a_1, a_3, \ldots, a_m) \in \rho\};\\
pr\rho &= \{(a_2, \ldots, a_m) \in A^{m-1} : (\exists a_1 \in A)(a_1, a_2, \ldots, a_m) \in \rho\};
\end{aligned}$$

- za $\rho_1, \rho_2 \in R^{(m)}_A$ neka je $\rho_1 \cap \rho_2 \in R^{(m)}_A$ definisano sa

$$\rho_1 \cap \rho_2 = \{(a_1, \ldots, a_m) \in A^m : (a_1, \ldots, a_m) \in \rho_1 \text{ i } (a_1, \ldots, a_m) \in \rho_2\};$$

- za $\rho_1 \in R^{(m)}_A$ i $\rho_2 \in R^{(n)}_A$ neka je $\rho_1 \times \rho_2 \in R^{(m+n)}_A$ definisano sa

$$\begin{aligned}
\rho_1 \times \rho_2 \ = \ & \{(a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n) \in A^{m+n} : (a_1, \ldots, a_m) \in \rho_1 \text{ i}\\
& (b_1, \ldots, b_n) \in \rho_2\}.
\end{aligned}$$

Spomenimo ovde još neke operacije na relacijama, koje ćemo kasnije koristiti, a koje se mogu izraziti preko gore navednih operacija. Poznato je da je simetrična grupa S_m svih permutacija skupa $\{1, \ldots, m\}$ generisana transpozicijom $(1\ 2)$ i cikličkom permutacijom $(1\ 2 \ldots m)$. Otuda se proizvoljna permutacija koordinata može dobiti odgovarajućom primenom operacija τ i ζ. Sada pomoću permutacije koordinata i operacije pr možemo izraziti projekciju na proizvoljne koordinate, u oznaci $pr_{i_1,\ldots,i_\ell}$, gde je $\{i_1, \ldots, i_\ell\} \subseteq \{1, \ldots, m\}$.

Definicija 3.3.1 *Svaki poduniverzum algebre*

$$\mathcal{R}_A = (R_A;\ \times,\ \cap,\ \zeta,\ \tau,\ pr,\ \delta^3_{A;\{1,2\}})$$

je **relacijski klon** *na* A.

Jednostavno se može pokazati da je presek proizvoljne neprazne familije relacijskih klonova takođe relacijski klon. Otuda za svaki skup $Q \subseteq R_A$ postoji najmanji relacijski klon koji ga sadrži. Kažemo da je to *relacijski klon generisan sa* Q i označavamo ga sa $\langle Q \rangle_r$.

Uvedimo još jednu oznaku koja će nam u nastavku znatno uprostiti zapis. Neka je $f \in O_A^{(n)}$ i $M = [a_{ij}]_{m \times n}$. Tada je

$$f(M) = \begin{bmatrix} f(a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}) \\ f(a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n}) \\ \vdots \\ f(a_{m1}, a_{m2}, \ldots, a_{mn}) \end{bmatrix} = (f(M_{1*}), f(M_{2*}), \ldots, f(M_{m*})).$$

Definicija 3.3.2 *Relacija* $\rho \in R_A^{(m)}$ *je* **saglasna** *sa operacijom* $f \in O_A^{(n)}$ *ako za svaku matricu* $M \in \rho^*$ *važi* $f(M) \in \rho$. *Kažemo još i da operacija* f **čuva** *relaciju* ρ.

Primer 3.3.2 *1) Relacija* $\delta^2_{A;\{1,2\}}$ *je saglasna sa svim operacijama na* A.

2) Proizvoljna projekcija $\pi_i^n \in \Pi_A$ *čuva svaku relaciju na* A.

3) Ako je $\leq$ *relacija poretka na skupu* A, *koja je saglasna sa operacijom* f, *onda je* f *monotona u odnosu na relaciju* $\leq$.

4) Relacija ekvivalencije ε na skupu A koja je saglasna sa operacijom f jeste kongruencija algebre (A, f).

5) Idempotentne operacije čuvaju sve unarne relacije.

Označimo sa $Pol\rho$ skup svih operacija na A koje čuvaju relaciju ρ, a sa $Inv\, f$ skup svih relacija na A koje su saglasne sa operacijom f. Sada možemo definisati preslikavanja

$$Pol : \mathcal{P}(R_A) \to \mathcal{P}(O_A) \quad \text{i} \quad Inv : \mathcal{P}(O_A) \to \mathcal{P}(R_A)$$

na sledeći način:

$$\begin{aligned} Pol\, Q &= \bigcap_{\rho \in Q} Pol\rho = \{f \in O_A : f \text{ čuva svako } \rho \in Q\},\ Q \subseteq R_A \\ Inv\, F &= \bigcap_{f \in F} Inv\, f = \{\rho \in R_A : \rho \text{ je saglasno sa svim } f \in F\},\ F \subseteq O_A. \end{aligned}$$

Na osnovu teoreme 2.3.2 je par (Pol, Inv) Galoisova veza između relacija i operacija, odakle sledi da su $Pol\, Inv$ i $Inv\, Pol$ operatori zatvaranja i da su njihovi zatvoreni skupovi upravo skupovi oblika $Pol\, Q$, odnosno $Inv\, F$, za neke $Q \subseteq R_A$ i $F \subseteq O_A$.

Jednostavno se pokazuje da je $Pol\, Q$ klon operacija, za svako $Q \subseteq R_A$, a $Inv\, F$ je relacijski klon, za svako $F \subseteq O_A$. Međutim, važi i obrnuto, tj. svaki klon je oblika $Pol\, Q$ za neki skup relacija Q, i svaki relacijski klon je oblika $Inv\, F$, za neki skup operacija F, što su za oba slučaja dokazali 1969. godine Bondarčuk, Kalužnin, Kotov i Romov u [1], a za slučaj relacijskih klonova je nezavisno dokazao i Geiger 1968. godine u [7].

Teorema 3.3.1 *(1) Neka je $C \subseteq O_A$ klon operacija. Tada je $C = Pol\, Inv\, C$.*

(2) Ako je $Q \subseteq R_A$ relacijski klon, onda važi $Q = Inv\, Pol\, Q$.

Dokaz. Navešćemo samo osnovnu ideju dokaza.

(1) Neka je C klon. Kako nejednakost $C \subseteq Pol\, Inv\, C$ važi za svaku Galoisovu vezu, dovoljno je pokazati da za proizvoljnu n-arnu operaciju $g \in Pol\, Inv\, C$ imamo $g \in C$. Da bismo to uradili najpre konstruišemo matricu M

čije su vrste sve n-torke iz A^n, date u leksikografskom poretku, i definišemo relaciju

$$G_n(C) = \{f(M) : f \in C^{(n)}\}.$$

Zatim se pokaže da $G_n(C) \in Inv\, C$, što znači da g čuva $G_n(C)$. Odavde je $g(M) = f(M)$, za neko $f \in C^{(n)}$, ali na osnovu konstrukcije matrice M to znači da je $g = f$, tj. $g \in C$.

(2) Kao i u prethodnom slučaju $Q \subseteq Inv\, Pol\, Q$ uvek važi, pa treba pokazati $Inv\, Pol\, Q \subseteq Q$. Ako označimo $Pol\, Q = C$, pokazuje se da za svako $n \in \mathbb{N}$ važi $G_n(C) = \Gamma_n$, gde je

$$\Gamma_n = \bigcap \{\theta \in R_A : \mathrm{ar}(\theta) = |A|^n \text{ i } M \in \theta^*\},$$

pri čemu je M matrica iz definicije $G_n(C)$, što znači da $G_n(C) \in Inv\, C$. Koristeći ovu činjenicu dokazuje se da ako $\rho \in Inv\, Pol\, C$, onda $\rho \in Q$. $\square$

Kao direktnu posledicu prethodne teoreme dobijamo da su zatvoreni skupovi operatora $Pol\, Inv$ upravo klonovi operacija, a zatvoreni skupovi operatora $Inv\, Pol$ su svi relacijski klonovi.

Posledica 3.3.1 *Neka su $F \subseteq O_A$ i $Q \subseteq R_A$. Tada važi:*

(1) $\langle F \rangle = Pol\, Inv\, F$.

(2) $\langle Q \rangle_r = Inv\, Pol\, Q$.

3.3.2 Galoisove veze između relacija i hiperoperacija

U nastavku ovog poglavlja ćemo prikazati nekoliko načina da se pojam saglasnosti relacije sa operacijom proširi na saglasnost relacije sa hiperoperacijom.

NADOLE ZATVORENI HIPERKLONOVI

U ovom delu ćemo predstaviti jednu Galoisovu vezu između relacija i hiperoperacija, čiji zatvoreni skupovi su hiperklonovi koji sadrže sve hiperpodoperacije svojih elemenata. Ovu vezu su nezavisno proučavali Börner u [2] i Romov u [16], s tim što Börner pomenute hiperklonove zove nadole zatvorenim, a kod Romova su oni restrikcijski zatvoreni. Mi ćemo se ovde služiti Börnerovom terminologijom.

Definicija 3.3.3 *Ako* $f, g \subseteq H_A^{(n)}$ *zadovoljavaju uslov*

$$g(x_1, \ldots, x_n) \subseteq f(x_1, \ldots, x_n)$$

za sve $(x_1, \ldots, x_n) \in A^n$, *onda za* g *kažemo da je* **hiper-podoperacija** *od* f, *odnosno* f *je* **hiper-nadoperacija** *od* g, *u oznaci* $g \subseteq f$.

Lako se vidi da je kompozicija hiperoperacija monotona u odnosu na $\subseteq$, tj. ako su $f', f \in H_A^{(n)}$ i $g'_i, g_i \in H_A^{(m)}$, $i = 1, \ldots, n$, takvi da $f' \subseteq f$ i $g'_i \subseteq g_i$, za sve $i \in \{1, \ldots, n\}$, onda je

$$f'[g'_1, \ldots, g'_n] \subseteq f[g_1, \ldots, g_n].$$

Neka je $F \subseteq H_A$. Označimo sa $\lfloor F \rfloor$ skup svih hiper-podoperacija elemenata iz F, tj.

$$\lfloor F \rfloor = \{g \in H_A : (\exists f \in F)\ g \subseteq f\}.$$

Odmah možemo dokazati sledeće

Tvrđenje 3.3.1 $\lfloor\ \rfloor : \mathcal{P}(H_A) \to \mathcal{P}(H_A)$ *je algebarski operator zatvaranja.*

Dokaz.

(C1) $F \subseteq \lfloor F \rfloor$ važi jer je svaka hiperoperacija sama sebi hiper-podoperacija.

(C2) Neka je $F \subseteq G$. Ako $g \in \lfloor F \rfloor$, onda postoji $f \in F$ tako da je $g \subseteq f$. Međutim, f je istovremeno u G, pa $g \in \lfloor G \rfloor$, tj. $\lfloor F \rfloor \subseteq \lfloor G \rfloor$.

(C3) Dokažimo da je $\lfloor \lfloor F \rfloor \rfloor = \lfloor F \rfloor$. Inkluzija $\supseteq$ važi zbog (C1). S druge strane, ako $f \in \lfloor \lfloor F \rfloor \rfloor$, onda postoji $g \in \lfloor F \rfloor$ tako da je $f \subseteq g$. Ali tada postoji i $h \in F$ tako da $g \subseteq h$. Dakle, imamo $h \in F$ za koje je $f \subseteq h$, pa je $f \in \lfloor F \rfloor$.

(C4) Pokazaćemo da važi $\lfloor F \rfloor = \bigcup \{ \lfloor G \rfloor : G \subseteq F \text{ i } G \text{ je konačan} \}$.

- ($\subseteq$) Ako $g \in \lfloor F \rfloor$ onda postoji $f \in F$ takvo da je $g \subseteq f$. Tada ako uzmemo $G = \{f\}$, dobijamo $g \in \lfloor G \rfloor$.
- ($\supseteq$) Pretpostavimo da $g \in \bigcup \{ \lfloor G \rfloor : G \subseteq F \text{ i } G \text{ je konačan} \}$. Tada postoji konačan podskup G od F za koji je $g \in \lfloor G \rfloor$. To znači da postoji $f \in G$ takvo da $g \subseteq f$. Međutim, kako je $G \subseteq F$, sledi $f \in F$, pa je $g \in \lfloor F \rfloor$.

□

Definicija 3.3.4 *Za skup hiperoperacija F kažemo da je* **zatvoren nadole** *ako važi $\lfloor F \rfloor = F$. Ako je $C \subseteq H_A$ hiperklon za koji važi $\lfloor C \rfloor = C$, onda je C* **nadole zatvoren hiperklon**.

Napomena. U ostatku poglavlja ćemo umesto nadole zatvoren hiperklon pisati NZ hiperklon.

Primer 3.3.3 *(1) Za svako $F \subseteq O_A$ je $\lfloor F \rfloor = F$, pa je trivijalno svaki klon zapravo NZ hiperklon.*

(2) Skup H_A svih hiperoperacija je NZ hiperklon.

Tvrđenje 3.3.2 *Ako je $C \subseteq H_A$ hiperklon, onda je $\lfloor C \rfloor$ NZ hiperklon.*

Dokaz. Neka je C hiperklon. Trivijalno $C \subseteq \lfloor C \rfloor$, pa kako C sadrži sve projekcije, to važi i za $\lfloor C \rfloor$. S druge strane, ako $f, g_1, \ldots, g_n \in \lfloor C \rfloor$, onda postoje $f', g'_1, \ldots, g'_n \in C$ tako da $f \subseteq f'$ i $g_i \subseteq g'_i$, za sve $i \in \{1, \ldots, n\}$. Zbog monotonosti kompozicije sledi $f[g_1, \ldots, g_n] \subseteq f'[g'_1, \ldots, g'_n] \in C$, pa $f[g_1, \ldots, g_n] \in \lfloor C \rfloor$. Dakle, $\lfloor C \rfloor$ je hiperklon, a zbog idempotentnosti operatora $\lfloor \; \rfloor$ to je i NZ hiperklon. □

Tvrđenje 3.3.3 *Presek proizvoljne familije NZ hiperklonova je takođe NZ hiperklon.*

Dokaz. Neka su $C_i, i \in I$ hiperklonovi za koje važi $\lfloor C_i \rfloor = C_i, i \in I$, i neka je $C = \bigcap_{i\in I} C_i$. Znamo da je C hiperklon, pa treba još pokazati da sadrži sve hiper-podoperacije svojih elemenata. Neka $f \in C$ i $g \subseteq f$. Tada $f \in C_i$, za sve $i \in I$, i $g \subseteq f$. Kako su C_i NZ hiperklonovi, to znači da je $g \in C_i$, za sve $i \in I$, odnosno $g \in C$. $\Box$

Neka je $C \subseteq H_A$ NZ hiperklon. Tada je

$$\mathcal{L}_A^{\Downarrow}(C) = \{\lfloor D \rfloor : D \subseteq C \text{ i } D \text{ je hiperklon}\}$$

skup svih NZ hiper-potklonova od C. Ako je $C = H_A$, označićemo sa $\mathcal{L}_A^{\Downarrow}$ skup svih NZ hiperklonova na A.

Prema tvrđenju 3.3.1, $\mathcal{L}_A^{\Downarrow}$ je algebarska mreža u odnosu na skupovnu inkluziju, čiji je najmanji element Π_A, a najveći H_A. Mrežne operacije na $\mathcal{L}_A^{\Downarrow}$ definišemo na sledeći način

$$C_1 \wedge_{\Downarrow} C_2 = C_1 \cap C_2 \quad \text{ i } \quad C_1 \vee_{\Downarrow} C_2 = \lfloor \langle C_1 \cup C_2 \rangle_h \rfloor.$$

Na osnovu definicije operacije $\vee_{\Downarrow}$ vidimo da $\mathcal{L}_A^{\Downarrow}$ nije podmreža mreže svih hiperklonova $\mathcal{L}_A^h$, što ćemo ilustrovati sledećim primerom.

Primer 3.3.4 *Neka su* $A = \{0, 1, 2\}$, $C_1 = \lfloor \langle \{f_1\} \rangle_h \rfloor$ *i* $C_2 = \lfloor \langle \{f_2\} \rangle_h \rfloor$, *gde su hiperoperacije* $f_1, f_2 \in H_A^{(1)}$ *date sa*

	0	1	2
f_1	$\{0\}$	$\{0\}$	$\{0,2\}$
f_2	$\{1,2\}$	$\{1\}$	$\{2\}$

Možemo zaključiti da $\langle C_1 \cup C_2 \rangle_h$ *sadrži hiperoperaciju* $f_2[f_1]$:

	0	1	2
$f_2[f_1]$	$\{1,2\}$	$\{1,2\}$	$\{1,2\}$

Jasno je da hiper-podoperacija h hiperoperacije $f_2[f_1]$, *data sa* $h(x) = \{2\}$, $x \in A$, *pripada* $\lfloor \langle C_1 \cup C_2 \rangle_h \rfloor$, *ali nije generisana sa* $C_1 \cup C_2$, *zato što ne postoji kompozicija elemenata iz* $C_1 \cup C_2$ *pomoću koje se može dobiti* $h(1) = \{2\}$. *Dakle,* $C_1 \vee_{\Downarrow} C_2 \neq C_1 \vee_h C_2$.

Sada ćemo navesti jedno moguće proširenje osobine saglasnosti relacije sa operacijom na slučaj hiperoperacija, a onda ćemo pokazati da su za indukovanu Galoisovu vezu zatvoreni skupovi upravo NZ hiperklonovi.

Definicija 3.3.5 *Neka je ρ m-arna relacija na A. Relaciju ρ_s datu sa*

$$(A_1, \ldots, A_m) \in \rho_s \Leftrightarrow A_1 \times \cdots \times A_m \subseteq \rho, \ \ (A_1, \ldots, A_m) \in (P_A^*)^m,$$

nazivamo **jako proširenje** *relacije ρ.*

Primer 3.3.5 *Neka je $A = \{0,1\}$ i $\rho \in R_A^{(2)}$ data sa $\rho = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Tada je*

$$\rho_s = \begin{pmatrix} \{0\} & \{1\} & \{1\} & \{1\} & \{0,1\} \\ \{0\} & \{0\} & \{1\} & \{0,1\} & \{0\} \end{pmatrix}.$$

Definicija 3.3.6 *Hiperoperacija $f \in H_A^{(n)}$* d-**čuva** *relaciju $\rho \in R_A^{(m)}$ ako za svaku matricu $M = [a_{ij}]_{m \times n} \in \rho^*$, važi $f(M) = (A_1, \ldots, A_m) \in \rho_s$, $A_i \in P_A^*$, odnosno $A_1 \times \cdots \times A_m \subseteq \rho$.*

Neka je $dPol\rho$ skup svih hiperoperacija na A koje d-čuvaju relaciju ρ, a $dInv\, f$ skup svih relacija na A koje d-čuva hiperoperacija f. Definišimo preslikavanja

$$dPol : \mathcal{P}(R_A) \to \mathcal{P}(H_A) \quad \text{i} \quad dInv : \mathcal{P}(H_A) \to \mathcal{P}(R_A)$$

na sledeći način:

$$\begin{aligned} dPol\, Q &= \bigcap_{\rho \in Q} dPol\rho = \{f \in H_A : f \ d\text{-čuva svako } \rho \in Q\}, \ Q \subseteq R_A, \\ dInv\, F &= \bigcap_{f \in F} dInv\, f = \{\rho \in R_A : \text{svako } f \in F \ d\text{-čuva } \rho\}, \ F \subseteq O_A. \end{aligned}$$

Jasno je, prema teoremi 2.3.2, da je par $(dPol, dInv)$ Galoisova veza između relacija i hiperoperacija.

Tvrđenje 3.3.4 *Za proizvoljno $Q \subseteq R_A$, $dPol\, Q$ je NZ hiperklon.*

Dokaz. Na osnovu tvrđenja 3.3.3 dovoljno je pokazati da je za svako $\rho \in Q^{(m)}$ $dPol\rho$ NZ hiperklon.

Neka je π_i^n proizvoljna projekcija i $M = [a_{ij}]_{m\times n} \in \rho^*$. Tada je

$$\pi_i^n(M) = \begin{bmatrix} \{a_{1i}\} \\ \vdots \\ \{a_{mi}\} \end{bmatrix}.$$

Kako je $\{a_{1i}\} \times \cdots \times \{a_{mi}\} = \{(a_{1i}, \ldots, a_{mi})\} \subseteq \rho$, imamo $\pi_i^n \in dPol\rho$, odnosno $\Pi_A \subseteq dPol\rho$.

Neka su

$$f \in dPol\rho \cap H_A^{(n)}, \quad g_1, \ldots, g_n \in dPol\rho \cap H_A^{(\ell)}.$$

Prepostavimo da $h = f[g_1, \ldots, g_n] \notin dPol\rho$. Tada postoji matrica M formata $m \times \ell$ iz ρ^*, takva da $(h(M_{1*}), \ldots, h(M_{m*})) \notin \rho_s$, tj. $h(M_{1*}) \times \cdots \times h(M_{m*}) \nsubseteq \rho$. Pošto je $f \in dPol\rho$, to znači da $(g_i(M_{1*}), \ldots, g_i(M_{m*})) \notin \rho_s$, za neko $i \in \{1, \ldots, n\}$. Međutim, i $g_i \in dPol\rho$, pa zaključujemo da postoji neka kolona matrice M koja nije u ρ, što je u suprotnosti sa izborom matrice M. Dakle, $h \in dPol\rho$.

Treba još pokazati da $dPol\rho$ sadrži sve hiper-podoperacije svojih elemenata, tj. ako $f \in dPol\rho$, onda za svaku hiperoperaciju g takvu da je $g \subseteq f$ važi $g \in dPol\rho$. Neka je $f \in dPol\rho \cap H_A^{(n)}$ i $M = [a_{ij}]_{m\times n} \in \rho^*$. Tada je $f(M_{1*}) \times \cdots \times f(M_{m*}) \subseteq \rho$. Ako je g hiper-podoperacija od f, onda je $g(M_{i*}) \subseteq f(M_{i*})$, za sve $i \in \{1, \ldots, m\}$, odnosno

$$g(M_{1*}) \times \cdots \times g(M_{m*}) \subseteq f(M_{1*}) \times \cdots \times f(M_{m*}) \subseteq \rho,$$

pa $g \in dPol\rho$. $\square$

Skup $dInv\,F$, $F \subseteq H_A$, nije relacijski klon jer u opšem slučaju ne važi $\delta^3_{A;\{1,2\}} \in dPol\,F$.

Primer 3.3.6 *Neka je f unarna hiperoperacija na skupu $A = \{0, 1\}$ data sa $f(0) = \{0\}$ i $f(1) = \{0, 1\}$. Otuda $(1, 1, 0) \in \delta^3_{A;\{1,2\}}$ i $(f(1), f(1), f(0)) = (\{0, 1\}, \{0, 1\}, \{0\})$, ali $\{0, 1\}\times\{0, 1\}\times\{0\} \nsubseteq \delta^3_{A;\{1,2\}}$ jer, na primer, $(0, 1, 0) \notin \delta^3_{A;\{1,2\}}$, pa $\delta^3_{A;\{1,2\}} \notin dInvf$.*

Sledeće tvrđenje se dokazuje slično kao teorema 3.3.1(1).

Tvrđenje 3.3.5 [2] *Neka je $C \subseteq H_A$ NZ hiperklon. Tada je $C = dPol(dInv\, C)$.*

Dakle, zatvoreni skupovi operatora $dPol\, dInv$ su upravo NZ hiperklonovi.

HIPERKLONOVI ODREĐENI RELACIJOM ρ_w

Ovde ćemo navesti još jedno proširenje osobine saglasnosti relacije sa operacijom na slučaj hiperoperacija i Galoisovu vezu koja je takvom saglasnošću indukovana. Galois zatvoreni skupovi za ovu vezu će imati bitnu ulogu u drugom delu ovog rada.

Sledeću definiciju je dao I.G. Rosenberg u [20].

Definicija 3.3.7 *Neka je ρ m-arna relacija na A. Relaciju ρ_w datu sa*

$$(A_1, \ldots, A_m) \in \rho_w \Leftrightarrow (A_1 \times \cdots \times A_m) \cap \rho \neq \emptyset, \ \ (A_1, \ldots, A_m) \in (P_A^*)^m,$$

nazivamo **slabo proširenje** *relacije ρ.*

Ovo zapravo znači da se ρ_w sastoji od svih m-torki $(A_1, \ldots, A_m)$ nepraznih podskupova od A, takvih da $(a_1, \ldots, a_m) \in \rho$, za neke $a_i \in A_i, i = 1, \ldots, m$.

Primer 3.3.7 *Neka je $A = \{0, 1\}$ i $\rho \in R_A^{(2)}$ data sa $\rho = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Tada je*

$$\rho_w = \begin{pmatrix} \{0\} & \{0\} & \{1\} & \{1\} & \{1\} & \{0,1\} & \{0,1\} & \{0,1\} \\ \{0\} & \{0,1\} & \{0\} & \{1\} & \{0,1\} & \{0\} & \{1\} & \{0,1\} \end{pmatrix}.$$

Definicija 3.3.8 *Hiperoperacija $f \in H_A^{(n)}$* ***h-čuva*** *relaciju $\rho \in R_A^{(m)}$ ako za svaku matricu $M = [a_{ij}]_{m \times n} \in \rho^*$, važi $f(M) = (A_1, \ldots, A_m) \in \rho_w$, $A_i \in P_A^*$, odnosno $(A_1 \times \cdots \times A_m) \cap \rho \neq \emptyset$.*

Neka je $hPol\rho$ skup svih hiperoperacija na A koje h-čuvaju relaciju ρ, a $hInv\, f$ skup svih relacija na A koje h-čuva hiperoperacija f. Definišimo preslikavanja

$$hPol : \mathcal{P}(R_A) \to \mathcal{P}(H_A) \quad \text{i} \quad hInv : \mathcal{P}(H_A) \to \mathcal{P}(R_A)$$

na sledeći način:

$$\begin{aligned} hPol\,Q &= \bigcap_{\rho\in Q} hPol\rho = \{f\in H_A : f \ h\text{-čuva svako } \rho\in Q\},\ Q\subseteq R_A,\\ hInv\,F &= \bigcap_{f\in F} hInv\,f = \{\rho\in R_A : \text{svako } f\in F\ h\text{-čuva } \rho\},\ F\subseteq O_A. \end{aligned}$$

Na osnovu teoreme 2.3.2, par $(hPol, hInv)$ je Galoisova veza između skupova R_A i H_A.

Tvrđenje 3.3.6 [11] *Neka je Q proizvoljan skup relacija na A. Tada je $hPol\,Q$ hiperklon.*

Dokaz. S obzirom da je presek proizvoljne familije hiperklonova takođe hiperklon, ako želimo pokazati da je $hPol\,Q$ hiperklon, dovoljno je utvrditi da je $hPol\rho$ hiperklon, za proizvoljno $\rho\in Q$. Očigledno je da svaka operacija koja čuva ρ pripada $hPol\rho$, tj. $Pol\rho\subseteq hPol\rho$, pa se u $hPol\rho$ nalaze sve projekcije. Neka su

$$f\in hPol\rho\cap H_A^{(n)},\quad g_1,\ldots,g_n\in hPol\rho\cap H_A^{(\ell)}.$$

Slično kao u dokazu tvrđenja 3.3.12 pokazujemo da $f[g_1,\ldots,g_n]\in hPol\rho$. Dakle, $hPol\rho$ sadrži sve projekcije i zatvoren je u odnosu na kompoziciju, pa je zato hiperklon. □

Kao i u slučaju $dInv\,F$, skup $hInv\,F$ nije relacijski klon, ali ovoga puta jer nije zatvoren u odnosu na presek relacija, što ćemo prikazati u sledećem primeru.

Primer 3.3.8 *Neka su ρ_1 i ρ_2 binarne relacije na skupu $A=\{0,1,2\}$ date sa*

$$\rho_1=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&2\end{pmatrix},\quad \rho_2=\begin{pmatrix}0&1&1&2\\0&1&2&2\end{pmatrix},$$

i neka je $f\in H_A^{(1)}$ definisana sa

	0	1	2
f	$\{0\}$	$\{0,1\}$	$\{1\}$

Jednostavno se proverava da $\rho_1,\rho_2\in hInvf$, ali $\rho_1\cap\rho_2\notin hInvf$, jer je $(1,2)\in\rho_1\cap\rho_2$, $(f(1),f(2))=(\{0,1\},\{1\})$, i

$$(\{0,1\}\times\{1\})\cap(\rho_1\cap\rho_2)=\{(0,1),(1,1)\}\cap\{(0,0),(1,2)\}=\emptyset.$$

HIPERKLONOVI ODREĐENI RELACIJOM $\rho^{\#}$

Već smo rekli da su Pöschel i Drescher u [6] proučavali operacije na P_A^* indukovane hiperoperacijama na A. U istom radu, oni su ispitivali relaciju $\rho^{\#}$ na P_A^* i njome indukovanu Galoisovu vezu, koju ćemo predstaviti u ovom poglavlju.

Definicija 3.3.9 *Neka je ρ m-arna relacija na A. Definišimo relaciju $\rho^{\#} \in (P_A^*)^{(m)}$ na sledeći način*
$(A_1, \dots, A_m) \in \rho^{\#} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (\forall i \in \{1, \dots, m\})(\forall a \in A_i)(\exists (a_1, \dots, a_m) \in (A_1 \times \cdots \times A_m) \cap \rho)\ a_i = a.$

Primer 3.3.9 *Neka je $A = \{0,1\}$ i $\rho \in R_A^{(2)}$ data sa $\rho = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Tada je*

$$\rho^{\#} = \begin{pmatrix} \{0\} & \{1\} & \{1\} & \{1\} & \{0,1\} & \{0,1\} \\ \{0\} & \{0\} & \{1\} & \{0,1\} & \{0\} & \{0,1\} \end{pmatrix}.$$

Definicija 3.3.10 *Hiperoperacija $f \in H_A^{(n)}$ m-**čuva** relaciju $\rho \in R_A^{(m)}$ ako za svaku matricu $M \in \rho^*$, važi $f(M) \in \rho^{\#}$.*

Označimo sa $mPol\rho$ skup svih hiperoperacija na A koje m-čuvaju relaciju ρ, a sa $mInv\,f$ skup svih relacija na A koje m-čuva hiperoperacija f. Sada ćemo definisati preslikavanja

$$mPol : \mathcal{P}(R_A) \to \mathcal{P}(H_A) \quad \text{i} \quad mInv : \mathcal{P}(H_A) \to \mathcal{P}(R_A)$$

na sledeći način:

$$\begin{aligned} mPol\,Q &= \bigcap_{\rho \in Q} mPol\rho = \{f \in H_A : f\ m\text{-čuva svako } \rho \in Q\},\ Q \subseteq R_A, \\ mInv\,F &= \bigcap_{f \in F} mInv\,f = \{\rho \in R_A : \text{svako } f \in F\ m\text{-čuva } \rho\},\ F \subseteq O_A. \end{aligned}$$

Kao direktnu posledicu teoreme 2.3.2 dobijamo da je i par $(mPol, mInv)$ Galoisova veza između skupova R_A i H_A.

Tvrđenje 3.3.7 [6] *Ako je $Q \subseteq R_A$, onda je $mPol\,Q$ hiperklon.*

Dokaz. Ideja dokaza je ista kao kod tvrđenja 3.3.6. $\square$

Skup $mInv\,F$ nije relacijski klon, a razlog je, kao i u slučaju $hInv\,F$, činjenica da nije zatvoren u odnosu na presek relacija, što ćemo pokazati i sledećim primerom.

Primer 3.3.10 *Neka su ρ_1 i ρ_2 binarne relacije na skupu $A = \{0,1,2,3\}$ date sa*

$$\rho_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 3 & 1 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \rho_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 1 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

i neka je $f \in H_A^{(1)}$ definisana sa

$$\begin{array}{c|cccc} & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline f & \{0,2\} & \{1\} & \{1,3\} & \{3\} \end{array}.$$

Jednostavno se proverava da $\rho_1, \rho_2 \in mInv f$. Međutim, $\rho_1 \cap \rho_2 \notin mInv f$, jer $(0,2) \in \rho_1 \cap \rho_2$, ali $(f(0), f(2)) = (\{0,2\}, \{1,3\}) \notin (\rho_1 \cap \rho_2)^{\#}$, pošto za $x = 0$ ne postoji $y \in \{1,3\}$ tako da $(x,y) \in \rho_1 \cap \rho_2$.

PREMA GORE ZATVORENI HIPERKLONOVI

Inspirisani rezultatima Börnera (predstavljenim u poglavlju *Nadole zatvoreni hiperklonovi*), koji je posmatrao hiperklonove koji sadrže sve hiperpodoperacije svojih elemenata, opisali smo sve hiperklonove koji sadrže samo hiper-nadoperacije svojih (totalnih) operacija. U ovom poglavlju prikazaćemo deo rezultata iz [4].

Za $F \subseteq O_A$, neka je $\lceil F \rceil$ skup svih hiper-nadoperacija operacija iz F, tj.

$$\lceil F \rceil := \{f \in H_A : (\exists g \in F)\ g \subseteq f\}.$$

Jasno, za svako $G \subseteq O_A$ važi

$$\lceil G \rceil \cap O_A = G, \tag{3.3}$$

tj. primenom operatora $\lceil\ \rceil$ na proizvoljan skup operacija G ne mogu se dobiti operacije koje nisu u G, što implicira da $\lceil G \rceil$ ne može biti zatvoreno o odnosu na kompoziciju, u slučaju da samo G nije zatvoreno u odnosu na kompoziciju.

Operator $\lceil\ \rceil$ zadovoljava i sledeće osobine

Tvrđenje 3.3.8 *Za proizvoljne $F, F_1, F_2 \subseteq O_A$ važi*

(1) $F \subseteq \lceil F \rceil$,

(2) $F_1 \subseteq F_2 \Leftrightarrow \lceil F_1 \rceil \subseteq \lceil F_2 \rceil$,

(3) $\lceil \lceil F \rceil \cap O_A \rceil = \lceil F \rceil$.

Dokaz.

(1) $F \subseteq \lceil F \rceil$ uvek važi jer za svako $g \in F$ je $g \subseteq g$.

(2) ($\Rightarrow$) Neka je $F_1 \subseteq F_2$. Ako $f \in \lceil F_1 \rceil$, onda postoji $g \in F_1$ tako da je $g \subseteq f$. Međutim, istovremeno je $g \in F_2$, pa $f \in \lceil F_2 \rceil$.

($\Leftarrow$) Očigledno važi

$$\begin{aligned} \lceil F_1 \rceil \subseteq \lceil F_2 \rceil \quad &\Rightarrow \quad \lceil F_1 \rceil \cap O_A \subseteq \lceil F_2 \rceil \cap O_A \\ &\Rightarrow \quad F_1 \subseteq F_2 \end{aligned}$$

(3) Sledi direktno iz (3.3).

□

Definicija 3.3.11 *Kažemo da je skup hiperoperacija F* **zatvoren prema gore** *ako $\lceil F \cap O_A \rceil = F$. Ako je $C \subseteq H_A$ hiperklon za koji važi $\lceil C \cap O_A \rceil = C$, onda je C* **prema gore zatvoren hiperklon**.

Napomena. U ostatku poglavlja ćemo umesto prema gore zatvoren hiperklon pisati PGZ hiperklon.

Tvrđenje 3.3.9 *Ako je $C \subseteq O_A$ klon, onda je $\lceil C \rceil$ PGZ hiperklon.*

Dokaz. Kako je $C \subseteq \lceil C \rceil$, to su sve projekcije sadržane u $\lceil C \rceil$. Neka su $f, g_1, \ldots, g_n \in \lceil C \rceil$. Tada postoje $f', g'_1, \ldots, g'_n \in C$ takvi da $f' \subseteq f$, $g'_1 \subseteq g_1$, $\ldots$, $g'_n \subseteq g_n$. S obzirom da je C klon važi $f'(g'_1, \ldots, g'_n) \in C \subseteq \lceil C \rceil$. Međutim, $f'(g'_1, \ldots, g'_n) \subseteq f[g_1, \ldots, g_n]$, pa je $f[g_1, \ldots, g_n] \in \lceil C \rceil$. Ovim smo pokazali da je $\lceil C \rceil$ hiperklon, za svaki klon C, a kao direktnu posledicu tvrđenja 3.3.8(3) dobijamo da je $\lceil C \rceil$ PGZ hiperklon. □

Iz tvrđenja 3.2.1 direktno sledi

Tvrđenje 3.3.10 *Neka je $C \subseteq H_A$ PGZ hiperklon. Tada je $C \cap O_A$ klon.*

Prethodno tvrđenje i definicija PGZ hiperklona impliciraju da za svaki PGZ hiperklon C postoji klon D, tako da je $C = \lceil D \rceil$. Taj klon D je upravo $C \cap O_A$.

Za klon $C \subseteq O_A$, skup

$$\mathcal{L}_A^{\Uparrow}(C) := \{\lceil D \rceil : D \subseteq C \text{ i } D \text{ je klon }\}$$

je skup svih PGZ hiper-potklonova od $\lceil C \rceil$. U slučaju $C = O_A$, označićemo sa $\mathcal{L}_A^{\Uparrow}$ skup svih PGZ hiperklonova na A. Primetimo da presek PGZ hiperklonova nije uvek PGZ hiperklon, što ćemo ilustrovati sledećim primerom.

Primer 3.3.11 *Neka su $A = \{0,1\}$, $C_1 = \lceil \langle \{g_1\} \rangle \rceil$ i $C_2 = \lceil \langle \{g_2\} \rangle \rceil$, gde su operacije g_1 i g_2 date sa*

	g_1	g_2
0	1	1
1	0	1

Ako je $f \in H_A^{(1)}$ takvo da $f(0) = \{1\}$ i $f(1) = \{0,1\}$, onda je $f \in C_1 \cap C_2$, ali ne postoji $g \in (C_1 \cap C_2) \cap O_A$ takvo da je $g \subseteq f$.

Definišimo binarne operacije $\wedge_{\Uparrow}$ i $\vee_{\Uparrow}$ na skupu $\mathcal{L}_A^{\Uparrow}$ sa

$$\lceil C_1 \rceil \wedge_{\Uparrow} \lceil C_2 \rceil = \lceil C_1 \cap C_2 \rceil \quad \text{i} \quad \lceil C_1 \rceil \vee_{\Uparrow} \lceil C_2 \rceil = \lceil \langle C_1 \cup C_2 \rangle \rceil,$$

gde su $\lceil C_1 \rceil$ i $\lceil C_2 \rceil$ proizvoljni elementi iz $\mathcal{L}_A^{\Uparrow}$.

Tvrđenje 3.3.11 *U uređenom skupu $(\mathcal{L}_A^{\Uparrow}, \subseteq)$ važi*

$$\lceil C_1 \rceil \wedge_{\Uparrow} \lceil C_2 \rceil = \inf\{\lceil C_1 \rceil, \lceil C_2 \rceil\} \quad i \quad \lceil C_1 \rceil \vee_{\Uparrow} \lceil C_2 \rceil = \sup\{\lceil C_1 \rceil, \lceil C_2 \rceil\},$$

Dokaz. Primetimo da za proizvoljne nagore zatvorene hiperklonove $\lceil C_1 \rceil$ i $\lceil C_2 \rceil$, na osnovu poznatih osobina skupova i tvrđenja 3.3.8(2), važi

$$\lceil C_1 \cap C_2 \rceil \subseteq \lceil C_1 \rceil \text{ i } \lceil C_1 \cap C_2 \rceil \subseteq \lceil C_2 \rceil$$

$$\lceil C_1 \rceil \subseteq \lceil \langle C_1 \cup C_2 \rangle \rceil \text{ i } \lceil C_2 \rceil \subseteq \lceil \langle C_1 \cup C_2 \rangle \rceil,$$

tj. $\lceil C_1 \rceil \wedge_{\Uparrow} \lceil C_2 \rceil$ je donje, a $\lceil C_1 \rceil \vee_{\Uparrow} \lceil C_2 \rceil$ je gornje ograničenje skupa $\{\lceil C_1 \rceil, \lceil C_2 \rceil\}$.

Neka su D i E proizvoljni klonovi takvi da je $\lceil D \rceil$ donje, i $\lceil E \rceil$ gornje ograničenje skupa $\{\lceil C_1 \rceil, \lceil C_2 \rceil\}$, odnosno imamo

$$\lceil D \rceil \subseteq \lceil C_1 \rceil \ \text{ i } \ \lceil D \rceil \subseteq \lceil C_2 \rceil,$$

$$\lceil C_1 \subseteq \rceil \lceil E \rceil \ \text{ i } \ \lceil C_2 \rceil \subseteq \lceil E \rceil.$$

Tada prema tvrđenja 3.3.8(2) zaključujemo da je

$$D \subseteq C_1 \ \text{ i } \ D \subseteq C_2 \ \text{ i } \ C_1 \subseteq E \ \text{ i } \ C_2 \subseteq E$$

odakle sledi

$$D \subseteq C_1 \cap C_2 \ \text{ i } \ C_1 \cup C_2 \subseteq E,$$

i na osnovu osobina mreže klonova

$$\langle C_1 \cup C_2 \rangle \subseteq \langle E \rangle = E,$$

pa ponovo zbog tvrđenja 3.3.8(2) dobijamo

$$\lceil D \rceil \subseteq \lceil C_1 \cap C_2 \rceil \ \text{ i } \ \lceil \langle C_1 \cup C_2 \rangle \rceil \subseteq \lceil E \rceil.$$

Otuda je $\lceil C_1 \rceil \wedge_{\Uparrow} \lceil C_2 \rceil$ najveće donje, a $\lceil C_1 \rceil \vee_{\Uparrow} \lceil C_2 \rceil$ je najmanje gornje ograničenje skupa $\{\lceil C_1 \rceil, \lceil C_2 \rceil\}$, što je i trebalo dokazati. $\square$

Dakle, $(\mathcal{L}_A^{\Uparrow}, \subseteq)$ je mreža. Šta više, kako je $H_A = \lceil O_A \rceil$ očigledno največi element te mreže i svaki neprazan podskup od $\mathcal{L}_A^{\Uparrow}$ ima infimum (zaista, $\inf\{\lceil C_i \rceil : C_i \text{ je klon}, i \in I\} = \left\lceil \bigcap_{i \in I} C_i \right\rceil$, što se dokazuje isto kao u slučaju $I = \{1, 2\}$), to je na osnovu teoreme 2.2.1 $(\mathcal{L}_A^{\Uparrow}, \subseteq)$ kompletna mreža.

Prema tome, skup $\mathcal{L}_A^{\Uparrow}$ čini kompletnu mrežu u odnosu na skupovnu inkluziju. Najmanji element te mreže je $\lceil \Pi_A \rceil$, a najveći H_A. Mrežne operacije na $\mathcal{L}_A^{\Uparrow}$ su definisane sa

$$\lceil C_1 \rceil \wedge_{\Uparrow} \lceil C_2 \rceil = \lceil C_1 \cap C_2 \rceil \quad \text{i} \quad \lceil C_1 \rceil \vee_{\Uparrow} \lceil C_2 \rceil = \lceil \langle C_1 \cup C_2 \rangle \rceil.$$

Primetimo da, na osnovu definicije operacije $\wedge_{\Uparrow}$ i primera 3.3.11, $\mathcal{L}_A^{\Uparrow}$ nije podmreža mreže svih hiperklonova $\mathcal{L}_A^h$.

Sledeća teorema pokazuje da je mreža klonova izomorfna mreži $\mathcal{L}_A^{\Uparrow}$, što implicira da je $\mathcal{L}_A^{\Uparrow}$ algebarska mreža.

Teorema 3.3.2 *Mreža $\mathcal{L}_A$ klonova na A izomorfna je mreži $\mathcal{L}_A^{\Uparrow}$ PGZ hiperklonova na A.*

Dokaz. Pokazaćemo da je traženi izomorfizam

$$\lambda : \mathcal{L}_A \to \mathcal{L}_A^{\Uparrow}, \quad \text{dat sa} \quad C \mapsto \lceil C \rceil.$$

Preslikavanje λ je injektivno jer za proizvoljne $C_1, C_2 \in \mathcal{L}_A$ važi

$$\begin{aligned} \lambda(C_1) = \lambda(C_2) \quad &\Rightarrow \quad \lceil C_1 \rceil = \lceil C_2 \rceil \\ &\Rightarrow \quad \lceil C_1 \rceil \cap O_A = \lceil C_2 \rceil \cap O_A \\ &\Rightarrow \quad C_1 = C_2 \end{aligned}$$

Takođe, λ je sirjektivno jer za svaki PGZ hiperklon D važi $\lceil D \cap O_A \rceil = D$, a $D \cap O_A$ je klon, tj. $D = \lambda(D \cap O_A)$.

Ostaje nam još da pokažemo da je λ homomorfizam, tj. da se slaže sa mrežnim operacijama, a to važi jer za sve $C_1, C_2 \in \mathcal{L}_A$ imamo

$$\lambda(C_1 \wedge C_2) = \lambda(C_1 \cap C_2) = \lceil C_1 \cap C_2 \rceil = \lceil C_1 \rceil \wedge_{\Uparrow} \lceil C_2 \rceil,$$

$$\lambda(C_1 \vee C_2) = \lambda(\langle C_1 \cup C_2 \rangle) = \lceil \langle C_1 \cup C_2 \rangle \rceil = \lceil C_1 \rceil \vee_{\Uparrow} \lceil C_2 \rceil.$$

□

U nastavku ćemo definisati još jednu Galoisovu vezu između skupova R_A i H_A.

Definicija 3.3.12 *Za hiperoperaciju f kažemo da u-**čuva** relaciju ρ ako postoji podoperacija g od f koja čuva ρ.*

Neka je $uPol\rho$ skup svih hiperoperacija na A koje u-čuvaju relaciju ρ, a $uInv\, f$ skup svih relacija na A koje d-čuva hiperoperacija f. Primetimo da važi

$$uPol\rho = \{f \in H_A : (\exists g \in Pol\rho)\, g \subseteq f\} = \lceil Pol\rho \rceil.$$

Definišimo preslikavanja

$$uPol : \mathcal{P}(R_A) \to \mathcal{P}(H_A) \quad \text{i} \quad uInv : \mathcal{P}(H_A) \to \mathcal{P}(R_A)$$

na sledeći način:

$$\begin{aligned} uPol\, Q \quad &= \quad \bigcap_{\rho \in Q} uPol\rho = \{f \in H_A : f \ u\text{-čuva svako } \rho \in Q\}, \ Q \subseteq R_A, \\ uInv\, F \quad &= \quad \bigcap_{f \in F} uInv\, f = \{\rho \in R_A : \text{svako } f \in F \ u\text{-čuva } \rho\}, \ F \subseteq O_A. \end{aligned}$$

Prema teoremi 2.3.2 par $(uPol, uInv)$ je Galoisova veza između relacija i hiperoperacija.

Tvrđenje 3.3.12 *Za proizvoljno $Q \subseteq R_A$, $uPol\, Q$ je hiperklon.*

Dokaz. Očigledno je zadovoljeno

$$uPol\, Q = \bigcap_{\rho \in Q} uPol\rho = \bigcap_{\rho \in Q} \lceil Pol\rho \rceil.$$

Kako je $Pol\rho$ klon, to je prema tvrđenju 3.3.9 $\lceil Pol\rho \rceil$ hiperklon, a presek proizvoljne familije hiperklonova je takođe hiperklon. $\square$

Skup $uInv\, f$ nije relacijski klon pošto nije zatvoren u odnosu na direktan proizvod relacija, što ćemo pokazati u sledećem primeru.

Primer 3.3.12 *Neka je $A = \{0, 1, 2\}$, neka su $\rho_1, \rho_2 \in R_A$ date sa*

$$\rho_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \rho_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

i neka je hiperoperacija f na A definisana sa

	0	1	2
f	$\{1\}$	$\{0,1,2\}$	$\{1,2\}$

.

Jednostavno se pokazuje da su $g_1, g_2 \in O_A^{(1)}$ date sa

	0	1	2
g_1	1	2	1
g_2	1	0	2

,

podoperacije od f takve da $g_1 \in Pol\rho_1$ i $g_2 \in Pol\rho_2$, tj. $\rho_1, \rho_2 \in uInv\, f$. Međutim, $\rho_1 \times \rho_2 \notin uInv\, f$. Naime, imamo

$$\rho_1 \times \rho_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

i za svaku podoperaciju g od f važi $(g(0), g(2), g(1), g(2), g(0)) = (a, b, c, b, a)$, za neke $a, b, c \in A$, pri čemu je jedini element iz $\rho_1 \times \rho_2$ oblika (a, b, c, b, a) upravo $(0, 2, 1, 2, 0)$. No, $(g(0), g(2), g(1), g(2), g(0)) \neq (0, 2, 1, 2, 0)$, pošto je $g(0) = 1$.

ODNOSI SKUPOVA $dPol\rho, hPol\rho, mPol\rho$ I $uPol\rho$

Nakon predstavljanja nekoliko mogućih Galoisovih veza između relacija i hiperoperacija, prirodno se nameće pitanje u kakvom su odnosu skupovi hiperoperacija koji na neki od navedenih načina čuvaju datu relaciju ρ.

Skupovi $dPol\rho, hPol\rho$ i $mPol\rho$ su dobijeni pomoću relacija ρ_s, ρ_w i $\rho^{\#}$, respektivno. Na osnovu definicija ovih relacija jednostavno se zaključuje da je zadovoljeno

$$\rho_s \subseteq \rho^{\#} \subseteq \rho_w.$$

Obrnute inkluzije u opštem slučaju ne važe, kao što ćemo videti u narednom primeru.

Primer 3.3.13 *Neka je ρ binarna relacija na skupu $A = \{0, 1, 2\}$ data sa*

$$\rho = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Tada $(\{0, 2\}, \{0, 1, 2\}) \in \rho^{\#} \setminus \rho_s$, jer $(0, 0), (2, 2), (0, 1) \in \rho$ (tj. za svako $x \in \{0, 2\}$ postoji $y \in \{0, 1, 2\}$ tako da $(x, y) \in \rho$, i za svako $y \in \{0, 1, 2\}$ postoji $x \in \{0, 2\}$ tako da $(x, y) \in \rho$), ali $\{0, 2\} \times \{0, 1, 2\} \nsubseteq \rho_s$ pošto $(0, 2) \notin \rho$. Takođe, $(\{0, 1\}, \{2\}) \in \rho_w \setminus \rho^{\#}$, s obzirom da je $(\{0, 1\} \times \{2\}) \cap \rho = \{(1, 2)\}$, ali za $x = 0$ ne postoji $y \in \{2\}$ tako da $(x, y) \in \rho$.

Sada je jasno da za proizvoljno $\rho \in R_A$ važi

$$dPol\rho \subseteq mPol\rho \subseteq hPol\rho$$

dok obrnute inkluzije ne moraju biti zadovoljene.

Ostaje nam još da ispitamo odnose skupa $uPol\rho$ sa $dPol\rho, mPol\rho$ i $hPol\rho$.

Ako $f \in dPol\rho \cap H_A^{(n)}$, onda za svako $g \in O_A^{(n)}$ takvo da je $g \subseteq f$ i svaku matricu $M = [a_{ij}]_{m\times n} \in \rho^*$ imamo

$$g(M_{1*}) \times \cdots \times g(M_{m*}) \subseteq f(M_{1*}) \times \cdots \times f(M_{m*}) \subseteq \rho,$$

što znači da svaka podoperacija hiperoperacije $f \in dPol\rho$ čuva ρ, pa $f \in uPol\rho$, odnosno

$$dPol\rho \subseteq uPol\rho.$$

Međutim, $uPol\rho \subseteq dPol\rho$ ne mora da važi, što ćemo ilustrovati sledećim primerom.

Primer 3.3.14 *Neka je ρ binarna relacija na skupu $A = \{0, 1, 2\}$ data u primeru 3.3.13, i neka je f unarna hiperoperacija na A definisana sa*

	0	1	2
f	$\{0,1\}$	$\{0,2\}$	$\{0\}$

Jednostavno se utvrđuje da je $g \in O_A^{(1)}$, dato sa $g(x) = 0$, podoperacija od f koja čuva ρ, pa $f \in uPol\rho$. S druge strane, $(0,1) \in \rho$ i $(f(0), f(1)) = (\{0,1\}, \{0,2\})$, ali $\{0,1\} \times \{0,2\} \nsubseteq \rho$, jer, na primer, $(0,2) \notin \rho$, te stoga $f \notin dPol\rho$.

Što se tiče odnosa skupova $uPol\rho$ i $mPol\rho$, važi sledeće

$$mPol\rho \subseteq uPol\rho.$$

Naime, ako pretpostavimo da za $f \in mPol\rho$ ne postoji podoperacija koja čuva ρ, to bi značilo da za svaku podoperaciju g od f imamo $g \notin Pol\rho$, tj. za proizvoljnu matricu $M \in \rho^*$ sledi $g(M) \notin \rho$. Ali, tada dobijamo $f(M) \notin \rho^{\#}$, što je u suprotnosti sa pretpostavkom da $f \in mPol\rho$. Dakle, za svaku hiperoperaciju f koja m-čuva ρ postoji podoperacija g koja čuva ρ, pa je $f \in uPol\rho$.

Inkluzija $uPol\rho \subseteq mPol\rho$ generalno ne važi.

Primer 3.3.15 *Neka je $A = \{0, 1, 2\}$ i $\rho \in R_A^{(2)}$ definisana u primeru 3.3.13, i neka je f unarna hiperoperacija na A data sa*

	0	1	2
f	$\{0,2\}$	$\{0,1\}$	$\{0\}$

Kao i u prethodnom primeru $g \in O_A^{(1)}$, dato sa $g(x) = 0$, je podoperacija od f koja čuva ρ, pa $f \in uPol\rho$. Međutim, $(0,1) \in \rho$, ali $(f(0), f(1)) = (\{0,2\}, \{0,1\}) \notin \rho^{\#}$, jer za $x = 2$ ne postoji $y \in \{0,1\}$ tako da $(x,y) \in \rho$. Otuda $f \notin mPol\rho$.

Takođe, možemo reći da je

$$uPol\rho \subseteq hPol\rho.$$

Zaista, ako je f proizvoljna n-arna hiperoperacija iz $uPol\rho$, onda postoji podoperacija g od f koja čuva ρ. To znači da za svaku matricu $M \in \rho^*$ važi $(g(M_{1*}), \ldots, g(M_{m*})) \in \rho$, i za sve $i \in \{1, \ldots, m\}$ je $g(M_{i*}) \subseteq f(M_{i*})$. Otuda je

$$(f(M_{1*}) \times \cdots \times f(M_{m*})) \cap \rho \neq \emptyset,$$

odnosno $f \in hPol\rho$.

Obrnuta inkluzija u opštem slučaju ne mora da važi, što ćemo pokazati u sledećem primeru.

Primer 3.3.16 *Neka je* $A = \{0, 1, 2, 3\}$*, neka je* ρ *binarna relacija na* A *data sa*

$$\rho = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

i neka je $f \in hPol\rho \cap O_A^{(1)}$ *definisana sa*

	0	1	2	3
f	$\{0,2\}$	$\{1\}$	$\{1,3\}$	$\{0,1\}$

Pretpostavimo da postoji $g \subseteq f$ *tako da* $g \in Pol\rho$*. Pošto* $(0, 2) \in \rho$ *i* $(f(0), f(2)) = (\{0, 2\}, \{1, 3\})$*, sledi* $g(2) = 3$*, a kako je* $(2, 3) \in \rho$ *i* $(f(2), f(3)) = (\{1, 3\}, \{0, 1\})$*, mora biti* $g(2) = 1$*. Dakle, ne postoji podoperacija* g *od* f *koja čuva* ρ*, pa* $f \notin uPol\rho$*.*

Na kraju možemo da zaključimo da za proizvoljno $\rho \in R_A$ imamo

$$dPol\rho \subseteq mPol\rho \subseteq uPol\rho \subseteq hPol\rho,$$

pri čemu obrnute inkluzije u opštem slučaju ne važe. Dakle, za datu relaciju ρ, $hPol\rho$ sadrži sve elemente iz preostala tri skupa, pa ćemo u narednoj glavi pokazati da je, za neke specijalne relacije, $hPol\rho$ koatom mreže hiperklonova.

Glava 4

Maksimalni klonovi i maksimalni hiperklonovi

Maksimalni klonovi su veoma važni jer se pomoću njih može proveriti da li je neki skup kompletan ili ne. Time Rosenbergova potpuna karakterizacija maksimalnih klonova još više dobija na značaju. U ovoj glavi nakon priče o maksimalnim klonovima i predstavljanja Rosenbergove teoreme, prelazimo na slučaj hiperklonova, i pokazujemo da su skupovi hiperoperacija koji h-čuvaju neke od Rosenbergovih relacija upravo maksimalni hiperklonovi.

4.1 Maksimalni klonovi

U ovom poglavlju ćemo uvesti pojam maksimalnog klona i predstaviti nekoliko potrebnih i dovoljnih uslova da klon bude maksimalan, od kojih je svakako najznačajnija Rosenbergova klasifikacija maksimalnih klonova.

Definicija 4.1.1 *Klon $M \subseteq O_A$ je* **maksimalan** *ako za svaki klon C takav da je $M \subseteq C \subseteq O_A$ važi $C = M$ ili $C = O_A$.*

Pokazaćemo jedan jednostavan uslov maksimalnosti klona.

Tvrđenje 4.1.1 *Klon M je maksimalan ako i samo ako je $M \neq O_A$ i za sve $f \in O_A \setminus M$ važi $\langle M \cup \{f\}\rangle = O_A$.*

Dokaz. ($\Rightarrow$) Neka je M maksimalan klon i neka je $f \in O_A \setminus M$. Pretpostavimo da $\langle M \cup \{f\}\rangle \neq O_A$. Tada je

$$M \subset \langle M \cup \{f\}\rangle \subset O_A,$$

što je u suprotnosti sa maksimalnošću M.

($\Leftarrow$) Neka je C klon takav da je $M \subseteq C \subseteq O_A$. Pretpostavimo da je $C \neq M$ i neka je $f \in C \setminus M$. Sada imamo

$$C \subseteq O_A = \langle M \cup \{f\} \rangle \subseteq \langle C \cup \{f\} \rangle = \langle C \rangle = C,$$

odnosno $C = O_A$, što znači da je M maksimalan klon. $\square$

Poznato je da postoji konačno mnogo maksimalnih klonova na konačnom skupu A, i svaki pravi potklon od O_A je sadržan u nekom maksimalnom klonu. Odavde zaključujemo da je što preciznija karakterizacija maksimalnih klonova veoma važna, s obzirom da je skup $F \subseteq O_A$ kompletan ako i samo ako nije sadržan ni u jednom maksimalnom klonu na A.

Sledeće tvrđenje nam pokazuje da je svaki maksimalan klon potpuno određen nekom nedijagonalnom relacijom.

Tvrđenje 4.1.2 (Kuznecov 1961, [8])

(1) Ako je $Pol\, Q = O_A$, onda je $Q \subseteq \Delta_A$.

(2) Klon $C \neq O_A$ je maksimalan klon ako i samo ako je $C = Pol \rho$, za svako $\rho \in Inv\, C \setminus \Delta_A$.

Kao što smo već ranije pominjali, E.L. Post je odredio sve klonove na dvoelementnom skupu, pa samim tim i 5 maksimalnih. Napori da se odrede svi maksimalni klonovi na konačnom skupu sa bar tri elementa počeli su sredinom prošlog veka. Tako je S.V. Yablonski pronašao svih 18 maksimalnih klonova na troelementnom skupu, dok je A.I. Mal'cev pokazao da na četvoroelementnom skupu postoje 82 maksimalna klona. Međutim, I.G. Rosenberg je bio prvi koji uspeo da 1970. godine opiše sve maksimalne klonove na proizvoljnom konačnom skupu.

Sada ćemo predstaviti šest klasa relacija na skupu A koje ćemo koristiti u formulaciji Rosenbergove teoreme. Ove relacije se često nazivaju *Rosenbergove relacije.*

(R1) *Ograničena parcijalna uređenja.* Ovo su relacije poretka na A sa najmanjim i najvećim elementom.

(R2) *Permutacione relacije.* Ovo su relacije oblika $\rho = \{(x, \pi(x)) : x \in A\}$, gde je π permutacija bez fiksnih tačaka čiji su svi ciklusi iste proste dužine p.

(R3) *Afine relacije.* Ovo su relacije oblika

$$\rho = \{(a_1, a_2, a_3, a_4) : a_1 + a_2 = a_3 + a_4\},$$

gde je $(A, +, -, 0)$ Abelova p-grupa (to znači da je $px = 0$, za sve $x \in A$, odakle je $|A| = p^m$, gde je p prost broj i $m \in \mathbb{N}$).

(R4) *Netrivijalne relacije ekvivalencije.* Ovo su relacije ekvivalencije na A različite od $\delta_2^{12} = \{(x, x) : x \in A\}$ i A^2.

(R5) *Centralne relacije.* Sve unarne relacije su centralne relacije. Za m-arnu relaciju ρ, $m \geq 2$, kažemo da je *totalno refleksivna* ako sadrži sve m-torke iz A^m u kojima se neke koordinate ponavljaju, tj.

$$(x_1, \ldots, x_m) \in \rho \Leftrightarrow (\exists i, j)(i \neq j \text{ i } x_i = x_j).$$

Relacija ρ je *totalno simetrična* ako

$$(x_1, \ldots, x_m) \in \rho \Rightarrow (x_{\pi(1)}, \ldots, x_{\pi(m)}) \in \rho,$$

za proizvoljnu permutaciju π skupa $\{1, \ldots, m\}$. *Centar* $C(\rho)$ je skup svih elemenata $c \in A$ takvih da važi $(c, x_2, \ldots, x_m) \in \rho$, za sve $x_2, \ldots, x_m \in A$. Relacija $\rho \neq A^m$ je *centralna* ako je totalno refleksivna, totalno simetrična i ima neprazan centar.

(R6) *Regularne relacije.* Neka je $\Theta = \{\theta_1, \ldots, \theta_h\}$ familija relacija ekvivalencije. Kažemo da je Θ *m-regularna familija* ako svako θ_i ima tačno m klasa, i ako je A_i proizvoljna klasa od $\theta_i, i \in \{1, 2, \ldots, h\}$, onda $\bigcap A_i \neq \emptyset$. m-arna relacija $\rho \neq A^m$ je *m-regularna*, za $m \geq 3$ ako postoji m-regularna familija Θ takva da je $(x_1, \ldots, x_m) \in \rho$ ako i samo ako za sve $\theta \in \Theta$ postoje različiti i i j takvi da je $(x_i, x_j) \in \theta$.

Primer 4.1.1 *Navešćemo po jedan primer relacije iz svake od gore navedenih klasa na skupu $A = \{0, 1, 2\}$.*

(R1) $\rho_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ *je jedna relacija poretka na skupu A, gde je najmanji element 0, a najveći 2.*

(R2) $\rho_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *je relacija koja odgovara permutaciji* $\pi = (0\ 2\ 1)$. π *je permutacija bez fiksnih tačaka, sa jednim ciklusom dužine 3.*

(R3) $\rho_3 = \{(a_1, a_2, a_3, a_4) \in A^4 : a_1 + a_2 = a_3 + a_4\}$, *pri čemu je* $+$ *sabiranje po modulu 3.*

(R4) $\rho_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ *je jedna netrivijalna relacija ekvivalencije na skupu* A, *čije su klase* $\{0, 1\}$ *i* $\{2\}$.

(R5) $\rho_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ *je centralna relacija na skupu* A, *jer je očigledno (totalno) refleksivna i (totalno) simetrična, i njen centralni element je* 0.

(R6) Jedina m-regularna relacija na skupu A *je ona za slučaj* $m = 3$ *i* $h = 1$, *pri čemu je odgovarajuća relacija ekvivalencije* $\theta = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, *što znači da je* $\rho_6 = A^3 \setminus \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Pre nego što pređemo na Rosenbergovu teoremu, uvešćemo još neke pojmove i navesti (bez dokaza) tvrđenja koja igraju bitnu ulogu u dokazu teoreme.

Definicija 4.1.2 *Algebra* $\boldsymbol{A} = (A, F)$ *je*

- **primalna** *ako je svaka funkcija na* A *istovremeno term operacija algebre* $\boldsymbol{A}$*;*
- **preprimalna** *ako nije primalna, ali za svaku funkciju* f *koja nije term operacija na* $\boldsymbol{A}$, *algebra* $(A, F \cup \{f\})$ *je primalna.*

Takođe možemo reći da je algebra $\mathbf{A} = (A, F)$ primalna ako je F kompletan skup, tj. $\langle F \rangle = O_A$, a da je preprimalna ako je $\langle F \rangle$ maksimalan klon na skupu A.

Definicija 4.1.3 *Konačna algebra* (A, F) *je* **kvaziprimalna** *ako i samo ako je* $\langle F \rangle = Pol\, Q$, *pri čemu je* Q *skup svih relacija oblika*

$$\rho = \{(x, h(x)) : x \in A\},$$

gde je h izomorfizam između podalgebri od (A, F).

Definicija 4.1.4 *Ternarna operacija p koja zadovoljava uslov*

$$p(x, y, y) = p(y, y, x) = x$$

naziva se **Mal'cevljeva operacija**.

Tvrđenje 4.1.3 *(a)* (Quackenbush [15]) *Ako za svaku Rosenbergovu relaciju ρ važi $F \nsubseteq Pol\rho$, onda $\langle F \rangle$ sadrži Mal'cevljevu operaciju.*

(b) (McKenzie) *Ako je (A, F) prosta konačna algebra bez pravih podalgebri i koja sadrži Mal'cevljevu term operaciju, tada je (A, F) kvaziprimalna, ili postoji Abelova p-grupa $(A, +)$ sa sledećim svojstvom:*

za svako $f \in F$ postoji $a \in A$ i endomorfizmi ε_i na $(A, +)$ tako da je

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \varepsilon_1(x_1) + \ldots + \varepsilon_n(x_n) + a.$$

Teorema 4.1.1 (Rosenberg 1970, [17]) *Klon M je maksimalan ako i samo ako je oblika $Pol\rho$ gde je ρ relacija iz jedne od klasa (R1)-(R6).*

Napomena. Rosenbergov dokaz ove teoreme je veoma komplikovan, a kako ni kasniji kraći dokazi [Quackenbush (1979), Lau (1992)] nisu baš jednostavni, ovde ćemo navesti samo skicu dokaza koja se zasniva na dokazu Quackenbusha, a koja je preuzeta iz [13].

Dokaz.

($\Leftarrow$) Pokazujemo da je $Pol\rho$ maksimalan klon za svaku Rosenbergovu relaciju ρ. Daćemo dokaz u slučaju relacija iz (R1), ali osnovna ideja je ista i za ostale slučajeve.

Neka je ρ Rosenbergova relacija i $C = Pol\rho$. Tada je prema tvrđenju 4.1.2 (1) $C \neq O_A$, a prema istom tvrđenju pod (2), da bi C bio maksimalan dovoljno je pokazati da za sve $\sigma \in Inv\, C \setminus \Delta_A$ važi $C = Pol\sigma$. Ovo je pak ekvivalentno činjenici da $\rho \in \langle \sigma \rangle$, za svako $\sigma \in Inv\, C \setminus \Delta_A$.

($\rightarrow$) Ako je $C = Pol\sigma$, onda je prema posledici 3.3.1(2)

$$Inv\, C = Inv\, Pol\sigma = \langle \sigma \rangle,$$

a kako je $\rho \in Inv\, C$, imamo $\rho \in \langle \sigma \rangle$.

($\leftarrow$) Neka $\rho \in \langle\sigma\rangle$. Tada je $C = Pol\rho \supseteq Pol\sigma$. S druge strane, $\sigma \in Inv\, C$, pa je $C \subseteq Pol\sigma$.

Neka je $\leq$ ograničeno parcijalno uređenje na A, sa najmanjim elementom $\mathbf{0}$ i najvećim elementom $\mathbf{1}$ i neka je $C = Pol\{\leq\}$. Pokažimo da za proizvoljno $\sigma \in Inv\, C \setminus \Delta_A$ važi $\leq \in \langle\sigma\rangle$. Bez ograničenja opštosti možemo pretpostaviti da σ zadovoljava uslov

$$\neg(\exists i, j)(i \neq j \text{ i } (\forall (x_1, \ldots, x_n) \in \sigma)\ x_i = x_j). \tag{4.1}$$

Pretpostavimo najpre da postoje $s \neq t$, tako da je $pr_{st}(\sigma) \subseteq \leq$. Pokažimo da je tada $\leq = pr_{st}(\sigma)$. Neka je $a \leq b$ i neka $(p_1, \ldots, p_n) \in \sigma$ tako da je $p_s < p_t$ (takvi p_s i p_t postoje zbog uslova (4.1)). Definišimo operaciju $f : A \to A$ na sledeći način

$$f(x) = \begin{cases} a, & x \leq p_s \\ b, & \text{inače.} \end{cases}$$

Očigledno $f \in Pol\{\leq\} = C$, a s obzirom da $\sigma \in Inv\, C$, sledi da f čuva σ. Zato je $(f(p_1), \ldots, f(p_n)) \in \sigma$, pa važi $(f(p_s), f(p_t)) = (a, b) \in pr_{st}(\sigma)$. Dakle, $\leq = pr_{st}(\sigma) \in \langle\sigma\rangle$.

S druge strane, pretpostavimo da za sve $s \neq t$ važi $pr_{st}(\sigma) \not\subseteq \leq$. Neka je $|\sigma| = m$ i označimo elemente iz σ sa $(p_{i1}, \ldots, p_{in})$, za $i \in \{1, \ldots, m\}$. Za svako $j \in \{1, \ldots, n\}$ neka je $\mathbf{x}_j = (p_{1j}, \ldots, p_{mj})$. Neka je $(q_1, \ldots, q_n)$ proizvoljna n-torka iz A^n i definišimo operaciju $g : A^m \to A$ na sledeći način

$$g(y_1, \ldots, y_m) = \begin{cases} q_i, & (y_1, \ldots, y_m) = \mathbf{x}_i \\ \mathbf{0}, & (\exists j)((y_1, \ldots, y_m) \leq \mathbf{x}_j \text{ i } (y_1, \ldots, y_m) \neq \mathbf{x}_j) \\ \mathbf{1}, & \text{inače,} \end{cases}$$

gde je

$$(x_1, \ldots, x_m) \leq (y_1, \ldots, y_m) \Leftrightarrow (\forall i \in \{1, \ldots, m\})\ x_i \leq y_i.$$

Označimo sa X, Y i Z sledeće podskupove od A^m:

$$\begin{aligned} X &= \{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\}; \\ Y &= \{(y_1, \ldots, y_m) \in A^m : (\exists j)((y_1, \ldots, y_m) \leq \mathbf{x}_j \text{ i } (y_1, \ldots, y_m) \neq \mathbf{x}_j)\}; \\ Z &= A^m \setminus (X \cup Y). \end{aligned}$$

Na osnovu pretpostavke da je $pr_{st}(\sigma) \nsubseteq \leq$, za sve $s \neq t$, zaključujemo da ne postoje $i \neq j$ tako da je $\mathbf{x}_i \leq \mathbf{x}_j$, što znači da su skupovi X, Y i Z međusobno disjunktni, odnosno g je dobro definisano. Pokažimo da $g \in Pol\{\leq\}$. Neka je $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_m) \leq (y_1, \ldots, y_m) = \mathbf{y}$. Razmatramo sledeće mogućnosti:

- Ako $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$, onda postoji i tako da je $\mathbf{x} = \mathbf{y} = \mathbf{x}_i$. Odavde je $(g(\mathbf{x}), g(\mathbf{y})) = (q_i, q_i) \in \leq$, jer je $\leq$ refleksivna relacija.

- U slučaju da $\mathbf{x} \in Y$, imamo $(g(\mathbf{x}), g(\mathbf{y})) = (\mathbf{0}, g(\mathbf{y})) \in \leq$, s obzirom da je $\mathbf{0}$ najmanji element.

- Iz $\mathbf{y} \in Z$, dobijamo $(g(\mathbf{x}), g(\mathbf{y})) = (g(\mathbf{x}), \mathbf{1}) \in \leq$, pošto je $\mathbf{1}$ najveći element.

- Slučaj $\mathbf{x} \in X, \mathbf{y} \in Y$ nije moguć jer bi to značilo da postoje $\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j \in X$ takvi da je $\mathbf{x}_i \leq \mathbf{y} \leq \mathbf{x}_j$, tj. $\mathbf{x}_i \leq \mathbf{x}_j$.

- $\mathbf{x} \in Z$ i $\mathbf{y} \in X \cup Y$ implicira da postoji $\mathbf{x}_j \in X$ tako da je $\mathbf{x} \leq \mathbf{x}_j$, što bi značilo da $\mathbf{x} \in Y$, a to nije moguće jer $Y \cap Z = \emptyset$.

Dakle, $g \in Pol\{\leq\}$. Otuda g čuva i σ, pa je $(q_1, \ldots, q_n) \in \sigma$, a kako je ova n-torka proizvoljno izabrana, sledi da je $\sigma = A^n$, što je nemoguće jer $\sigma \notin \Delta_A$.

($\Rightarrow$) Pretpostavimo da postoji maksimalan klon C koji nije oblika $Pol\rho$ za neku Rosenbergovu relaciju ρ. Tada za svaku Rosenbergovu relaciju ρ sledi $C \nsubseteq Pol\rho$, jer na osnovu suprotnog smera znamo da je $Pol\rho$ maksimalan klon. Sada prema tvrđenju 4.1.3(a) C sadrži Mal'cevljevu operaciju.

Specijalno, kako $C \nsubseteq Pol\rho$, za proizvoljnu relaciju ekvivalencije ρ sledi da je (A, C) prosta algebra, jer za svaku netrivijalnu relaciju ekvivalencije ρ postoji operacija $f \in C$ s kojom nije saglasna, što znači da algebra (A, C) nema netrivijalnih kongruencija.

Takođe, pošto $C \nsubseteq Pol\rho$, za proizvoljnu centralnu relaciju ρ, onda (A, C) nema pravih podalgebri. Naime, za proizvoljno $\emptyset \neq B \subset A$ možemo uzeti centralnu relaciju ρ čiji je centar baš B, pa pošto postoji operacija $f \in C$ koja ne čuva ρ, onda ni B neće biti zatvoreno u odnosu na f.

Ovim smo pokazali da (A, C) zadovoljava uslove tvrđenja 4.1.3(b), pa imamo da je (A, C) kvaziprimalna ili postoji Abelova p-grupa $(A, +)$ takva da za svako $f \in C$ postoji $a \in A$ i endomorfizmi ε_i na $(A, +)$ tako da je $f(x_1, \ldots, x_n) = \varepsilon_1(x_1) + \ldots + \varepsilon_n(x_n) + a$. Druga mogućnost implicira da je $C \subseteq Pol\rho$, gde je ρ iz (R3), što je u suprotnosti sa pretpostavkom da je $C \nsubseteq Pol\rho$, za sve Rosenbergove relacije. Dakle, (A, C) je kvaziprimalna.

Kako (A, C) nema pravih podalgebri, sledi da su jedini izomorfizmi između podalgebri od (A, C) zapravo automorfizmi algebre (A, C). Uzmimo proizvoljno $\varphi \in \mathrm{Aut}(A, C)$. Neka je B skup svih fiksnih tačaka automorfizma φ. Jasno, B je podalgebra od (A, C) jer za proizvoljne $x_1, \ldots, x_n \in B$ i $f \in C$ imamo

$$f(x_1, \ldots, x_n) = f(\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_n)) = \varphi(f(x_1, \ldots, x_n)),$$

što znači da $f(x_1, \ldots, x_n) \in B$. Pošto (A, C) nema pravih podalgebri, sledi da je $B = \emptyset$ ili $B = A$, odnosno φ nema fiksnih tačaka ili je $\varphi = \mathrm{id}$. Ako pretpostavimo da je $\varphi \neq \mathrm{id}$, onda je φ permutacija bez fiksnih tačaka. Neka je k dužina najkraćeg ciklusa od φ i neka su

$$(a_{11}, \ldots, a_{1k}), \ldots, (a_{n1} \ldots, a_{nk})$$

svi najkraći ciklusi od φ. Tada je $\{a_{11}, \ldots, a_{1k}, \ldots, a_{n1} \ldots, a_{nk}\}$ skup svih fiksnih tačaka preslikavanja $\varphi^k \in \mathrm{Aut}(A, C)$, što znači da je $\{a_{11}, \ldots, a_{nk}\} = A$. Pošto φ nema fiksnih tačaka, to je $k > 1$, pa postoji prost broj p tako da je $k = p \cdot m$, za neko $m \in \mathbb{N}$. Ali tada, s obzirom da je k dužina najkraćeg ciklusa u φ, a $m < k$, dobijamo da je φ^m automorfizam od (A, C) bez fiksnih tačaka reda p ($(\varphi^m)^p = \varphi^k = \mathrm{id}$), pa je $C \subseteq Pol\rho$, za ρ iz (R2), što je kontradikcija sa pretpostavkom da $C \nsubseteq Pol\rho$ za sve Rosenbergove relacije ρ. Dakle, $\mathrm{Aut}(A, C) = \{\mathrm{id}\}$.

Sada, na osnovu definicije kvaziprimalne algebre važi $C = Pol\{\delta_2^{12}\} = O_A$, odnosno (A, C) je primalna algebra, ali to je nemoguće jer je C maksimalan klon. $\square$

Primer 4.1.2 *Maksimalni klonovi na dvoelementnom skupu $A = \{0, 1\}$.*

(R1) Jedino ograničeno parcijalno uređenje na A je $\rho = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Tada je $M = Pol\rho$ skup svih monotonih operacija na A.

(R2) Jedina relacija iz ove klase odgovara permutaciji $\pi = (0\ 1)$, tj. $\rho = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, pa je $S = Pol\rho$ skup svih samodualnih operacija na A.

(R3) *Jedina relacija iz ove klase je*

$$\rho = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in A^4 : x_1 + x_2 = x_3 + x_4\},$$

gde je + sabiranje po modulu 2. Tada je $L = Pol\rho$ *skup svih linearnih operacija na* A.

(R4) *Ne postoji netrivijalna relacija ekvivalencije na* A.

(R5) *Postoje 2 centralne relacije na* A. *To su unarne relacije* $\rho_0 = (0)$ *i* $\rho_1 = (1)$. *Tada je* $T_0 = Pol\rho_0$ *skup svih operacija* f *takvih da je* $f(0, \ldots, 0) = 0$, *dok je* $T_1 = Pol\rho_1$ *skup svih operacija* f *takvih da je* $f(1, \ldots, 1) = 1$.

(R6) *Ne postoji* h*-regularna relacija na* A.

4.2 Maksimalni hiperklonovi

Nakon definicije, navešćemo jedan primer maksimalnog hiperklona, a potom ćemo dati kriterijum maksimalnosti koji ćemo koristiti u ostataku ovog rada kako bismo dobili još neke koatome mreže hiperklonova.

Definicija 4.2.1 *Hiperklon* $M \subseteq H_A$ *je* **maksimalan** *ako za svaki hiperklon* C *takav da je* $M \subseteq C \subseteq H_A$ *važi* $C = M$ *ili* $C = H_A$.

U narednom tvrđenju ćemo prikazati jedan specijalan maksimalan hiperklon. Dokaz ovog tvrđenja je preuzet iz [5].

Tvrđenje 4.2.1 *Klon svih operacija na skupu* A *je maksimalan hiperklon, tj. za svako* $f \in H_A \setminus O_A$ *važi* $\langle O_A \cup \{f\}\rangle_h = H_A$.

Dokaz. Ako je f proizvoljna n-arna hiperoperacija iz $H_A \setminus O_A$, onda postoji bar jedna n-torka $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in A^n$ takva da je $f(\mathbf{a}) = \{c_0, \ldots, c_{p-1}\}$ i $p \geq 2$.

Inkluzija $\langle O_A \cup \{f\}\rangle_h \subseteq H_A$ je očigledna jer je H_A hiperklon, a $f \in H_A$ i $O_A \subseteq H_A$. Pokažimo da važi i $H_A \subseteq \langle O_A \cup \{f\}\rangle_h$. Neka je h proizvoljna m-arna hiperoperacija iz H_A. Definišimo preslikavanja $f_1, \ldots, f_n \in O_A^{(m)}$ i $g \in O_A^{(\ell+m)}$ na sledeći način.

Ako je $h(x_1,\ldots,x_m)=\{d_0,d_1,\ldots,d_{q-1}\}$ za neko $q\geq 1$, onda za sve $i\in\{1,\ldots,n\}$ neka je $f_i(x_1,\ldots,x_m)=\{a_i\}$ i

$$\begin{array}{lcl} g(x_1,\ldots,x_m,c_0,\ldots,c_0,c_0) & = & \{d_0\} \\ g(x_1,\ldots,x_m,c_0,\ldots,c_0,c_1) & = & \{d_1\} \\ & \vdots & \\ g(x_1,\ldots,x_m,c_{p-1},\ldots,c_{p-1},c_{p-1}) & = & \{d_{q-1}\} \end{array}$$

gde je $\ell\in\mathbb{N}$ broj takav da je

$$p^{\ell-1}<\max_{(x_1,\ldots,x_m)\in A^m}|h(x_1,\ldots,x_m)|\leq p^{\ell}.$$

Preciznije, $g(x_1,\ldots,x_m,c_{i_1},\ldots,c_{i_{\ell-1}},c_{i_\ell})=\{d_i\}$ pri čemu je

$$i=\begin{cases} i_1p^{\ell-1}+i_2p^{\ell-2}+\ldots+i_\ell p^0, & \text{za } \ i_1p^{\ell-1}+i_2p^{\ell-2}+\ldots+i_\ell p^0\ \leq q-1 \\ q-1, & \text{inače.} \end{cases}$$

Da bismo kompletirali definiciju operacije g, za sve $(z_1,\ldots,z_\ell)\notin\{c_0,\ldots,c_{p-1}\}^\ell$ možemo uzeti $g(x_1,\ldots,x_m,z_1,\ldots,z_\ell)=\{d_{q-1}\}$, što ne utiče na dokaz.

Sada možemo dokazati da je

$$h=g\big[\pi_1^m,\ldots,\pi_m^m,f[f_1,\ldots,f_n],\ldots,f[f_1,\ldots,f_n]\big],$$

što implicira da $h\in\langle O_A\cup\{f\}\rangle_h$. Za $h(x_1,\ldots,x_m)=\{d_0,d_1,\ldots,d_{q-1}\}$, imamo

$$\begin{aligned} g\big[\pi_1^m,\ldots,\pi_m^m,\ & f[f_1,\ldots,f_n],\ldots,f[f_1,\ldots,f_n]\big](x_1,\ldots,x_m)= \\ &= g^{\#}\big(\{x_1\},\ldots,\{x_m\},\{c_0,\ldots,c_{p-1}\},\ldots,\{c_0,\ldots,c_{p-1}\}\big) \\ &= g(x_1,\ldots,x_m,c_0,\ldots,c_0)\cup g(x_1,\ldots,x_m,c_0,\ldots,c_0,c_1)\cup\ldots \\ &\quad \ldots\cup g(x_1,\ldots,x_m,c_{p-1},\ldots,c_{p-1},c_{p-1}) \\ &= \{d_0,d_1,\ldots,d_{q-1}\}=h(x_1,\ldots,x_m). \end{aligned}$$

□

U narednoj teoremi dajemo kriterijum koji treba da zadovolji hiperklon *hPol*ρ (definisan u poglavlju *Hiperklonovi određeni relacijom* ρ_w) da bi bio maksimalan hiperklon.

Teorema 4.2.1 [11] *Neka je $Pol\rho$ maksimalan klon na A takav da*

$$(\forall f \in H_A \setminus hPol\rho)\,(\exists f' \in O_A \setminus Pol\rho)\; f' \in \langle Pol\rho \cup \{f\}\rangle_h. \tag{4.2}$$

Tada je $hPol\rho$ maksimalan hiperklon.

Dokaz. Neka je $\rho \subseteq A^m$ takva da je $Pol\rho$ maksimalan klon na A i neka je $f \in H_A \setminus hPol\rho$. Tada prema (4.2) postoji $f' \in O_A \setminus Pol\rho$ tako da $f' \in \langle Pol\rho \cup \{f\}\rangle_h$. Pošto je $Pol\rho$ maksimalan klon i $f' \notin Pol\rho$, imamo $\langle Pol\rho \cup \{f'\}\rangle = O_A$. Neka je c_A n-arna konstantna operacija takva da je $c_A(x_1, \dots, x_n) = A$, za sve $(x_1, \dots, x_n) \in A^n$. Jasno je da $c_A \in hPol\rho$ jer je $\rho \neq \emptyset$, pa važi $(A, \dots, A) \in \rho_w$. S obzirom da je O_A maksimalan hiperklon (tvrđenje 4.2.1), imamo $\langle O_A \cup \{c_A\}\rangle_h = H_A$. Stoga,

$$\begin{aligned} H_A &= \langle O_A \cup \{c_A\}\rangle_h = \langle Pol\rho \cup \{f'\} \cup \{c_A\}\rangle_h \subseteq \\ &\subseteq \langle Pol\rho \cup \{f\} \cup \{c_A\}\rangle_h \subseteq \langle hPol\rho \cup \{f\}\rangle_h \subseteq H_A, \end{aligned}$$

pa je otuda $\langle hPol\rho \cup \{f\}\rangle_h = H_A$, tj. $hPol\rho$ je maksimalan hiperklon. □

U naredna četiri poglavlja ćemo pokazati da je $hPol\rho$ maksimalan hiperklon u slučaju da je ρ ograničeno parcijalno uređenje, netrivijalna relacija ekvivalencije, centralna, odnosno regularna relacija.

4.3 Hiperklonovi određeni ograničenim parcijalnim uređenjima

U ovom poglavlju, koje je bazirano na rezultatima iz [3] i [4], ćemo pokazati da je za svako ograničeno parcijalno uređenje ρ hiperklon $hPol\rho$ maksimalan jer zadovoljava uslove teoreme 4.2.1, odnosno za svaku hiperoperaciju f koja nije u $hPol\rho$ odredićemo operaciju f' koja ne čuva ρ, a koja se može predstaviti kao kompozicija nekih operacija iz $Pol\rho$ i f. Pošto $f \notin hPol\rho$, to znači da postoji matrica M čije su kolone uređeni parovi iz ρ, takva da je $f(M) = (B, C)$, pri čemu $B, C \in P_A^*$, tako da nijedan element iz B nije u relaciji ni sa jednim elementom iz C. Koristeći skupove B i C konstruisaćemo operacije iz $Pol\rho$ preko kojih ćemo izraziti operaciju f'.

Neka je $\rho \in R_A$ ograničeno parcijalno uređenje na skupu A, čiji je najmanji element $\mathbf{0}$, a najveći $\mathbf{1}$. Neka su B i C neprazni podskupovi od A takvi da je $(B \times C) \cap \rho = \emptyset$. Kako je ρ refleksivna relacija, to znači da je $B \cap C = \emptyset$. Izaberimo proizvoljne $b \in B$ i $c \in C$ u slučaju da je $(C \times B) \cap \rho = \emptyset$, a u suprotnom biramo $b \in B$ i $c \in C$ takve da je $(c, b) \in \rho$. Definišimo sledeće skupove:

$$\begin{aligned}
B' &= \{x \in A : (b', x) \in \rho \text{ i } (x, b'') \in \rho \text{ za neke } b', b'' \in B\},\\
C' &= \{x \in A : (c', x) \in \rho \text{ i } (x, c'') \in \rho \text{ za neke } c', c'' \in C\},\\
C'' &= \{x \in A : x \notin B' \text{ i } (c', x) \in \rho \text{ i } (x, b') \in \rho \text{ za neke } b' \in B\\
&\quad\ \text{ i } c' \in C\},\\
G &= \{x \in A : x \notin B' \cup C' \cup C'' \text{ i } ((b', x) \in \rho \text{ za neke } b' \in B\\
&\quad\ \text{ ili } (c', x) \in \rho \text{ za neke } c' \in C' \cup C'')\}\\
L &= \{x \in A : x \notin B' \cup C' \cup C'' \text{ i } ((x, b') \in \rho \text{ za neke } b' \in B\\
&\quad\ \text{ ili } (x, c') \in \rho \text{ za neke } c' \in C' \cup C'')\}.
\end{aligned}$$

Lema 4.3.1 *Za proizvoljne $b \in B'$ i $c \in C' \cup C''$ važi $(b, c) \notin \rho$.*

Dokaz. Pretpostavimo da postoje $b \in B'$ i $c \in C' \cup C''$ takvi da je $(b, c) \in \rho$. Imamo dve mogućnosti.

- Ako je $c \in C'$, onda za neko $b' \in B$ i $c' \in C$ imamo $(b', b), (b, c), (c, c') \in \rho$. Odavde, zbog tranzitivnosti relacije ρ, sledi $(b', c') \in \rho$, za $b' \in B$ i $c' \in C$, što je u suprotnosti sa izborom skupova B i C.

- Ako je $c \in C''$, onda postoje $b', b'' \in B$ tako da su $(b', b), (b, c), (c, b'') \in \rho$, odnosno $(b', c), (c, b'') \in \rho$. Međutim, ovo bi značilo da je $c \in B'$, što je nemoguće jer je $B' \cap C'' = \emptyset$.

□

Definišimo unarnu operaciju g na sledeći način:

$$g(x) = \begin{cases} b, & x \in B' \\ c, & x \in C' \cup C'' \\ \mathbf{1}, & x \in G \\ \mathbf{0}, & x \in L \\ x, & \text{inače.} \end{cases} \tag{4.3}$$

Tvrđenje 4.3.1 *Operacija $g \in O_A^{(1)}$ je dobro definisana.*

Dokaz. Treba pokazati da su skupovi $B', C' \cup C'', G$ i L po parovima disjunktni. Kako prema definiciji skupova G i L važi

$$(G \cup L) \cap (B' \cup C' \cup C'') = \emptyset,$$

ostaje nam još da proverimo da li je $B' \cap (C' \cup C'') = \emptyset$ i $G \cap L = \emptyset$.

- B' i C'' su disjunktni po definiciji skupa C''. Pretpostavimo da postoji $x \in B' \cap C'$. Tada imamo $(c', x), (x, b') \in \rho$, za neke $b' \in B$ i $c' \in C$, odakle je $x \in C''$, što je nemoguće.

- Ako bismo imali $x \in G \cap L$, to bi značilo da postoje $b', b'' \in B$ i $c', c'' \in C' \cup C''$ tako da

  $$((b', x) \in \rho \ \text{ ili } \ (c', x) \in \rho) \ \text{ i } \ ((x, b'') \in \rho \ \text{ ili } \ (x, c'') \in \rho).$$

  Moguće je:

  1) $(b', x), (x, b'') \in \rho$, odakle je $x \in B'$, što je nemoguće zbog $(G \cup L) \cap B' = \emptyset$;
  2) $(b', x), (x, c'') \in \rho$, što povlači $(b', c'') \in \rho$, za $b' \in B \subseteq B'$ i $c'' \in C' \cup C''$, a to je nemoguće zbog leme 4.3.1;
  3) $(c', x), (x, b'') \in \rho$. Za $c' \in C' \cup C''$ postoji $c_1 \in C$ tako da je $(c_1, c') \in \rho$, odnosno $(c_1, x), (x, b'') \in \rho$, za neke $b'' \in B$ i $c_1 \in C$, odakle je $x \in C''$, što je u suprotnosti sa definicijom G i L;
  4) $(c', x), (x, c'') \in \rho$. Za $c' \in C' \cup C''$ postoji $c_1 \in C$ tako da je $(c_1, c') \in \rho$. Ako je $c'' \in C'$, uzećemo $c_2 \in C$ tako da je $(c'', c_2) \in \rho$, a ako je $c'' \in C''$, uzećemo $b_2 \in B$ tako da je $(c'', b_2) \in \rho$. U svakom slučaju dobijamo $x \in C' \cup C''$, što je ponovo kontradikcija sa definicijom skupova G i L.

□

Operacija g je jedna od operacija koje ćemo koristiti za definisanje $f' \in O_A \setminus Pol\rho$, pa nam je bitno da g čuva ρ, što ćemo u nastavku i pokazati.

Lema 4.3.2 *Neka je g definisana sa (4.3). Tada je $g \in Pol\rho$.*

Dokaz. Neka su $x, y \in A$. U zavisnosti od toga kojim od gore definisanih podskupova skupa A pripadaju x i y, razlikujemo sledeće slučajeve:

$x \backslash y$	B'	$C' \cup C''$	G	L	inače
B'	1	2	3	4	5
$C' \cup C''$	6	7	8	9	10
G	11	12	13	14	15
L	16	17	18	19	20
inače	21	22	23	24	25

Pokazaćemo da u svakom od ovih 25 slučajeva ili $(x, y) \notin \rho$, ili ako $(x, y) \in \rho$, onda i $(g(x), g(y)) \in \rho$.

1) Neka $x, y \in B'$ i pretpostavimo da $(x, y) \in \rho$. Tada $(g(x), g(y)) = (b, b) \in \rho$, jer je ρ refleksivna relacija.

2) Ako $x \in B'$ i $y \in C' \cup C''$, onda $(x, y) \notin \rho$ zbog leme 4.3.1.

3) Za $x \in B'$ i $y \in G$, ako $(x, y) \in \rho$, onda $(g(x), g(y)) = (b, \mathbf{1}) \in \rho$, pošto je $\mathbf{1}$ najveći element.

4) Neka $x \in B'$ i $y \in L$, i pretpostavimo da $(x, y) \in \rho$. Tada imamo sledeće mogućnosti:

   (a) Postoji $c' \in C' \cup C''$ tako da $(y, c') \in \rho$. Ali tada $(x, c') \in \rho$ za $x \in B'$ i $c' \in C' \cup C''$, što je nemoguće zbog leme 4.3.1.

   (b) Postoje $b', b'' \in B$ tako da $(b', x), (x, y), (y, b'') \in \rho$, što bi značilo da $y \in B'$.

5) U slučaju da $x \in B'$ i $y \notin B' \cup C' \cup C'' \cup G \cup L$ iz $(x, y) \in \rho$ bi sledilo da $y \in G$.

6) Ako $x \in C' \cup C''$ i $y \in B'$, onda $(c', x), (x, y), (y, b') \in \rho$, te stoga $(c', b') \in \rho$, za neko $c' \in C$ i $b' \in B$. S obzirom na to kako smo izabrali $b \in B$ i $c \in C$, sledi $(g(x), g(y)) = (c, b) \in \rho$.

7) Iz $(x, y) \in \rho$ za $x, y \in C' \cup C''$ sledi $(g(x), g(y)) = (c, c) \in \rho$, zbog refleksivnosti relacije ρ.

8) Za $x \in C' \cup C''$ i $y \in G$, kao u slučaju 3 $(x, y) \in \rho$ povlači $(g(x), g(y)) = (c, \mathbf{1}) \in \rho$.

9) Ako $x \in C' \cup C'', y \in L$ i $(x, y) \in \rho$, razmatramo sledeće slučajeve:

   (a) $(c', x), (x, y), (y, b') \in \rho$, za neke $b' \in B'$ i $c' \in C$, što znači da je $(c', y), (y, b') \in \rho$, za $b' \in B'$ i $c' \in C$, tj. $y \in C''$.

   (b) $(c', x), (x, y), (y, c'') \in \rho$, za neke $c' \in C$ i $c'' \in C' \cup C''$. Tada je $(c', y), (y, c'') \in \rho$, za $c' \in C$ i $c'' \in C' \cup C''$, odakle je $y \in C' \cup C''$.

10) Neka $x \in C' \cup C''$ i $y \notin B' \cup C' \cup C'' \cup G \cup L$. Tada iz $(x, y) \in \rho$ dobijamo $y \in G$.

11) Za $x \in G$ i $y \in B'$ pretpostavimo da $(x, y) \in \rho$. Tada imamo:

   (a) Postoje $b', b'' \in B$ tako da $(b', x), (x, y), (y, b'') \in \rho$, pa je $x \in B'$.

   (b) Postoje $c' \in C' \cup C''$ i $b'' \in B$ tako da $(c', x), (x, y), (y, b'') \in \rho$, odnosno $(c'', c'), (c', x), (x, b'') \in \rho$, za neke $c'' \in C, c' \in C' \cup C''$ i $b'' \in B$. Otuda je $x \in C''$.

12) $x \in G \wedge y \in C' \cup C'' \Leftrightarrow (x \in G \wedge y \in C') \vee (x \in G \wedge y \in C'')$, pa razlikujemo četiri slučaja

   (a) $(b', x), (x, y), (y, c'') \in \rho$, za neke $b' \in B$ i $c'' \in C$, odnosno $(b', c'') \in \rho$, za $b' \in B$ i $c'' \in C$, ali to nije moguće na osnovu izbora skupova B i C.

   (b) Postoje $c' \in C' \cup C''$ i $c'' \in C$ tako da $(c', x), (x, y), (y, c'') \in \rho$, pa postoji i $c''' \in C$ takav da je $c''', c') \in \rho$, tj. $(c''', x), (x, c'') \in \rho$, za neke $c'', c''' \in C$, te je $x \in C'$.

   (c) Važi $(b', x), (x, y), (y, b'') \in \rho$, za neke $b', b'' \in B$, pa je $x \in B'$.

   (d) Postoje $c' \in C' \cup C''$ i $b'' \in B$ tako da $(c', x), (x, y), (y, b'') \in \rho$. Tada je $x \in C''$.

13) Ako $x, y \in G$ i $(x, y) \in \rho$, onda $(g(x), g(y)) = (\mathbf{1}, \mathbf{1}) \in \rho$.

14) Neka $x \in G$ i $y \in L$. Tada na osnovu definicije skupova G i L imamo sledeće mogućnosti:

   (a) Postoje $b', b'' \in B$, tako da $(b', x), (x, y), (y, b'') \in \rho$, odakle sledi da je $x \in B'$.

(b) Za neke $b' \in B$ i $c'' \in C' \cup C''$ važi $(b', x), (x, y), (y, c'') \in \rho$, što znači da je $(b', c'') \in \rho$, za $b' \in B'$ i $c'' \in C' \cup C''$ a to nije moguće zbog leme 4.3.1.

(c) $(c', x), (x, y), (y, b'') \in \rho$, za neke $c' \in C' \cup C''$ i $b'' \in B$, povlači $x \in C''$.

(d) Postoje $c', c'' \in C' \cup C''$ tako da $(c', x), (x, y), (y, c'') \in \rho$. Iz ovog uslova dobijamo $x \in C' \cup C''$.

15) Za $x \in G$ i $y \notin B' \cup C' \cup C'' \cup G \cup L$ iz $(x, y) \in \rho$ bi sledilo da $y \in G$.

16) Ako $x \in L$ i $y \in B'$, onda $(x, y) \in \rho$ povlači $(g(x), g(y)) = (\mathbf{0}, b) \in \rho$, jer je $\mathbf{0}$ najmanji element.

17) Slično kao u prethodnom slučaju za $x \in L$ i $y \in C' \cup C''$ imamo $(x, y) \in \rho \Rightarrow (g(x), g(y)) = (\mathbf{0}, c) \in \rho$.

18) Ako $x \in L, y \in G$ i $(x, y) \in \rho$, onda je $(g(x), g(y)) = (\mathbf{0}, \mathbf{1})$, što je očigledno u ρ.

19) U slučaju da $(x, y) \in \rho$ za $x, y \in L$, imamo $(g(x), g(y)) = (\mathbf{0}, \mathbf{0}) \in \rho$.

20) Neka $x \in L$ i $y \notin B' \cup C' \cup C'' \cup G \cup L$. Tada kao u slučajevima 15 i 16 iz $(x, y) \in \rho$ dobijamo $(g(x), g(y)) = (\mathbf{0}, y) \in \rho$.

21) Za $x \notin B' \cup C' \cup C'' \cup G \cup L$ i $y \in B'$ pretpostavka $(x, y) \in \rho$ implicira $x \in L$.

22) Kao u prethodnom slučaju iz $(x, y) \in \rho$ za $x \notin B' \cup C' \cup C'' \cup G \cup L$ i $y \in C' \cup C''$, dobijamo $x \in L$.

23) Ako $x \notin B' \cup C' \cup C'' \cup G \cup L$ i $y \in G$, onda kao u slučajevima 3 i 8 imamo da iz $(x, y) \in \rho$ sledi $(g(x), g(y)) = (x, \mathbf{1}) \in \rho$.

24) Za $x \notin B' \cup C' \cup C'' \cup G \cup L$ i $y \in L$, $(x, y) \in \rho$ povlači $x \in L$.

25) Ako $(x, y) \in \rho$ za $x, y \notin B' \cup C' \cup C'' \cup G \cup L$, onda trivijalno važi $(g(x), g(y)) = (x, y) \in \rho$.

Radi preglednosti, ponovo navodimo tabelu sa početka dokaza, gde su sa ✓ označeni slučajevi u kojima $(x, y) \in \rho$ implicira $(g(x), g(y)) \in \rho$, a sa $\times$ svi oni slučajevi u kojima pretpostavka da $(x, y) \in \rho$ dovodi do kontradikcije.

$x \backslash y$	B'	$C' \cup C''$	G	L	inače
B'	✓	×	✓	×	×
$C' \cup C''$	✓	✓	✓	×	×
G	×	×	✓	×	×
L	✓	✓	✓	✓	✓
inače	×	×	✓	×	✓

□

Sada možemo pokazati da $hPol\rho$ zadovoljava uslove teoreme 4.2.1 ako je ρ ograničeno parcijalno uređenje.

Tvrđenje 4.3.2 *Neka je $\rho \subset A^2$ netrivijalno ograničeno parcijalno uređenje na A. Tada je $hPol\rho$ maksimalan hiperklon na A.*

Dokaz. Neka je $f \in H_A \backslash hPol\rho$ hiperoperacija arnosti n. Tada postoji matrica

$$M = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{bmatrix} \in \rho^*$$

takva da je $f(M) = (B, C)$, pri čemu za sve $b \in B$ i $c \in C$ važi $(b, c) \notin \rho$.

Definišimo operacije $f_i \in O_A^{(1)}$, za svako $i \in \{1, \dots, n\}$, na sledeći način

$$f_i(x) = \begin{cases} a_i, & x = \mathbf{0} \\ b_i, & \text{inače.} \end{cases}$$

Sada ćemo dokazati da $f_1, \dots, f_n \in Pol\rho$. Za $(x, y) \in \rho$ imamo

$$(f_i(x), f_i(y)) = \begin{cases} (a_i, a_i), & \text{za } x = y = \mathbf{0} \\ (a_i, b_i), & \text{za } x = \mathbf{0} \text{ i } y \neq \mathbf{0} \\ (b_i, b_i), & \text{za } x \neq \mathbf{0}, y \neq \mathbf{0}. \end{cases},$$

pa je $(f_i(x), f_i(y)) \in \rho$ za sve $i \in \{1, \dots, n\}$.

Neka je g operacija definisana sa (4.3). Pošto na osnovu leme 4.3.2 znamo da je $g \in Pol\rho$, možemo definisati operaciju $f' \in \langle Pol\rho \cup \{f\}\rangle_h$ sa

$$f' = g[f[f_1, \dots, f_n]].$$

Tada za proizvoljno $x \in A$ važi

$$\begin{aligned} f'(x) &= g[f[f_1, \ldots, f_n]](x) \\ &= g^{\#}(f[f_1, \ldots, f_n](x)) \\ &= g^{\#}(f^{\#}(f_1(x), \ldots, f_n(x))). \end{aligned}$$

Iz ove definicije sledi

$$\begin{aligned} f'(\mathbf{0}) &= g^{\#}(f^{\#}(f_1(\mathbf{0}), \ldots, f_n(\mathbf{0}))) \\ &= g^{\#}(f^{\#}(\{a_1\}, \ldots, \{a_n\})) \\ &= g^{\#}(f(a_1, \ldots, a_n)) \\ &= g^{\#}(B) = \{b\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= g^{\#}(f^{\#}(f_1(x), \ldots, f_n(x))) \\ &= g^{\#}(f^{\#}(\{b_1\}, \ldots, \{b_n\})) \\ &= g^{\#}(f(b_1, \ldots, b_n)) \\ &= g^{\#}(C) = \{c\}, \quad x \neq \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Kako je $\mathbf{0}$ najmanji element, imamo $(\mathbf{0}, x) \in \rho$ za svako $x \in A$. Ako je $x \neq \mathbf{0}$ dobijamo $(f'(\mathbf{0}), f'(x)) = (b, c) \notin \rho$. Dakle, $f' \in O_A \setminus Pol\rho$.

Dakle, pokazali smo da kada je ρ ograničeno parcijalno uređenje, onda za svako $f \in H_A \setminus hPol\rho$ postoji $f' \in O_A \setminus Pol\rho$ tako da je $f' \in \langle Pol\rho \cup \{f\}\rangle_h$, pa na osnovu teoreme 4.2.1 sledi da je $hPol\rho$ maksimalan hiperklon. $\square$

Primer 4.3.1 *Neka je* $A = \{0,1,2,3,4\}$ *i neka je ograničeno parcijalno uređenje* $\rho \in R_A$ *dato sa*

$$\rho = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 2 & 3 & 4 & 2 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Ako uzmemo $M = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \in \rho^*$ *i* $f \in H_A^{(2)}$ *takvo da* $f(M) = (\{1,2\},\{3\}) \notin \rho_w$, *možemo definisati operacije* $f_1, f_2, g \in O_A^{(1)}$

	0	1	2	3	4
f_1	0	1	1	1	1
f_2	2	4	4	4	4
g	0	1	1	3	4

.

Jasno, $f_1, f_2, g \in Pol\rho$ *i za operaciju* $f' = g[f[f_1, f_2]]$ *važi*

$$\begin{aligned} f'(0) &= g[f[f_1, f_2]](0) = g^{\#}(f^{\#}(f_1(0), f_2(0))) \\ &= g^{\#}(f^{\#}(\{0\}, \{2\})) = g^{\#}(\{1,2\}) \\ &= g(1) \cup g(2) = \{1\}, \\ f'(1) &= g[f[f_1, f_2]](1) = g^{\#}(f^{\#}(f_1(1), f_2(1))) \\ &= g^{\#}(f^{\#}(\{1\}, \{4\})) = g^{\#}(\{3\}) = \{3\}. \end{aligned}$$

Dakle, $(0,1) \in \rho$, *ali* $(f'(0), f'(1)) = (1,3) \notin \rho$, *te je* $f' \in O_A \setminus Pol\rho$.

4.4 Hiperklonovi određeni relacijama ekvivalencije

U ovom poglavlju ćemo, kao i u prethodnom, pokazati da je $hPol\rho$ maksimalan hiperklon ako je ρ netrivijalna relacija ekvivalencije, tako što ćemo utvrditi da $hPol\rho$ zadovoljava uslove teoreme 4.2.1. Ovoga puta konstrukcija operacija iz $Pol\rho$ potrebnih za definisanje operacije $f' \notin Pol\rho$ je znatno jednostavnija, pa odmah možemo preći na dokaz sledećeg tvrđenja.

Napomena. Kako bi ovaj rad bio što kompletniji, dokaz sledećeg tvrđenja, kao i dokazi dva slična tvrđenja u narednim poglavljima, su preuzeti iz [11], pri čemu su ovde neki koraci u dokazima detaljnije objašnjeni.

Tvrđenje 4.4.1 *Neka je* $\rho \subseteq A^2$ *netrivijalna relacija ekvivalencije na* A. *Tada je* $hPol\rho$ *maksimalan hiperklon na* A.

Dokaz. Pretpostavimo da $f \in H_A \setminus hPol\rho$. To znači da postoji matrica

$$M = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{bmatrix} \in \rho^*$$

tako da važi $f(M) = (A', B') \notin \rho_w$, tj. imamo $(A' \times B') \cap \rho = \emptyset$.

Pretpostavimo da postoji $x \in A' \cap B'$. Tada zbog refleksivnosti relacije ρ sledi $(x,x) \in (A' \times B') \cap \rho$, što nije moguće. Otuda, $A' \cap B' = \emptyset$, pa sigurno postoji $i \in \{1, \ldots, n\}$ tako da $a_i \neq b_i$. Označimo $a = a_i$ i $b = b_i$. Za $j = 1, \ldots, n$ definišemo operacije $f_j \in O_A^{(1)}$

$$f_j(x) = \begin{cases} a_j, & x = a \\ b_j, & x = b \\ a_j, & \text{inače.} \end{cases}$$

Pokažimo da je $f_j \in Pol\rho$, za $j = 1, \ldots, n$. Neka $(x, y) \in \rho$. Tada je moguće:

1) $x, y \in A \setminus \{b\} \Rightarrow (f_j(x), f_j(y)) = (a_j, a_j) \in \rho$, jer je ρ refleksivna;

2) $x = y = b \Rightarrow (f_j(x), f_j(y)) = (b_j, b_j) \in \rho$, jer je ρ refleksivna;

3) $x \in A \setminus \{b\}$, $y = b \Rightarrow (f_j(x), f_j(y)) = (a_j, b_j) \in \rho$;

4) $x = b$, $y \in A \setminus \{b\} \Rightarrow (f_j(x), f_j(y)) = (b_j, a_j) \in \rho$, jer je ρ simetrična.

Označimo sa C_q klasu ekvivalencije relacije ρ koja sadrži element q. Za proizvoljno izabrane $a' \in A'$ i $b' \in B'$ definišemo operaciju $g \in O_A^{(1)}$ na sledeći način

$$g(x) = \begin{cases} a', & x \in C_q, \text{ za neko } q \in A' \\ b', & x \in C_q, \text{ za neko } q \in B' \\ a', & \text{inače.} \end{cases}$$

Zbog $(A', B') \notin \rho_w$ operacija g je dobro definisana jer ne postoje $x \in A'$ i $y \in B'$ koji su u istoj klasi. Specijalno, $(a', b') \notin \rho$. Pretpostavimo da $g \notin Pol\rho$, tj. postoji $(x, y) \in \rho$ tako da $(g(x), g(y)) \notin \rho$. Kako je ρ refleksivna, imamo $(g(x), g(y)) \in \{(a', b'), (b', a')\}$, a to bi značilo da x i y nisu u istoj klasi ekvivalencije, čime dolazimo do kontradikcije jer $(x, y) \in \rho$. Dakle, $g \in Pol\rho$.

Sada $f' \in \langle Pol\rho \cup \{f\}\rangle_h$ možemo definisati sa

$$f' = g[f[f_1, \ldots, f_n]].$$

Tada je $f' \in O_A^{(1)}$ i važi

$$\begin{aligned} f'(a) &= g[f[f_1,\ldots,f_n]](a) \\ &= g^{\#}(f^{\#}(f_1(a),\ldots,f_n(a))) \\ &= g^{\#}(f^{\#}(\{a_1\},\ldots,\{a_n\})) \\ &= g^{\#}(A') = \{a'\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(b) &= g[f[f_1,\ldots,f_n]](b) \\ &= g^{\#}(f^{\#}(f_1(b),\ldots,f_n(b))) \\ &= g^{\#}(f^{\#}(\{b_1\},\ldots,\{b_n\})) \\ &= g^{\#}(B') = \{b'\}. \end{aligned}$$

Kako $(a,b) \in \rho$, a $(a',b') \notin \rho$, sledi da $f' \notin Pol\rho$.

Pošto smo za proizvoljnu hiperoperaciju $f \notin hPol\rho$ odredili operaciju $f' \notin Pol\rho$, koja je kompozicija f i nekih operacija iz $Pol\rho$, na osnovu teoreme 4.2.1 zaključujemo da je $hPol\rho$ maksimalan hiperklon. $\square$

Primer 4.4.1 *Neka je ρ relacija ekvivalencije na $A = \{0,1,2\}$ čije su klase $\{0,1\}$ i $\{2\}$, tj.*

$$\rho = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Uzmimo da je $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \in \rho^*$ i f binarna hiperoperacija takva da $f(M) = (\{2\},\{0,1\})$, što nije u ρ_w, pa $f \notin hPol\rho$. Neka su $f_1, f_2, g \in O_A^{(1)}$ date sa

	0	1	2
f_1	0	1	1
f_2	2	2	2
g	1	1	2

Tada za operaciju $f' = g[f[f_1,f_2]]$ važi $(1,0) \in \rho$ i $(f'(1), f'(0)) = (2,1) \notin \rho$, odnosno $f' \notin Pol\rho$.

4.5 Hiperklonovi određeni centralnim relacijama

Koristeći se istom osnovnom idejom kao i u prethodnim slučajevima, dokazaćemo da je $hPol\rho$ maksimalan hiperklon ukoliko je ρ centralna relacija.

Tvrđenje 4.5.1 *Neka je $\rho \subseteq A^m, m \geq 1$, centralna relacija na A. Tada je $hPol\rho$ maksimalan hiperklon na A.*

Dokaz. Ako uzmemo $f \notin hPol\rho$, onda postoji matrica

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \in \rho^*$$

tako da važi $f(M) = (A_1, A_2, \dots, A_m) \notin \rho_w$. Primetimo da su skupovi $A_1, \dots, A_m$ po parovima disjunktni, jer bismo u slučaju da postoji $a \in A_i \cap A_j$, za neke različite $i, j \in \{1, \dots, m\}$, a zbog totalne refleksivnosti ρ, imali

$$(x_1, \dots, x_{i-1}, a, \dots, x_{j-1}, a, \dots, x_m) \in \rho, \;\; x_k \in A_k,$$

odnosno $(A_1 \times \dots \times A_m) \cap \rho \neq \emptyset$, što je u suprotnosti sa pretpostavkom da $(A_1, \dots, A_m) \notin \rho_w$.

Izaberimo međusobno različite elemente $c \in C(\rho)$ i $b_2, \dots, b_m \in A$. Pošto je ρ centralna relacija, sledi $(c, b_2, \dots, b_m) \in \rho$. Za $i = 1, \dots, n$ definišimo operacije $f_i \in O_A^{(1)}$ na sledeći način

$$f_i(x) = \begin{cases} a_{1i}, & x = c \\ a_{ki}, & x = b_k, \; 2 \leq k \leq m \\ c, & \text{inače.} \end{cases}$$

Pokažimo da važi $f_1, \dots, f_n \in Pol\rho$. Neka je $(x_1, \dots, x_m) \in \rho$. Tada imamo sledeće mogućnosti.

1) Ako postoji $j \in \{1, \dots, m\}$ tako da $x_j \notin \{c, b_2, \dots, b_m\}$, onda je $f_i(x_j) = c$, $i = 1, \dots, n$, pa važi $(f_i(x_1), \dots, f_i(x_m)) \in \rho$, jer je c centralni element i ρ je totalno simetrična relacija.

2) U slučaju da su $x_1, \ldots, x_m \in \{c, b_2, \ldots, b_m\}$, ali postoje neki $j \neq k$ takvi da je $x_j = x_k$, tada je $f_i(x_j) = f_i(x_k), i = 1, \ldots, n$, te je zbog totalne refleksivnosti $(f_i(x_1), \ldots, f_i(x_m)) \in \rho$.

3) Ostaje nam još slučaj kada su svi x_j u skupu $\{c, b_2, \ldots, b_m\}$, i međusobno su različiti. Tada važi $\{f_i(x_1), \ldots, f_i(x_m)\} = \{a_{1i}, \ldots, a_{mi}\}$, pa kako je $(a_{1i}, \ldots, a_{mi}) \in \rho$ i ρ je totalno simetrična relacija, to je i m-torka $(f_i(x_1), \ldots, f_i(x_m))$ u ρ.

Za proizvoljno izabrane $d_1 \in A_1, d_2 \in A_2 \ldots, d_m \in A_m$ definišemo operaciju $g \in O_A^{(1)}$

$$g(x) = \begin{cases} d_1, & x \in A_1 \\ d_2, & x \in A_2 \\ & \ldots \\ d_m, & x \in A_m \\ c, & \text{inače.} \end{cases}$$

Dokazaćemo da $g \in Pol\rho$. Pretpostavimo suprotno, da postoji $(x_1, \ldots, x_m) \in \rho$ tako da $(g(x_1), \ldots, g(x_m)) \notin \rho$. Ako postoji $x_i \notin A_1 \cup \ldots \cup A_m$, onda je $g(x_i) = c$, pa pošto je $c \in C(\rho)$ i ρ je totalno simetrična, dobijamo $(g(x_1), \ldots, g(x_m)) \in \rho$. Dakle, mora biti $\{x_1, \ldots, x_m\} \subseteq A_1 \cup \ldots \cup A_m$. Ako pak za neke $i \neq j$ važi $x_i, x_j \in A_k$, imamo $g(x_i) = g(x_j) = d_k$, pa zbog totalne refleksivnosti relacije ρ sledi $(g(x_1), \ldots, g(x_m)) \in \rho$. Na osnovu prethodnih zaključaka i činjenice da je ρ totalno simetrična, mozemo pretpostaviti da $x_i \in A_i$, za $i = 1, \ldots, m$. Ali tada zbog $(A_1, \ldots, A_m) \notin \rho_w$ sledi $(x_1, \ldots, x_m) \notin \rho$.

Neka je $f' \in \langle Pol\rho \cup \{f\}\rangle_h$ definisano sa

$$f' = g[f[f_1, \ldots, f_n]].$$

Očigledno je $f' \in O_A^{(1)}$ i važi

$$\begin{aligned} f'(c) &= g^{\#}(f^{\#}(f_1(c), \ldots, f_n(c))) \\ &= g^{\#}(f^{\#}(\{a_{11}\}, \ldots, \{a_{1n}\})) = g^{\#}(A_1) = \{d_1\}, \\ f'(b_2) &= g^{\#}(f^{\#}(f_1(b_2), \ldots, f_n(b_2))) \\ &= g^{\#}(f^{\#}(\{a_{21}\}, \ldots, \{a_{2n}\})) = g^{\#}(A_2) = \{d_2\}, \\ &\ldots \\ f'(b_m) &= g^{\#}(f^{\#}(f_1(b_m), \ldots, f_n(b_m))) \\ &= g^{\#}(f^{\#}(\{a_{m1}\}, \ldots, \{a_{mn}\})) = g^{\#}(A_m) = \{d_m\}. \end{aligned}$$

Znamo da $(c, b_2, \ldots, b_m) \in \rho$, a kako $(d_1, \ldots, d_m) \in A_1 \times \ldots \times A_m$ i $(A_1, \ldots, A_m) \notin \rho_w$, sledi da $(d_1, \ldots, d_m) \notin \rho$. Prema tome $f' \notin Pol\rho$.

Prema tome, pokazali smo da $hPol\rho$ u slučaju kada je ρ centralna relacija, zadovoljava uslove teoreme 4.2.1, pa je $hPol\rho$ maksimalan hiperklon. □

Primer 4.5.1 *Neka je ρ centralna relacija na $A = \{0, 1, 2\}$ sa centrom $C(\rho) = \{0\}$, tj.*

$$\rho = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Neka je $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \in \rho^*$ i $f \in H_A^{(2)}$ takva da $f(M) = (\{1\}, \{2\})$. Tada $f \notin hPol\rho$. Ako zadamo operacije $f_1, f_2, g \in O_A^{(1)}$ sa

	0	1	2
f_1	1	0	0
f_2	0	2	0
g	0	2	1

i definišemo operaciju $f' = g[f[f_1, f_2]]$, onda imamo $(0, 1) \in \rho$, ali $(f'(0), f'(1)) = (2, 1) \notin \rho$, što znači da $f' \notin Pol\rho$.

4.6 Hiperklonovi određeni regularnim relacijama

U ovom poglavlju pokazujemo da je $hPol\rho$ maksimalan hiperklon i u slučaju kad je ρ regularna relacija.

Podsetimo se:

Relacija $\rho \subsetneq A^m, m \geq 3$, je m-regularna ako postoji neprazna familija $\Theta = \{\theta_1, \ldots, \theta_h\}$ relacija ekvivalencije na A, koja zadovoljava sledeće uslove:

1) svako $\theta_i, 1 \leq i \leq h$, ima tačno m klasa ekvivalencije,

2) ako je A_i proizvoljna klasa ekvivalencije relacije θ_i, za svako $i \in \{1, \ldots, h\}$, tada je $\bigcap A_i \neq \emptyset$,

3) $(a_1, \ldots, a_m) \in \rho$ ako i samo ako za svako $1 \leq i \leq h$ postoje $1 \leq k < \ell \leq m$ tako da $(a_k, a_\ell) \in \theta_i$.

Pokazaćemo da je svaka m-regularna relacija totalno refleksivna i totalno simetrična. Naime, sve m-torke $(a_1, \ldots, a_m)$ takve da postoje $1 \leq i < j \leq m$ za koje je $x_i = x_j$ su u ρ, s obzirom da je (x_i, x_j), zbog refleksivnosti, u svakoj relaciji iz Θ. S druge strane, ako je $(a_1, \ldots, a_m) \in \rho$, onda i $(a_{\pi(1)}, \ldots, a_{\pi(m)}) \in \rho$, gde je π proizvoljna permutacija elemenata skupa $\{1, \ldots, m\}$, jer za $i \in \{1, \ldots, h\}$ postoje $k \neq \ell$ tako da $(a_k, a_\ell) \in \theta_i$, a $a_k, a_\ell \in \{a_{\pi(1)}, \ldots, a_{\pi(m)}\}$ i θ_i je simetrična.

Tvrđenje 4.6.1 *Neka je $\rho \subset A^m, m \geq 3$, m-regularna relacija na A. Tada je $hPol\rho$ maksimalan hiperklon na A.*

Dokaz. Neka je f proizvoljna hiperoperacija koja nije u $hPol\rho$. Tada postoji matrica

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \in \rho^*$$

tako da važi $f(M) = (A_1, A_2, \ldots, A_m) \notin \rho_w$.

Kao što smo već imali u slučaju centralnih relacija, zbog totalne refleksivnosti relacije ρ skupovi $A_1, \ldots, A_m$ su po parovima disjunktni.

Izaberimo proizvoljne različite elemente $d_1, \ldots, d_m \in A$, takve da je $(d_1, \ldots, d_m) \in \rho$. Za $j = 1, \ldots, n$ definišemo operacije $f_j \in O_A^{(1)}$ na sledeći način

$$f_j(x) = \begin{cases} a_{ij}, & x = d_i \\ a_{1j}, & \text{inače.} \end{cases}$$

Pokažimo da $f_1, \ldots, f_n \in Pol\rho$. Neka je $(x_1, \ldots, x_m) \in \rho$. Ako postoje $1 \leq k < \ell \leq m$ tako da je $x_k = x_\ell$, onda je i $f_j(x_k) = f_j(x_\ell)$, pa zbog totalne refleksivnosti ρ imamo $(f_j(x_1), \ldots, f_j(x_m)) \in \rho$. Ako su svi $x_1, \ldots, x_m$ međusobno različiti, mogući su sledeći slučajevi:

1) $\{x_1, \ldots, x_m\} = \{d_1, \ldots, d_m\}$, pa pošto je ρ totalno simetrična, možemo pretpostaviti da je $(x_1, \ldots, x_m) = (d_1, \ldots, d_m)$, a tada za sve $j = 1, \ldots, n$ važi

$$(f_j(x_1), \ldots, f_j(x_m)) = (f_j(d_1), \ldots, f_j(d_m)) = (a_{1j}, \ldots, a_{mj}) \in \rho;$$

2) Postoji tačno jedno $k \in \{1, \ldots, m\}$ tako da $x_k \notin \{d_1, \ldots, d_m\}$, što znači da je $f_j(x_k) = a_{1j}$. U zavisnosti od toga da li d_1 pripada $\{x_1, \ldots, x_m\}$ ili ne, može se desiti da $(f_j(x_1), \ldots, f_j(x_m))$ ima dve iste koordinate, pa jeste u ρ zbog totalne refleksivnosti, ili je

$$\{f_j(x_1), \ldots, f_j(x_m)\} = \{a_{1j}, \ldots, a_{mj}\},$$

što zbog totalne simetričnosti implicira $(f_j(x_1), \ldots, f_j(x_m)) \in \rho$;

3) Postoje $k \neq \ell$ takvi da $x_k, x_\ell \notin \{d_1, \ldots, d_m\}$. Tada je $f_j(x_k) = f_j(x_\ell) = a_{1j}$, a otuda $(f_j(x_1), \ldots, f_j(x_m)) \in \rho$, zbog totalne refleksivnosti ρ.

Dakle, $f_j \in Pol\rho$, za sve $j = 1, \ldots, n$.

Ako $b_1 \in A_1, b_2 \in A_2, \ldots, b_m \in A_m$, onda važi $(b_1, \ldots, b_m) \notin \rho$. Tada, pošto je ρ m-regularna relacija postoji relacija ekvivalencije θ^* takva da za sve $i \neq j$ važi $(b_i, b_j) \notin \theta^*$. Kako su $b_1, \ldots, b_m$ proizvoljno izabrani elementi skupova $A_1, \ldots, A_m$, sledi da za sve $i \neq j$ ne postoje $x \in A_i$ i $y \in A_j$ takvi da je $(x, y) \in \theta^*$, tj. njihove klase ekvivalencije su disjunktne. Označimo sa C_q^* klasu ekvivalencije relacije θ^* koja sadrži q i definišimo operaciju $g \in O_A^{(1)}$

$$g(x) = \begin{cases} b_1, & x \in C_q^*, \text{ za neko } q \in A_1 \\ b_2, & x \in C_q^*, \text{ za neko } q \in A_2 \\ & \ldots \\ b_m, & x \in C_q^*, \text{ za neko } q \in A_m \\ b_1, & \text{inače.} \end{cases}$$

Operacija g je dobro definisana jer su sve klase ekvivalencije koje se pojavljuju u definiciji, kao što smo već rekli, međusobno disjunktne. Pretpostavimo da $g \notin Pol\rho$, odnosno postoji $(x_1, \ldots, x_m) \in \rho$ tako da $(g(x_1), \ldots, g(x_m)) \notin \rho$. Ako bismo za neke x_i i x_j imali $g(x_i) = g(x_j)$, onda bismo, zbog totalne refleksivnosti, dobili $(g(x_1), \ldots, g(x_m)) \in \rho$. Dakle, $g(x_1), \ldots, g(x_m)$ su različiti elementi, pa mora biti $\{g(x_1), \ldots, g(x_m)\} = \{b_1, \ldots, b_m\}$. To znači da su $x_1, \ldots, x_m$ iz različitih klasa od θ^*, što je u suprotnosti sa pretpostavkom da $(x_1, \ldots, x_m) \in \rho$. Zaključujemo da je $g \in Pol\rho$.

Definišimo $f' \in \langle Pol\rho \cup \{f\}\rangle_h$ sa

$$f' = g[f[f_1, \ldots, f_n]].$$

Jasno, $f' \in O_A^{(1)}$ i zbog $A_i \subseteq \bigcup_{q \in A_i} C_q^*$ važi

$$\begin{aligned}
f'(d_1) &= g^{\#}(f^{\#}(f_1(d_1), \ldots, f_n(d_1))) \\
&= g^{\#}(f^{\#}(\{a_{11}\}, \ldots, \{a_{1n}\})) = g^{\#}(A_1) = \{b_1\}, \\
f'(d_2) &= g^{\#}(f^{\#}(f_1(d_2), \ldots, f_n(d_2))) \\
&= g^{\#}(f^{\#}(\{a_{21}\}, \ldots, \{a_{2n}\})) = g^{\#}(A_2) = \{b_2\}, \\
& \ldots \\
f'(d_m) &= g^{\#}(f^{\#}(f_1(d_m), \ldots, f_n(d_m))) \\
&= g^{\#}(f^{\#}(\{a_{m1}\}, \ldots, \{a_{mn}\})) = g^{\#}(A_m) = \{b_m\}.
\end{aligned}$$

S obzirom da $(d_1, \ldots, d_m) \in \rho$, a $(b_1, \ldots, b_m) \notin \rho$, sledi $f' \notin Pol\rho$.

Pokazali smo da za svako $f \in H_A \setminus hPol\rho$ postoji $f' \in O_A \setminus Pol\rho$ takvo da $f' \in \langle Pol\rho \cup \{f\}\rangle_h$, pa prema teoremi 4.2.1 dobijamo da je $hPol\rho$ maksimalan hiperklon. $\Box$

Primer 4.6.1 *Neka je ρ regularna relacija na $A = \{0,1,2,3\}$, koja odgovara relaciji ekvivalencije sa klasama $\{0,1\}, \{2\}$ i $\{3\}$, tj.*

$$\rho = A^3 \setminus \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 & 3 & 3 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 3 & 0 & 2 & 2 & 3 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 0 & 2 & 0 & 3 & 2 & 3 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ako je $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \in \rho^*$ *i f binarna hiperoperacija takva da $f(M) = (\{3\}, \{0,1\}, \{2\})$, onda $f \notin hPol\rho$. Neka su $f_1, f_2, g \in O_A^{(1)}$ date sa*

	0	1	2	3
f_1	2	1	0	0
f_2	1	3	1	1
g	1	1	2	3

Definišimo operaciju $f' = g[f[f_1, f_2]]$. Tada $(3,0,1) \in \rho$, a $(f'(3), f'(0), f'(1)) = (3,1,2) \notin \rho$, pa $f' \notin Pol\rho$.

Glava 5

Zaključak

U ovom radu smo ispitivali neke sličnosti i razlike između klonova i hiperklonova, pri čemu smo posebnu pažnju posvetili nekim od mogućih Galoisovih veza između relacija i hiperoperacija. Osim toga smo dokazali da skupovi hiperoperacija koje h-čuvaju relacije iz Rosenbegovih klasa (R1) i (R4)-(R6) predstavljaju maksimalne hiperklonove. Ostaje da se proveri da li isto važi i za relacije iz klasa (R2) i (R3). Međutim, čak i ako bi se ispostavilo da je to tačno, vrlo je verovatno da time ne bismo okarakterisali sve maksimalne hiperklonove, s obzirom da sigurno postoji još načina da se definiše Galoisova veza između relacija i hiperoperacija osim onih koji su ove navedeni, pa bi za takvu vezu neki od zatvorenih skupova takođe mogli biti maksimalni hiperklonovi.

Bibliografija

[1] V.G. Bodnarchuk, L.A. Kalužnin, V.N. Kotov, and B.A. Romov, *Galois theory for Post algebras i-ii* (ruski), Cybernetics, 3: 1–10; 5: 1–9, (1969)

[2] F. Börner, *Total multifunctions and relations*, Contributions to General Algebra 13, 23–36, (2001)

[3] J. Čolić, H. Machida, J. Pantović, *Maximal Hyperclones determined by Monotone Operations*, Proceedings of 41st IEEE International Symposium on Multiple-Valued Logic (ISMVL 2011), 160 – 163, (2011)

[4] J. Čolić, H. Machida, J. Pantović, *Upward saturated hyperclones*, Multiple-Valued Logic and Soft Computing, poslato na recenziju, (2011)

[5] R. Doroslovački, J. Pantović, G. Vojvodić, *One interval in the lattice of partial hyperclones*, Czechoslovak Mathematical Journal, 55(3): 719-724. (2005)

[6] T. Drescher, R. Pöschel, *Multiclones and relations*, Multiple-Valued Logic. An International Journal, 7(5-6): 313–337, (2001)

[7] D. Geiger, *Closed systems of functions and predicates*, Pacific J. Math., 27: 95-100, (1968)

[8] A.V. Kuznecov, *Structures with closure and criteria of functional copleteness* (ruski), Usp. Mat. Nauk. 16, 2(98): 201-202 (1961)

[9] D. Lau, *Function Algebras on Finite Sets - A Basic Course on Many-Valued Logic and Clone Theory*, Springer Monographs in Mathematics, (2006)

[10] H. Machida, *Hyperclones on a two-element set*, Multiple-Valued Logic. An International Journal, 8(4): 495–501, (2002)

[11] H. Machida, J. Pantović, *Three Classes of Maximal Hyperclones*, Journal of Multiple Valued Logic and Soft Computing, 18(2): 201–210, (2012)

[12] R. Sz. Madarász, *Od skupova do univerzalnih algebri*, Univerzitet u Novom Sadu, (2006)

[13] D. Mašulović, *Clones and Applications* (rukopis), (2007)

[14] R. Pöschel and L.A. Kalužnin, *Funktionen und Relationenalgebren*, Deutscher Verlag der Wiss, Birkhäuser Verlag, Basel u. Stuttgart, (1979)

[15] R.W. Quackenbush, *New Proof of Rosenberg's Primal Algebra Characterization Theorem*, Finite Algebras and Multiple-valued Logic (Proc. Conf. Szeged 1979), Colloq. Math. Soc. J. Bolyai, 28, North-Holland, Amsterdam, 603-634, (1981)

[16] B.A. Romov, *Restriction-closed hyperclones*, ISMVL, page 8. IEEE Computer Society, (2007)

[17] I.G. Rosenberg, *Über die funktionale Vollständigkeit in den mehrwertigen Logiken. Struktur der Funktionen von mehreren Veränderlichen auf endlichen Mengen*, Rozpravy Československe Akademie Věd Řada Matematických a Přírodních Věd, 80(4): 93, (1970)

[18] I.G. Rosenberg, *An algebraic approach to hyperalgebras*, Proceedings of 26th IEEE International Symposium on Multiple-Valued Logic (ISMVL 1996), 203–208, (1996)

[19] I.G. Rosenberg, *Multiple-Valued Hyperstructures*, Proceedings of 28th IEEE International Symposium on Multiple-Valued Logic (ISMVL 1998), 326–331, (1998).

[20] I.G. Rosenberg, *Algebraic structures and relations: a short survey*, Contributions to general algebra 15, Proceedings of the Klagenfurt Conference AAA2003, Verlag Johannes Heyn, Klagenfurt, 161–176, (2004)

[21] Á. Szendrei, *Clones in Universal Algebra*, Seminaire de Mathematiques Superieures, Les Presses de l'Universite de Montreal, Montreal, (1986)

Biografija

Jelena Čolić je rođena 30. marta 1980. godine u Bačkoj Palanci, gde je završila osnovnu školu i gimnaziju kao nosilac „Vukove diplome". Godine 1999. upisuje Prirodno-matematički fakultet u Novom Sadu, smer profesor matematike – teorijsko usmerenje, koji završava u septembru 2003. godine, sa prosečnom ocenom 9,97. Godine 2010. upisuje akademske master studije na istom fakultetu, modul: teorijska matematika. Položilaje sve ispite predviđene nastavnim planom i programom, i stekla pravo da brani završni rad.

Radila je u O.Š. „Zdravko Čelar"u Čelarevu (2004-2006), na Tehnološkom fakultetu (2006-2007), Visokoj poslovnoj školi strukovnih studija (2007-2008) i Prirodno-matematičkom fakultetu (2008-2010) u Novom Sadu, i gimnaziji „Svetozar Miletić"u Srbobranu (2010). Od septembra 2010. godine je zaposlena kao saradnik u nastavi na Fakultetu tehničkih nauka u Novom Sadu. Takođe, od 2007. godine radi kao nastavnik geometrije u oglednim matematičkim odeljenjima sedmog i osmog razreda osnovne škole pri gimnaziji „Jovan Jovanović Zmaj"u Novom Sadu.

Novi Sad, maj 2012.

Jelena Čolić

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
KLjUČNE DOKUMENTACIJSKE INFORMACIJE

Redni broj: RBR	
Identifikacioni broj: IBR	
Tip dokumentacije: TD	Monografska dokumentacija
Tip zapisa: TZ	Tekstualni štampani materijal
Vrsta rada: VR	Master rad
Autor: AU	Jelena Čolić
Mentor/Komentor: MN	Prof. dr Rozalija Madaras-Silađi
Naslov rada: NR	Neke klase maksimalnih hiperklonova
Jezik publikacije: JP	srpski (latinica)
Jezik izvoda: JI	srpski
Zemlja publikovanja: ZP	Srbija
Uže geografsko područje: UGP	Vojvodina
Godina: GO	2012
Izdavač: IZ	Autorski reprint
Mesto i adresa: MA	Novi Sad, Departman za matematiku i informatiku, Prirodno–matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, Trg Dositeja Obradovića 4
Fizički opis rada: (poglavlja/strana/citata/ tabela/slika/grafika/priloga) FO	5/iv+80/21/0/0/0/0

Naučna oblast: NO	Matematika
Naučna disciplina: ND	Univerzalna algebra
Predmetna odrednica/ ključne reci: PO/UDK	klonovi, hiperklonovi, Galoisove veze, Rosenbergove relacije, maksimalni hiperklonovi
Čuva se: CU	Biblioteka Departmana za matematiku i informatiku Prirodno–matematičkog fakulteta Univerziteta u Novom Sadu
Važna napomena: VN	
Izvod: IA	U radu je dat uporedni pregled nekih osnovnih svojstava klonova i hiperklonova. Predstavljena je Galoisova veza između relacija i operacija, kao i neki načini da se definiše Galoisova veza između relacija i hiperoperacija. Navedena je Rosenbergova karakterizacija maksimalnih klonova i prikazane su četiri klase maksimalnih hiperklonova.
Datum prihvatanja teme od strane NN veca: DP	11.4.2012.
Datum odbrane: DO	
Članovi komisije: KO	
Predsednik:	dr Petar Đapić, docent, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu
Član:	dr Maja Pech, docent, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu
Mentor:	dr Rozalija Madaras-Silađi, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF ENGINEERING
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number: ANO	
Identification number: INO	
Document type: DT	Monograph type
Type of record: TR	Printed text
Content code: CC	Master's thesis
Author: AU	Jelena Čolić
Menthor/Comenthor: MN	Prof. Rozalija Madaras-Silađi, PhD
Title: TI	Some classes of maximal hyperclones
Language of text: LT	Serbian
Language of abstract: LA	English
Country of publication: CP	Serbia
Locality of publication: LP	Vojvodina
Publication year: PY	2012
Publisher: PU	Author's reprint
Publication place: PP	Novi Sad, Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4
Physical description: (chapters/pages/ref./tables/ pictures/graphs/appendixes) PD	5/iv+80/21/0/0/0/0

Scientific field: SF	Mathematics
Scientific discipline: SD	Universal Algebra
Subject/Key words: SKW	clone, hyperclone, Galois connections, Rosenberg relations, maximal hyperclones
Holding data: HD	Library of the Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad
Note: N	
Abstract: A	In this thesis we compare some basic properties of clones to those of hyperclones. We also study Galois connection between relations and operations, and present several ways to define Galois connection between relations and hyperoperations. Moreover, we give Rosenberg's clasification of maximal clones, and, finally, present four classes of maximal hyperclones.
Accepted by the scientific board on: ASB	April 11^{th}, 2012
Defended on: DE	
Thesis defend board: DB	
Chair:	Petar Đapić, PhD, assistant professor, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad
Member:	Maja Pech, PhD, assistant professor, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad
Supervisor:	Prof. Rozalija Madaras-Silađi, PhD, full professor, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad